ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

ГОЛОМОРФНЫЕ СЛОЕНИЯ, ПРОИСХОДЯЩИЕ ИЗ КОНФИГУРАЦИЙ ВЕКТОРОВ В КОМПЛЕКСНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Выполнил студент
603 группы
Джафаров Анар Хазар оглы

подпись студента

Научный руководитель:
проф. Панов Тарас Евгеньевич

подпись научного руководителя

Москва,
2021 г.

Содержание

1. Введение

Пусть $V \cong \mathbb{C}^k$ - k-мерное комплексное векторное пространство, и пусть $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_m\}$ - набор из m (возможно повторяющихся) векторов в двойственном пространстве V^*, порождающих линеныйми комбинациями с вещественными коэффициентами всё пространство V^*. Рассмотрим действие V на комплексном пространстве $\mathbb{C}^m$ заданное следующим образом:

$$V \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$$
$$(v, x) \mapsto v \cdot z = (e^{\langle \gamma_1, v\rangle} z_1, ..., e^{\langle \gamma_m, v\rangle} z_m). \tag{1}$$

В вещественном случае известна связь между топологией пространства орбит такого действия и линейными свойствами конфигурации Γ. Она подробна описана в [1]. По двойственности Гейла по Γ строится конфигурация $A = \{a_1, ..., a_m\}$ в пространстве W^*, где W - пространство линейных зависимостей между векторами из Γ, а далее в $\mathbb{C}^m$ с помощью симплициального комплекса $\mathcal{K}$, выделяется инвариантное подмножество $U(\mathcal{K})$, на которое ограничивается действие. В терминах пары $(A, \mathcal{K})$ описываются топологические свойства действия.

Свободность действия в вещественном случае эквивалентна тому, что все конусы $\operatorname{Cone} A_I, I \in K$ - симплициальны. Собственность эквивалентна тому, что они складываются в веер. А компактность пространства орбит достигается тогда и только тогда, когда этот веер полный. При этом, в случае полного веера, оказывается, что $U(\mathcal{K})/V$ гомеоморфно вещественному момент-угол комплексу $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$, играющему важнейшую роль в торической топологии. Из этого следует, что момент-угол комплекс $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$, построенный по полному симплициальному вееру, является гладким многообразием. В [3] показано, что гомеоморфизм такого рода имеет место и для момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, поэтому возникает интерес в том, чтобы рассмотреть комплексное действие и перенести результаты.

Эта связь между топологией и линейными и комбинаторными свойствами пары $(A, \mathcal{K})$ характерна и для других областей. Известны алгебраические версии этих результатов, описывающие конструкцию Кокса алгебраических торических многообразий. Условие веера гарантирует схеме, построенной по конфигурации векторов, свойство отделимости - алгебраический аналог Хаусдорфовости. Об этом можно прочесть в [4, Chapter 5].

Данная работа ставит задачей описать в голоморфном случае топологию такого действия. Целью работы при этом мы видим формулировку теорем, описывающих множества свободных и почти свободных орбит, а также то, при каких изначальных данных действие будет собственным, а пространство орбит компактным. Инструментами в этом послужат конструкции линейной алгебры (двойственность Гейла) и выпуклой геометрии (конусы, веера).

2. Свободные и почти свободные орбиты

Предложение 2.1 (Критерий почти свободности)**.** *Орбита Vz точки $z = (z_1, ..., z_m) \in \mathbb{C}^m$ почти свободна тогда и только тогда, когда подмножество $\{\gamma_j : z_j \neq 0\}$ порождает V^* комплексными линейными комбинациями.*

Доказательство. Для начала заметим, что набор векторов $\{\gamma_{i_1}, ..., \gamma_{i_s}\}$ порождает всё V^* тогда и только тогда, когда не существует вектора $v \in V$ такого, что $\langle \gamma_{i_1}, v \rangle = 0, ..., \langle \gamma_{i_s}, v \rangle = 0$, так как это эквивалентно принадлежности набора подпространству задаваемому комплексным уравнением $\langle w, v \rangle = 0$.

Если такой вектор v существует, подпространство порождённое им является стабилизирующим для z и стабилизатор не является дискретным.

Предположим такого вектора нет. Построим отображение $V \to \mathbb{C}^s$ по правилу

$$v \mapsto \frac{1}{2\pi i}(\langle \gamma_{i_1}, v \rangle, ..., \langle \gamma_{i_s}, v \rangle).$$

Стабилизатором для точки z будет являться прообраз точек с целочисленными координатами. Это подмножество дискретно, а отображение по предположению инъективно, следовательно прообраз тоже дискретен. □

Пример 2.2. Рассмотрим действие $V \cong \mathbb{C}$ на $\mathbb{C}$, задаваемое одним вектором $\gamma_1 = (1) \in V$:

$$v \cdot z = e^v z.$$

Несмотря на то, что (1) порождает всё пространство, ни одна точка комплексной плоскости не имеет тривиального стабилизатора, поскольку векторы вида $2\pi i k$ действуют тривиально на всём пространстве.

Заметим, что этот пример выходит немного за рамки изначальных требований к системе Γ, так как над $\mathbb{R}$ один вектор не порождает комплексной плоскости. Этот и следующий пример, как мы увидим далее, являются мотивацией к условию порождения всего $\mathbb{C}^m$ линейными комбинациями векторов из Γ с вещественными коэффициентами.

Пример 2.3. Добавив к предыдущему примеру вектор $\gamma_2 = (-1)$ и получив действие уже на $\mathbb{C}^2$:

$$v \cdot z = (e^v z_1, e^{-v} z_2),$$

мы видим, что стабилизатор произвольной ненулевой точки такой же, как в предыдущем примере.

Пример 2.4. Если же в качестве γ_2 взять вектор (i), то действовать на $\mathbb{C}^2$ пространство V будет по формуле:

$$v \cdot z = (e^v z_1, e^{-iv} z_2).$$

Теперь стабилизатор точки без нулевых координат тривиален, стабилизатор точек с $z_1 = 0$ есть подгруппа $\mathbb{Z}\langle 2\pi \rangle$, а для $z_2 = 0$ - $\mathbb{Z}\langle 2\pi i \rangle$.

Предложение 2.5 (Достаточное условие свободности)**.** *Если подмножество $\{\gamma_j : z_j \neq 0\}$ порождает V^* вещественными линейными комбинациями, то орбита Vz точки $z = (z_1, ..., z_m) \in \mathbb{C}^m$ свободна.*

Доказательство. Пусть стабилизатор точки z не тривиален. Тогда найдётся вектор $v \in V$ такой, что

$$\langle \gamma_{i_1}, v \rangle = 2\pi i k_{i_1}, ..., \langle \gamma_{i_s}, v \rangle = 2\pi i k_{i_s}.$$

Это означает, что векторы $\gamma_{i_1}, ..., \gamma_{i_s}$ лежат в вещественном подпространстве $\mathrm{Re}\langle w, v\rangle = 0$, что противоречит условию. $\square$

В рамках наших предположений, орбита точки общего положения (со всеми ненулевыми координатами) свободна.

Критерий свободности орбиты для дальнейшего изолжения не потребуется, тем не менее приведём его ради полноты картины. К сожалению, такой же удобной формулировки, как в предыдущих утверждениях тут нет.

Предложение 2.6. *Орбита Vz точки $z = (z_1, ..., z_m) \in \mathbb{C}^m$ свободна тогда и только тогда, когда не существует такого ненулевого вектора v, что векторы $\gamma_{i_1}, ..., \gamma_{i_s}$ удовлетворяют уравнениям*

$$\langle \gamma_{i_j}, v\rangle \in \mathbb{Z}\langle 2\pi i\rangle.$$

Введём некоторые обозначения.

Далее пространства, с которыми мы будем работать будут и вещественными, и комплексными, поэтому для определённости введём обозначения:

$$\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathbb{C}},$$

$$\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathbb{R}}.$$

Кроме того, по аналогии будем обозначать линейные оболочки:

$$\langle \cdot\rangle_{\mathbb{C}},$$

$$\langle \cdot\rangle_{\mathbb{R}}.$$

Обозначим за $[m]$ множество $\{1, ..., m\}$ и для подмножеств $I = \{i_1, ..., i_p\} \subseteq [m]$ обозначим $\Gamma_I = \{\gamma_i : i \in I\}$.

Положим

$$\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\Gamma) = \{I \subset [m] : \langle \Gamma_{\widehat{I}}\rangle_{\mathbb{C}} = V^*\},$$
$$\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(\Gamma) = \{I \subset [m] : \langle \Gamma_{\widehat{I}}\rangle_{\mathbb{R}} = V^*\}.$$

Очевидно вложение $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(\Gamma) \subset \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\Gamma)$.

Симплициальным комплексом на $[m]$ называется семейство $\mathcal{K}$ подмножеств $[m]$, такое что вместе с $I \in \mathcal{K}$ в нём содержатся все подмножества $J \subset I$. Подмножества $I \in \mathcal{K}$ называются *симплексами* или *гранями.* Если $\{i\} \in \mathcal{K}$ назовём эту грань вершиной, $\{i\} \notin \mathcal{K}$ - призрачные вершиноы. Симплициальный комплекс называется *однородным размерности* d, если все его максимальные по вложению грани имеют размерность d.

Предложение 2.7. $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ *и* $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\Gamma)$ *- однородные симплициальные комплексы размерности* $m - 2k - 1$ *и* $m - k - 1$ *соответственно.*

Доказательство. Докажем для $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$. Если $\langle \Gamma_{\widehat{I}}\rangle_{\mathbb{R}} = V^*$, то это верно и для $\Gamma_{\widehat{J}}$, $J \subset I$, так как $\Gamma_{\widehat{I}} \subset \Gamma_{\widehat{J}}$. Кроме того $\langle \Gamma_{\widehat{\emptyset}}\rangle_{\mathbb{R}} = V^*$ в силу изначального предположения о том, что $\langle \{\gamma_1, ..., \gamma_m\}\rangle_{\mathbb{R}} = V^*$, поэтому $K_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ - симплициальный комплекс. Далее, если $\langle \Gamma_{\widehat{I}}\rangle_{\mathbb{R}} = V^*$, то в $\Gamma_{\widehat{I}}$ содержится базис, который имеет вид $\Gamma_{\widehat{L}}$ для некоторого $L \supset I$. При этом $|L| = m - |\Gamma_{\widehat{L}}| = m - 2k$. Получается, любая грань содержится в грани размерности $m-2k-1$, что завершает доказательство для $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$. Случай $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\Gamma)$ отличается только тем, что над $\mathbb{C}$ базисом является набор из k векторов, а не из $2k$, как в вещественном случае. $\square$

Для произвольного симплициального комплекса $\mathcal{K}$ построим пространство:

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^m \setminus \bigcup_{\{i_1,\dots,i_p\}\notin\mathcal{K}} \{z : z_{i_1} = \dots = z_{i_p} = 0\}.$$

Предложение 2.8. *Если $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\Gamma)$, то ограничение действия V на $\mathbb{C}^m$ на $U(\mathcal{K})$ почти свободно.*

Доказательство. Если $z = (z_1, \dots, z_m) \in U(\mathcal{K})$, то $I = \{i : z_i = 0\} \in \mathcal{K}$. Поскольку $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\Gamma)$, имеем $\langle \Gamma_{\widehat{I}} \rangle_{\mathbb{C}} = V^*$, значит, согласно утверждению 2.1, орбита точки z почти свободна. □

Предложение 2.9. *Если $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$, то ограничение действия V на $\mathbb{C}^m$ на $U(\mathcal{K})$ свободно.*

Доказательство. Аналогично предыдущему утверждению. □

При этом, согласно 2.1, мы можем сформулировать, что $U(\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\Gamma))$ является в точности объединением всех почти свободных орбит или максимальным по включению подмножеством $\mathbb{C}^m$, на котором V действует почти свободно. Также, исходя из 2.5, мы можем сказать, что максимальное по включению подмножество $\mathbb{C}^m$, на котором V действует свободно, зажато между $U(\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(\Gamma))$ и $U(\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\Gamma))$.

Пример 2.10. Возьмём за основу пример 2.4. В этом случае $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(\Gamma) = \{\emptyset\}$, а $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\Gamma) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$. При этом $U(\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(\Gamma)) = \mathbb{C}^2 \setminus \{z : z_1 = 0\} \cup \{z : z_2 = 0\}$, а $U(\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\Gamma)) = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Поскольку в данном случае стабилизаторы подпространств $\{z : z_1 = 0\}$ и $\{z : z_2 = 0\}$ не тривиальны, $U(\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(\Gamma))$ является в точности множеством свободных орбит.

Пример 2.11. Добавим к предыдущему примеру вектор $\gamma_3 = (-\sqrt{2})$. Тогда $\{2\} \notin \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$, так как γ_1 и γ_3 не образуют базис над $\mathbb{R}$ в плоскости. Поэтому точки $\mathbb{C}^3$ с $z_2 = 0$ не принадлежат $U(\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(\Gamma))$. Тем не менее, точки с $z_1 \neq 0, z_2 = 0, z_3 \neq 0$ имеют тривиальный стабилизатор, поскольку 1 и $\sqrt{2}$ не являются рационально соизмеримыми, и нет числа $v \in \mathbb{C}$ такого, что $v, \sqrt{2}v \in \mathbb{Z}\langle 2\pi i \rangle$.

Эти примеры показывают, что объединение невырожденных орбит может как совпадать, так и не совпадать с $U(\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$.

При этом легко видеть, что совпадать с $U(\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\Gamma)$ это множество не может.

Предложение 2.12. *Множество точек, с тривиальным стабилизатором не совпадает с $U(\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\Gamma)$.*

Доказательство. Выделим в Γ любой $\mathbb{C}$-базис $\Gamma_I = \{\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_k}\}$. Поскольку это базис, для любого набора комплексных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ существует единственный вектор v, такой, что $\langle \gamma_{i_1}, v \rangle = \alpha_1, \dots, \langle \gamma_{i_k}, v \rangle = \alpha_k$. В частности, можно выбрать ненулевой набор $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{Z}\langle 2\pi i \rangle$, который будет стабилизировать любую точку с $z_j = 0, j \notin I$, $z_j \neq 0, j \in I$. При этом такая точка будет лежать в $U(\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\Gamma))$, поскольку $\widehat{I} \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\Gamma)$. □

3. Вещественная двойственность Гейла

Конфигурация Γ определяет линейное отображение $\mathbb{R}^m \to V^*$, при котором образом стандартного базисного вектора e_i является вектор γ_i. Пусть $W = \operatorname{Ker}\Gamma$, имеем точную последовательность:

$$0 \to W \to \mathbb{R}^m \xrightarrow{\Gamma} V^* \to 0.$$

Пространство W^* имеет вещественную размерность $n := m-2k$. Рассмотрим двойственную точную последовательность:

$$0 \to V \xrightarrow{\Gamma^*} \mathbb{R}^m \xrightarrow{A} W^* \to 0,$$

где Γ^* переводит $v \in V$ в $(\langle\gamma_1, v\rangle_{\mathbb{R}}, ..., (\langle\gamma_m, v\rangle_{\mathbb{R}})$. Пусть $a_i = A(e_i)$. Конфигурация векторов $A = \{a_1, ..., a_m\} \subset \mathrm{W}^*$ назвается *двойственной по Гейлу* для $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_m\}$. Двойственной по Гейлу конфигурацей для A будет конфигурация Γ.

Выберем базисы в V и W. Тогда Γ представляется в виде $2k \times m$-матрицей с векторами $\gamma_1, ..., \gamma_m$ по столбцами, а A представляется в виде $n \times m$-матрицей с векторами $a_1, ..., a_m$ по столбцам. При этом $A\Gamma^* = 0$, то есть строки A образуют базис в пространстве линейных соотношений между $\gamma_1, ..., \gamma_m$, то есть в пространстве W. Можно воспринимать $a_i \in W^*$ как линейную функцию, принимающую на линейном соотношении $w \in W$ значение i-го коэффициента зависимости.

Предложение 3.1. *Для любого $I \subset [m]$, векторы A_I линейно независимы в W^* тогда и только тогда, когда $\langle\Gamma_{\widehat{I}}\rangle_{\mathbb{R}} = V^*$.*

Доказательство. По двойственности Гейла можем воспринимать вектор γ_j как функцию j, принимающую на векторах из V значения j-го коэффициента линейной зависимости между векторами $a_1, ..., a_m$. Если $a_i, i \in I$ линейно независимы, то любое линейное соотношение между $a_1, ..., a_m$ имеет ненулевой j-й коэффициент для некоторого $j \in \widehat{I}$. Значит $\gamma_j \in \widehat{I}$ порождают всё V^*. И наоборот, если есть линейная зависимость между $a_i, i \in I$, то на этой зависимости все $\gamma_j, j \in \widehat{I}$ примут нулевое значение, в таком случае они не порождают всё пространство. $\square$

4. Конусы и вееры

В этом разделе собраны необходимые нам факты о полиэдральных конусах и веерах. Более детальное изложение этих тем можно найти в [4, §1.2, §3.1]

Подмножество σ векторного пространства L называется *строго выпуклым полиэдральным конусом* или просто *конусом*, если оно состоит из линейных комбинаций с неотрицательными коэффициентами конечного набора векторов $v_1, ..., v_p \in L$ и не содержит ни одной прямой. При этом обозначается это следующим образом: $\sigma = \operatorname{Cone}(v_1, ..., v_p)$. Размерностью конуса называется размерность его линейной оболочки.

Векторы $v_1, ..., v_p$ называются *образующими* конуса σ. Минимальный набор векторов, которые являются образующими для конуса определён однозначно с точностью до умножения на положительные числа. Конус *симплициален*, если минимальный набор образующих линейно независим.

Гиперплоскость H называется *опорной гиперплоскостью* конуса $\sigma \subset L$, если σ содержится в одном из замкнутых полупространств, определяемых H. *Гранью* конуса σ называется пересечение σ с опорной гиперплоскостью. Также гранью конуса является он сам, а грани, отличные от σ, называются *собственными*. Конус за вычетом собственных граней образует множество, называемое его *относительной внутренностью* и обозначается $\operatorname{relint}\sigma$.

Введём следующие обозначения для гиперплоскостей и соответствующих им полупространств:

$$H_u = \{l \in L : \langle l, u \rangle = 0\},$$
$$H_u^+ = \{l \in L : \langle l, u \rangle \geq 0\},$$
$$H_u^- = \{l \in L : \langle l, u \rangle \leq 0\}.$$

Для $u = 0$ под H_u понимается всё пространство L.

Предложение 4.1. *Если $\sigma = \operatorname{Cone}(v_1, ..., v_p)$ - конус в L, $v \in \operatorname{relint}\sigma$, тогда и только тогда, когда $v = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i v_i$, где все $\lambda_i \in \mathbb{R}$ положительны.*

Доказательство. Случай $v = 0$ тривиален, будем считать, что $v \neq 0$.

Пусть $v = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i v_i$ и все $\lambda_i > 0$. Предположим $v \notin \operatorname{relint}\sigma$. Тогда v содержится в некоторой собственной грани τ конуса σ, а значит в некоторой опорной гиперплоскости H_u, где $u \in V^*$ такой, что $\sigma \subset H_u^+$ и $v \in H_u \cap \sigma = \tau$. Тогда $\langle u, v \rangle = 0$. С другой стороны $\langle u, v \rangle = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u, v_i \rangle > 0$, поскольку $\langle u, v_i \rangle \geq 0$ и хотя бы для одного i это число положительно так как τ - собственная грань. Противоречие.

Пусть теперь $v \in \operatorname{relint}\sigma$. Легко показать, что для любого вектора $v' \in \sigma$ найдётся вектор $v'' \in \sigma$ такой, что $v' + v'' = \mu v$ для некоторго $\mu > 0$. Для $v = v_i$ получаем v_i'' и $\mu_i > 0$. Записав каждый вектор v_i'' как линейную комбинацию векторов $v_1, ..., v_p$ с неотрицательными коэффициентами, сложив эти комбинации между собой и прибавив сумму $v_1 + ... + v_p$, получаем $\sum\limits_{i=1}^{p} \nu_i v_i = \sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i v$ для некоторых $\nu_i > 0$. Теперь, поделив полученное соотношение на $\sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i$, получаем выражение для v с положительными коэффициентами. $\square$

Приведём без доказательства классическую лемму из выпуклой геометрии.

Лемма 4.2 (Лемма об отделимости)**.** *Для двух разных конусов σ_1 и σ_2 в пространстве L следующие условия эквивалентны:*

(*a*) *Пересечение σ_1 и σ_2 является гранью каждого из них.*

(*b*) *σ_1 и σ_2 разделены гиперплоскостью, то есть существует вектор $u \in L^*$ такой, что*

$$\sigma_1 \subseteq H_u^+, \; \sigma_2 \subseteq H_u^-,$$
$$H_u \cap \sigma_1 = H_u \cap \sigma_1 = \sigma_1 \cap \sigma_2.$$

Веером называется конечный набор конусов $\Sigma = \{\sigma_1, ..., \sigma_s\}$ лежащих в пространстве L такой, что вместе с каждым конусом ему принадлежат все его грани, и любые два конуса из Σ пересекаются по общей грани. Веер называется *полным*, если объединение $|\Sigma|$ всех его конусов совпадает с L и *выпуклым* если это объединение выпукло.

Вернёмся к ситуации, когда есть два двойственных по Гейлу набора векторов $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_m\}$ и $A = \{a_1, ..., a_m\}$ в пространствах V^* и W^*. Набор $\mathcal{C} \subset 2^{[m]}$ называется *A-замкнутым* если для любого $I \in \mathcal{C}$ конус $\mathrm{Cone}(A_I)$ является строго выпуклым, и $J \in \mathcal{C}$ для любого такого $J \subset I$, что $\mathrm{Cone}(A_J)$ является гранью $\mathrm{Cone}(A_I)$. Если $\mathcal{C}$ является A-замкнутым, то набор конусов $\{\mathrm{Cone}(A_I) : I \in \mathcal{K}\}$ вместе с любым конусом содержит все его грани. Приведём теорему, описывающую, при каких условиях этот набор образует веер.

Теорема 4.3. *Пусть $A = \{a_1, ..., a_m\}$ и $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_m\}$ - двойственные по Гейлу конфигурации векторов, а $\mathcal{C}$ - A-замкнутый набор подмножеств $[m]$. Следующие условия эквивалентны:*

(a) $\{\mathrm{Cone}\, A_I : I \in \mathcal{C}\}$ *- веер;*
(b) $(\mathrm{relint}\,\mathrm{Cone}\, A_I) \cap (\mathrm{relint}\,\mathrm{Cone}\, A_J) = \emptyset$ *для любых* $I, J \in \mathcal{C}, I \neq J$*;*
(c) $(\mathrm{relint}\,\mathrm{Cone}\, \Gamma_{\widehat{I}}) \cap (\mathrm{relint}\,\mathrm{Cone}\, \Gamma_{\widehat{J}}) \neq \emptyset$ *для любых* $I, J \in \mathcal{C}$

Доказательство. Импликация (a) $\Rightarrow$ (b) очевидна. Покажем (b) $\Rightarrow$ (a). Возьмём $I, J \in \mathcal{C}$. Положим $X = \mathrm{Cone}\, A_I \cap \mathrm{Cone}\, A_J$. Рассмотрим наименьшую грань $\mathrm{Cone}\, A_I$ которая содержит X. Эта грань есть $\mathrm{Cone}\, A_{I'}$ для некоторого $I' \subseteq I, I' \in \mathcal{C}$. Пусть, аналогично $\mathrm{Cone}\, A_{J'}$ - наименьшая грань $\mathrm{A_J}$, содержащая X. Тогда $\mathrm{relint}\, X \subseteq (\mathrm{relint}\,\mathrm{Cone}\, A_{I'}) \cap (\mathrm{relint}\,\mathrm{Cone}\, A_{J'})$. Из (b) следует, что $\mathrm{relint}\, X$ не пусто только если $I' = J'$. В этом случае $I' \subseteq I \cap J$ и $X \subseteq \mathrm{Cone}\, A_{I'} \subseteq \mathrm{Cone}\, A_{I\cap J}$. С другой стороны, очевидно, $\mathrm{Cone}\, A_{I\cap J} \subseteq X$. Таким образом $\mathrm{Cone}\, A_I \cap \mathrm{Cone}\, A_J = \mathrm{Cone}\, A_{I'} = \mathrm{Cone}\, A_{I\cap J}$ - общая грань конусов $\mathrm{Cone}\, A_I$ и $\mathrm{Cone}\, A_J$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Предположим $\mathrm{relint}\, \Gamma_{\widehat{I}} \cap \mathrm{relint}\, \Gamma_{\widehat{J}} \neq \emptyset$. Согласно 4.1,

$$\sum_{k\in\widehat{I}} r_k\gamma_k - \sum_{l\in\widehat{J}} s_l\gamma_l = 0$$

для некоторых положительных r_k и s_l. Это линейное соотношение определяет вектор $w \in W$ для которого, согласно двойственности Гейла, имеем

$$\langle a_i, w\rangle = \begin{cases} r_i - s_i, & i \in \widehat{I} \cap \widehat{J} = \widehat{I \cup J},\\ r_i, & i \in \widehat{I} \setminus \widehat{J} = J \setminus (I \cap J),\\ -s_i, & i \in \widehat{J} \setminus \widehat{I} = I \setminus (I \cap J),\\ 0, & i \in \widehat{\widehat{I} \cup \widehat{J}} = I \cap J. \end{cases}$$

Из этого следует, что

$$\mathrm{Cone}\, A_J \subseteq H_w^+,\ \mathrm{Cone}\, A_I \subseteq H_w^-,$$
$$\mathrm{Cone}\, A_{I\cap J} = H_w \cap \mathrm{Cone}\, A_I = H_w \cap \mathrm{Cone}\, A_J = \mathrm{Cone}\, A_I \cap \mathrm{Cone}\, A_J.$$

Таким образом, конуса $\mathrm{Cone}\, A_I$ и $\mathrm{Cone}\, A_J$ отделены гиперплоскостью для любых $I, J \in \mathcal{C}$, что и доказывает (a) по лемме 4.2.

(a) $\Rightarrow$ (c). Предположим, пересечение конусов $\mathrm{Cone}\, A_I$ и $\mathrm{Cone}\, A_J$ есть их общая грань. По лемме об отделимости, найдётся H_w их разделяющая. Вектор $w \in W$ для некоторых положительных r_i, s_i удовлетворяет

$$\langle a_i, w\rangle = \begin{cases} r_i - s_i, & i \in \widehat{I} \cap \widehat{J} = \widehat{I \cup J},\\ r_i, & i \in \widehat{I} \setminus \widehat{J} = J \setminus (I \cap J),\\ -s_i, & i \in \widehat{J} \setminus \widehat{I} = I \setminus (I \cap J),\\ 0, & i \in \widehat{\widehat{I} \cup \widehat{J}} = I \cap J. \end{cases}$$

Это даёт нам соотношение $\sum\limits_{k\in\widehat{I}} r_k\gamma_k - \sum\limits_{l\in\widehat{J}} s_l\gamma_l = 0$ из которого следует, что $(\operatorname{relint}\operatorname{Cone}\Gamma_{\widehat{I}}) \cap (\operatorname{relint}\operatorname{Cone}\Gamma_{\widehat{J}}) \neq \emptyset$. □

Веер называется *симплициальным*, если все его конуса симплициальны. Если $\Sigma = \{\operatorname{Cone} A_I : I \in \mathcal{C}\}$ - симплициальный веер, то $\mathcal{C} = \mathcal{K}$ - симплициальный комплекс на $[m]$, и A_I линейно независимы для любого $I \in \mathcal{K}$. В этих условиях можно говорить о том, что пара $\{\mathcal{K}, A\}$ *определяет веер* Σ.

С учётом этой терминологии, переформулируем теорему 4.3 в следующем виде:

Теорема 4.4. *Пусть $\mathcal{K}$ - симплициальный комплекс на $[m]$, $A = \{a_1, ..., a_m\}$ - конфигурация векторов в W^* такая, что для любого $I \in \mathcal{K}$ подмножество A_I линейно независимо, а $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_m\}$ - двойственная по Гейлу конфигурация. Следующие условия эквивалентны:*

(a) *Пара $\{\mathcal{K}, A\}$ определяет веер;*
(b) $(\operatorname{relint}\operatorname{Cone} A_I) \cap (\operatorname{relint}\operatorname{Cone} A_J) = \emptyset$ *для любых $I, J \in \mathcal{K}, I \neq J$;*
(c) $(\operatorname{relint}\operatorname{Cone}\Gamma_{\widehat{I}}) \cap (\operatorname{relint}\operatorname{Cone}\Gamma_{\widehat{J}}) \neq \emptyset$ *для любых $I, J \in \mathcal{K}$.*

Впервые, условие (c) как критерий веера в терминах двойственности Гейла был явно описан в [6]

Заметим, что в случае симплициальных вееров все A_I линейно независимы, поэтому конуса $\Gamma_{\widehat{I}}$ имеют размерность объемлющего пространства V^*, поэтому для них относительная внутренность совпадает с внутренностью.

5. Собственные действия

Непрерывное действие $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto gx$ топологических групп называется *собственным*, если отображение $h : G \times X \to X \times X$, $(g, x) \to (gx, x)$ является собственным, в том смысле что прообраз $h^{-1}(C)$ любого компакта $C \subset X \times X$ компактен.

Собственность действия - ключевое понятие в теории действий некомпактных групп Ли. Во-первых, пространство орбит собственного действия группы Ли на многообразии хаусдорфово. Во-вторых, пространство орбит голоморфного, свободного и собственного действия группы Ли на голоморфном многообразии снова является голоморфным многообразием. Эти результаты можно найти в [5].

В нашем случае собственность описывается комбинаторным условием на конфигурациию векторов.

Теорема 5.1. *Пусть $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_m\}$ - конфигурация векторов в V^*, задающая действие $V \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ по правилу (1), и пусть $A = \{a_1, ..., a_m\}$ - двойственная (вещественно) по Гейлу конфигурация. Пусть $\mathcal{K}$ - симплициальный комплекс на $[m]$ такой, что для любого $I \in \mathcal{K}$ выполнено $\langle\Gamma_{\widehat{I}}\rangle_{\mathbb{R}} = V^*$ (или, эквивалентно A_I - линейно независимая система векторов). Тогда*

(1) ограничение действия $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$ - свободно;
(2) действие $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$ собственно тогда и только тогда, когда выполнено одно из эквивалентных условий (a)-(b) теоремы 4.4.

Доказательство. Первая часть утверждения есть прямое следствие 2.5.

Предположим (c) выполнено. Чтобы увидеть, что действие $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$ собственно, нам необходимо проверить, что если $\{z^{(k)}\}$ - последовательность точек $U(\mathcal{K})$, а $\{v^{(k)}\}$ - последовательность векторов в V такие, что $\{z^{(k)}\}$ и $\{v^{(k)} \cdot z^{(k)}\}$ сходятся в $U(\mathcal{K})$, то из $\{v^{(k)}\}$ можно выделить подпоследовательность, которая сойдётся.

Выделив подпоследовательность, получим, что все последовательности $\mathrm{Re}\langle\gamma_i, v^{(k)}\rangle_{\mathbb{C}},\ i = 1, ..., m$ сходятся в $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R} \cup \pm\infty$. Пусть

$$I_+ = \{i : \lim_{k\to\infty} \mathrm{Re}\langle\gamma_i, v^{(k)}\rangle_{\mathbb{C}} = +\infty\},\ I_- = \{i : \lim_{k\to\infty} \mathrm{Re}\langle\gamma_i, v^{(k)}\rangle_{\mathbb{C}} = -\infty\}.$$

Поскольку $\{z^{(k)}\}$ и $\{w^{(k)} = v^{(k)} \cdot z^{(k)}\}$ сходятся к $z, w \in U(\mathcal{K})$ соответственно, из вида действия следует, что $z_i = 0$ для $i \in I_+$ и $w_i = 0$ для $i \in I_-$. Следовательно, из определения $U(\mathcal{K})$ получаем, что I_+ и I_- - симплексы из $\mathcal{K}$ (не пересекающиеся). Тогда из (c) следует, что

$$(\mathrm{relint}\,\mathrm{Cone}\,\Gamma_{\widehat{I}_+}) \cap (\mathrm{relint}\,\mathrm{Cone}\,\Gamma_{\widehat{I}_-}) \neq \emptyset.$$

Таким образом, для некоторых положительных r_i и s_i выполнено

$$0 = \sum_{i\in\widehat{I}_-} r_i\gamma_i - \sum_{i\in\widehat{I}_+} s_i\gamma_i = \sum_{i\in I_+} r_i\gamma_i - \sum_{i\in I_-} s_i\gamma_i + \sum_{i\notin I_+\sqcup I_-} (r_i - s_i)\gamma_i.$$

Из этого следует, что I_+ и I_- пусты, так как иначе

$$0 = \lim_{k\to\infty}\Big(\sum_{i\in I_+} r_i\,\mathrm{Re}\langle\gamma_i, v^{(k)}\rangle_{\mathbb{C}} - \sum_{i\in I_-} s_i\,\mathrm{Re}\langle\gamma_i, v^{(k)}\rangle_{\mathbb{C}} +$$

$$+ \sum_{i\notin I_+\sqcup I_-} (r_i - s_i)\,\mathrm{Re}\langle\gamma_i, v^{(k)}\rangle_{\mathbb{C}}\Big) = +\infty.$$

Таким образом, все последовательности $\mathrm{Re}\langle\gamma_i, v^{(k)}\rangle_{\mathbb{C}}$ имеют конечный предел.

Пусть $I = \{i : z_i \neq 0\}$, где $z = (z_1, ..., z_m) = \lim_{k\to\infty} z^{(k)}$. Выделяя подпоследовательность, можем считать, что все $z_i^{(k)} \neq 0$ для $i \in I$. Покажем, что последовательности мнимых частей $\mathrm{Im}\langle\gamma_i, v^{(k)}\rangle_{\mathbb{C}}, i \in I$ имеют конечные пределы. Для начала заметим, что по модулю 2π они все имеют предел, так как предел имеет $e^{\langle\gamma_i, v^{(k)}\rangle_{\mathbb{C}}}$ для всех $i \in I$. Полагая $v^{(0)} = 0$, рассмотрим последовательность векторов $w^{(k)} = v^{(k)} - v^{(k-1)},\ k \geq 1$. Эта последовательность обладает следующими свойствами:

(1) Последовательности действительных частей $\mathrm{Re}\langle\gamma_i, w^{(k)}\rangle_{\mathbb{C}}$ для всех i (в частности для $i \in I$) имеют пределы равные 0;

(2) $v^{(k)} = \sum\limits_{j=1}^{k} w^{(k)}$.

Пусть $V_i = \{u \in V : \mathrm{Re}\langle\gamma_i, u\rangle_{\mathbb{C}} = 0\}$. Первое условие означают, что расстояние $\mathrm{dist}(w^{(k)}, V_i)$ стремится к нулю для всех $i \in I$. Заметим, что $\widehat{I} \in \mathcal{K}$, так как $z \in U(\mathcal{K})$, поэтому Γ_I содержит $\mathbb{R}$-базис пространства V^*. Это значит, что $\bigcap\limits_{i\in I} V_i = \{0\}$, так как существование в этом пересечении ненулевого вектора l означало бы, что $\mathrm{Re}\langle\gamma_i, l\rangle_{\mathbb{C}} = 0$ для всех $i \in I$ и все векторы $\gamma_i, i \in I$ содержатся в некоторой вещественной гиперплоскости. Следовательно, $\lim\limits_{k\to 0} w^{(k)} = 0$.

Возвращаясь к векторам $v^{(k)}$ получаем, что для всех $i \in I$ последовательность

$\mathrm{Im}\langle\gamma_i, v^{(k)}\rangle_{\mathbb{C}}$ является последовательностью частичных сумм для вещественного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{Im}\langle\gamma_i, w^{(k)}\rangle_{\mathbb{C}}$. Члены ряда стремятся к нулю, а последовательность частичных сумм имеет предел по модулю 2π. Легко видеть, что в таком случае ряд сходится. Поэтому для $i \in I$ все последовательности $\mathrm{Im}\langle\gamma_i, v^{(k)}\rangle_{\mathbb{C}}$ имеют конечный предел. Значит конечный предел имеют и последовательности $\langle\gamma_i, v^{(k)}\rangle_{\mathbb{C}}, i \in I$. Поскольку Γ_I содержит $\mathbb{R}$-базис, векторы γ_i для $i \in \widehat{I}$ выражаются с вещественными коэффициентами через векторы $\gamma_i, i \in I$, а значит и каждая из последовательностей $\langle\gamma_i, v^{(k)}\rangle_{\mathbb{C}}, i \in \widehat{I}$ является линейной комбинацией последовательностей $\langle\gamma_i, v^{(k)}\rangle_{\mathbb{C}}, i \in I$, то есть тоже имеет конечный предел.

Итак, для всех $i \in I$ последовательности $\langle\gamma_i, v^{(k)}\rangle_{\mathbb{C}}$ имеют конечный предел в $\mathbb{C}$. Из этого следует, что $\{v^{(k)}\}$ сходится в V^*, поскольку $\gamma_1, ..., \gamma_m$ порождают всё пространство V^*, таким образом, собственность отображения доказана.

Теперь предположим, что условие (b) теоремы 4.4 не выполнено. Тогда

$$(\mathrm{relint\,Cone}\, A_I) \cap (\mathrm{relint\,Cine}\, A_J) \neq \emptyset$$

для некоторых $I, J \in \mathcal{K},\ I \neq J$. Тогда $I \cup J \notin \mathcal{K}$, так как иначе $\mathrm{Cone}\, A_I$ и $\mathrm{Cone}\, A_J$ являются гранями конуса $\mathrm{Cone}\, A_{I\cup J}$, и пересечение их относительных внутренностей пусто. Получаем

$$0 = \sum_{i\in I} r_i a_i - \sum_{i\in J} s_i a_i = \sum_{i\in I\setminus J} r_i a_i - \sum_{i\in J\setminus I} s_i a_i + \sum_{i\in I\cap J} (r_i - s_i) a_i$$

для некоторых положительных r_i и s_i.

По двойственности Гейла, это линейное между $a_1, ..., a_m$ даёт вектор $v \in V$, для которого выполнено:

$$\langle\gamma_i, v\rangle_{\mathbb{R}} = \begin{cases} r_i - s_i, & i \in I \cap J, \\ r_i, & i \in I \setminus J, \\ -s_i, & i \in J \setminus I, \\ 0. & i \notin I \cup J. \end{cases}$$

Заметим, что для комплексного векторного пространства $L_{\mathbb{C}}$ и овеществления $L_{\mathbb{R}}$ можно произвести отождествление двойственных пространств $L_{\mathbb{C}}^*$ и $L_{\mathbb{R}}^*$ так, что связь между спариваниями описывается формулой:

$$\mathrm{Re}\langle\gamma_i, v\rangle_{\mathbb{C}} = \langle\gamma_i, v\rangle_{\mathbb{R}}.$$

При таком отождествлении, верно следующее:

$$\mathrm{Re}\langle\gamma_i, v\rangle_{\mathbb{C}} = \begin{cases} r_i - s_i, & i \in I \cap J, \\ r_i, & i \in I \setminus J, \\ -s_i, & i \in J \setminus I, \\ 0. & i \notin I \cup J. \end{cases}$$

Рассмотрим последовательность точек $\{z^{(k)}\} \in \mathbb{C}^m$ с координатами:

$$z_i^{(k)} = \begin{cases} 0, & i \in I \cap J, \\ e^{-k\langle\gamma_i, v\rangle_{\mathbb{C}}}, & i \in I \setminus J, \\ 1, & i \notin I \end{cases} = \begin{cases} 0, & i \in I \cap J, \\ e^{-kr_i - ik\,\mathrm{Im}\langle\gamma_i, v\rangle_{\mathbb{C}}}, & i \in I \setminus J, \\ 1, & i \notin I. \end{cases}$$

Заметим что $\lim\limits_{k\to\infty} z^{(k)} = z$, где

$$z_i = \begin{cases} 0, & i \in I, \\ 1, & i \notin I, \end{cases}$$

и все $z^{(k)}$ и z лежат в $U(\mathcal{K})$. Пусть теперь $v^{(k)} = kv$ и $w^{(k)} = v^{(k)} \cdot z^{(k)}$, тогда

$$w_i^{(k)} = e^{k\langle\gamma_i, v\rangle_{\mathbb{C}}} z_i^{(k)} = \begin{cases} 0, & i \in I \cap J, \\ 1, & i \in I \setminus J, \\ e^{k\langle\gamma_i, v\rangle_{\mathbb{C}}}, & i \notin I \end{cases} = \begin{cases} 0, & i \in I \cap J, \\ e^{-ks_i - ik\,\mathrm{Im}\langle\gamma_i, v\rangle_{\mathbb{C}}}, & i \in J \setminus I, \\ 1, & i \notin J, \end{cases}$$

и имеем $\lim\limits_{k\to\infty} w^{(k)} = w$, где

$$w_i = \begin{cases} 0, & i \in J, \\ 1, & i \notin J. \end{cases}$$

Таким образом и $y^{(k)}$ и y лежат в $U(\mathcal{K})$. С другой стороны, из $v^{(k)}$ сходящейся подпоследовательности выделить нельзя, следовательно действие $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$ не является собственным. $\square$

6. Компактность

Пусть данные $\{\mathcal{K}, a_1, ..., a_m\}$, где $A = \{a_1, ..., a_m\}$ - двойственная по Гейлу к задающей действие конфигурации Γ, а $\mathcal{K}$ - симплициальный комплекс, задают симплициальный веер $\Sigma = \{\sigma_1, ..., \sigma_s\}$ в пространстве W^*. Тогда, согласно теореме 5.1, ограничение действия на $U(\mathcal{K}) \subset \mathbb{C}^m$ свободно и собственно. Для пространства орбит действия V на $U(\mathcal{K})$ сформулируем критерий компактности.

Теорема 6.1. *Пространство орбит $U(\mathcal{K})/V$ компактно тогда и только тогда, когда веер Σ полный.*

Предположим веер является полным. $U(\mathcal{K})/V$ метризуемо, следовательно достаточно показать, что из любой последовательности точек $U(\mathcal{K})/V$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Возьмём последовательность точек $U(\mathcal{K})/V$ и пусть $\{z^{(n)}\} = \{(z_1^{(n)}, ..., z_m^{(n)}) \in U(\mathcal{K})\}$ - некоторое её поднятие в $U(\mathcal{K})$. Идея доказательства заключается в том, чтобы заменить $z^{(n)}$ на $\{\widetilde{z}^{(n)}\}$ так, что $z^{(n)}$ и $\widetilde{z}^{(n)}$ принадлежат к одной орбите действия V для всех $n = 1, 2, ...$, и показать, что из $\{\widetilde{z}^{(n)}\}$ выделяется сходящаяся подпоследовательность в $U(K)$. Тогда её проекция на $U(\mathcal{K})/V$ будет искомой подпоследовательностью исходной последовательности.

Переходя к подпоследовательности можем считать, что для всех n множество $J \subset [m]$ нулевых координат $z^{(n)}$ одинаково, то есть $z_j^{(n)} = 0$ для всех $j \in J$ и для всех n, а также $z_j^{(n)} \neq 0$ для всех $j \notin J$ и для всех n.

Далее будем вести индукцию по $\dim W^*$. Поскольку $\{\mathcal{K}, a_1, ..., a_m\}$ задаёт одномерный полный веер, $\mathcal{K}$ имеет как минимум две (не призрачные) вершины. Есть только один полный одномерный веер ($\mathcal{K} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$), так что в этом случае теорема верна.

Пусть $J \neq \emptyset$, тогда $(v \cdot z^{(n)})_j = 0$ для всех $j \in J, v \in V$ и $n = 1, 2, ...$ Рассмотрим подкомплекс комплекса $\mathcal{K}$, называемый линком - $\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\, J = \{I \in \mathcal{K} : I \cup J \in$

$\mathcal{K}, I \cap J = \emptyset\}$. Тогда $\{\mathrm{link}_{\mathcal{K}} J, a_j : j \notin J\}$ определяют полный веер в пространстве $W^*/\langle a_j : j \in J\rangle$, имеющий размерность меньше W^*. По предположению индукции, из последовательности выделяется сходящаяся подпоследовательность.

Таким образом, можем предположить, что $J = \emptyset$, то есть $z_j^{(n)} \neq 0$ для всех $n = 1, 2, ...$ и $j \in [m]$.

Для $z = (z_1, ..., z_m) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^m$ положим:

$$l(z) = \sum_{i=1}^{m} a_i \log |z_i| \in W^*.$$

Для любого вектора $v \in V$ имеет место:

$$l(v \cdot z) = \sum_{i=1}^{m} a_i \log |e^{\langle \gamma_i, v\rangle_{\mathbb{C}}} z_i| = \sum_{i=1}^{m} a_i \log e^{\mathrm{Re}\langle \gamma_i, v\rangle_{\mathbb{C}}} |z_i|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i \log e^{\langle \gamma_i, v\rangle_{\mathbb{R}}} |z_i| = \sum_{i=1}^{m} a_i \langle \gamma_i, v\rangle_{\mathbb{R}} + \sum_{i=1}^{m} a_i \log |z_i| = \sum_{i=1}^{m} a_i \log |z_i| = l(z),.$$

Теперь для последовательности $z^{(n)}$ рассмотрим $-l(z^{(n)}) \in W^*$. Поскольку веер полный, найдётся $I \in \mathcal{K}$ с $|I| = \dim W^*$ такой, что для бесконечного числа элементов последовательности $-l(z^{(n)})$ окажутся в $\mathrm{Cone}\, A_I$. Переходя к подпоследовательности, можем считать, что $-l(z^{(n)}) \in \mathrm{Cone}\, A_I$ для всех n.

Согласно 3.1, набор векторов $\Gamma_{\widehat{I}}$ - базис (их ровно $2k$, так как $|I| = \dim W^*$), поэтому найдутся такие векторы $v^{(n)} \in V$, что:

$$\langle \gamma_i, v^{(n)}\rangle_{\mathbb{R}} = -\log |z_i^{(n)}|, i \notin I.$$

Положим

$$\widetilde{z}^{(n)} = v^{(n)} z^{(n)},$$

тогда

$$|\widetilde{z}^{(n)}| = |e^{\langle \gamma_i, v^{(n)}\rangle_{\mathbb{C}}} z_i^{(n)}| = |e^{\mathrm{Re}\langle \gamma_i, v^{(n)}\rangle_{\mathbb{C}}}||z_i^{(n)}| = |e^{\langle \gamma_i, v^{(n)}\rangle_{\mathbb{R}}}||z_i^{(n)}| = 1, i \notin I,$$

и

$$\sum_{i \in I} a_i \log |\widetilde{z}_i^{(n)}| = l(\widetilde{z}^{(n)}) = l(z^{(n)}) \in -\mathrm{Cone}\, A_I.$$

То есть $\log |\widetilde{z}^{(n)}| \leq 0$ для всех $i \in [m]$ и n. Таким образом, $\{\widetilde{z}^{(n)}\}$ ограниченая последовательность, поэтому в $\mathbb{C}^m$ из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Поскольку $|\widetilde{z}^{(n)}| = 1$ для $i \notin I$ предел z может иметь нулевые координаты z_i только для $i \in I$, поэтому предел лежит в $U(\mathcal{K})$, как мы этого и хотели.

Теперь пусть $U(\mathcal{K})$ компактно. Возьмём вектор $a \in W^*$. Чтобы доказать полноту веера, надо показать, что вектор a содержится в некотором конусе из Σ. Запишем

$$a = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Re}(\alpha_i) a_i, \ \alpha_i \in \mathbb{C},$$

и рассмотрим

$$(e^{\alpha_1 t}, ..., e^{\alpha_m t}) \in U(\mathcal{K}).$$

Коэффициенты α_i определены с точностью до $\langle \gamma_i, v\rangle_{\mathbb{C}}$, где $v \in V$, это отвечает изменению $(e^{\alpha_1 t}, ..., e^{\alpha_m t})$ в рамках орбиты. Поскольку $U(\mathcal{K})/V$ компактно, существует такой выбор коэффициентов α_i, что $\lim\limits_{t \to -\infty} (e^{\alpha_1 t}, ..., e^{\alpha_m t})$ определён в $U(\mathcal{K})$. Это возможно только при неотрицательных $\operatorname{Re}\alpha_i$ и при условии, что $I = \{i : \operatorname{Re} a_i > 0\} \in \mathcal{K}$. Тогда $a \in \operatorname{Cone} A_I$, как это и требовалось.

7. Выводы

Как мы видим, большая часть формулировок, по сравнению с вещественной ситуацией, остаются без изменений. Главным отличием становится более тонкая природа множества невырожденных орбит. В вещественном случае орбита точки x свободна тогда и только тогда, когда для $I = \{i : x_i = 0\}$ множество векторов $\Gamma_{\widehat{I}}$ порождает всё V^*. Как мы установили в разделе 2, порождение всего V^* вещественными коэффициентами, будучи достаточным условием, не является необходимым, а порождение комплексными коэффициентами всего V^*, наоборот, является необходимым, но не достаточным. При этом остальные теоремы, касающиеся топологии действия, остаются в силе и претерпевают изменения лишь в части доказательств, и связи

$$\text{Условие веера} \longleftrightarrow \text{Собственность действия}$$
$$\text{Полнота веера} \longleftrightarrow \text{Компактность пространства орбит}$$

сохранены.

Список литературы

[1] Panov, Taras. *Foliations arising from configurations of vectors, Gale duality, and moment-angle manifolds.* In preparation, 2021.

[2] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Toric topology.* Mathematical Surveys and Monographs, 204. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[3] Ishida, Hiroaki; Krutowski, Roman; Panov, Taras. *Basic cohomology of canonical holomorphic foliations on complex moment-angle manifolds.* International Mathematics Research Notices, 2020.

[4] Cox, David; Little, John; Schenck, Hal. *Toric Varieties.* Graduate Studies in Mathematics, 124. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[5] Lee John M. *Introduction to smooth manifolds.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 218. Sptinger, New York, 2013.

[6] Arzhantsev, Ivan; Derenthal, Ulrich; Hausen, Jürgen; Laface, Antonio. *Cox rings.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 144. Cambridge University Press, Cambridge, 2015.