Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова

Механико - математический факультет, 4 курс.
Кафедра Высшей Геометрии и Топологии

Каргапольцева Анастасия Игоревна
Курсовая работа

# Эффективные действия тора на гиперповерхностях Милнора.

Научный руководитель - Тарас Евгеньевич Панов

Москва
2018 г.

## 1. Постановка задачи и предварительные сведения

В данной работе рассматриваются гиперповерхности Милнора $H_{ij}$ и ставятся следующие вопросы:

(1) Какова максимальная размерность тора $T^k$, действующего эффективно на $H_{ij}$?
(2) Как описать образ отображения моментов для этого действия?

Определим гиперповерхность Милнора $H_{ij}$. Пусть $[z_0 : ... : z_i]$ – однородные координаты на пространстве $\mathbb{C}P^i$, $[w_0 : ... : w_j]$ – однородные координаты на $\mathbb{C}P^j$. Тогда положим

$$H_{ij} = \{[z_0 : ... : z_i] \times [w_0 : ... : w_j] \in \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j : \sum_{k=0}^{min(i,j)} z_k w_k = 0\}.$$

Предположим, что $i \leqslant j$ и $\mathbb{C}^{i+1} \subseteq \mathbb{C}^{j+1}$ – вложение по первым $(i+1)$ координатам. Тогда гиперповерхность $H_{ij}$ можно также представлять как множество пар

$$H_{ij} = \{(l, U) : l \text{ – прямая в } \mathbb{C}^{i+1}, U \text{ – гиперплоскость в } \mathbb{C}^{j+1} \text{ и } l \subset U\}. \tag{1.1}$$

В этой работе мы покажем, что на $H_{ij}$ существует эффективное гамильтоново действие тора $T^j$.

## 2. Описание действия тора $T^j$ на $H_{ij}$

Рассмотрим стандартное действие тора $T^j$ на $\mathbb{C}^{j+1}$:

$$(t_1, ...t_j)(x_0, ..., x_j) = (x_0, x_1 t_1, ..., x_j t_j).$$

Оно индуцирует действие на прямых в $\mathbb{C}^{i+1} \subseteq \mathbb{C}^{j+1}$

$$[z_0 : ... : z_i] \to [z_0 : t_1 z_1 : ... : t_i z_i]$$

и на гиперплоскостях

$$[w_0 : ... : w_j] \to [w_0 : t_1^{-1} w_1 : .. : t_j^{-1} w_j].$$

Тогда, рассматривая $H_{ij}$ как множество пар $(l, U)$ (см. 1.1), получаем действие $T^j$ на $H_{ij}$:

$$(t_1, ...t_j)([z_0 : ... : z_i], [w_0 : ... : w_j]) = ([z_0 : t_1 z_1 : ... : t_i z_i], [w_0 : t_1^{-1} w_1 : .. : t_j^{-1} w_j]).$$

Действие тора $T^j$ на $\mathbb{C}P^i$ вида

$$(t_1, ...t_j)[z_0 : ... : z_i] = [z_0 : t_1 z_1 : ... : t_i z_i]$$

получается из действия тора $T^i$ на $\mathbb{C}P^i$ ограничением на первые $(i+1)$ координаты. Такое действие гамильтоново с отображением моментов $\mu_1 : \mathbb{C}P^i \to \mathbb{R}^j$, заданным в однородных координатах следующим образом:

$$\mu_1([z_0 : ... : z_i]) = -\frac{1}{2} \left( \frac{|z_1|^2}{\sum_{k=0}^i |z_k|^2}, ..., \frac{|z_i|^2}{\sum_{k=0}^i |z_k|^2}, 0, ..., 0 \right).$$

Действие тора $T^j$ на $\mathbb{C}P^j$ вида

$$(t_1, ...t_j)([w_0 : ... : w_j]) = ([w_0 : t_1^{-1} w_1 : ... : t_j^{-1} w_j])$$

также является гамильтоновым с отображением моментов $\mu_2 : \mathbb{C}P^j \to \mathbb{R}^j$, заданным в однородных координатах следующим образом:

$$\mu_2([w_0 : ... : w_j]) = -\frac{1}{2} \left( \frac{|w_1|^2}{\sum_{k=0}^j |w_k|^2}, ..., \frac{|w_j|^2}{\sum_{k=0}^j |w_k|^2} \right).$$

**Лемма 1.** *Предположим, что группа Ли $G$ действует гамильтоново на двух симплектических многообразия $(M_j, \omega_j)$, $j = 1, 2$, с отображениями моментов $\mu_j : M_j \to \mathfrak{g}^*$. Тогда на $M_1 \times M_2$ возникает симплектическая структура $\omega$ и диагональное действие $G$ на $(M_1 \times M_2, \omega)$ гамильтоново с отображением моментов $\mu : M_1 \times M_2 \to \mathfrak{g}^*$ вида:*

$$\mu(p_1, p_2) = \mu_1(p_1) + \mu_2(p_2), \text{ для } p_j \in M_j, j = 1, 2.$$

Из Леммы 1 следует тот факт, что построенное в начале пункта 2 действие гамильтоново с отображением моментов $\mu : \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j \to \mathbb{R}^j$, где $\mu$ есть вектор функция

$$\mu = (\mu_1^1 - \mu_2^1, ..., \mu_1^i - \mu_2^i, -\mu_2^{i+1}, ..., -\mu_2^j).$$

Отображение моментов $\mu$, записанное в однородных координатах, будет иметь вид:

$$\mu([z_0 : ... : z_i], [w_0 : ... : w_j]) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{|z_1|^2}{\sum_{k=0}^i |z_k|^2} - \frac{|w_1|^2}{\sum_{k=0}^j |w_k|^2}, ..., \frac{|z_i|^2}{\sum_{k=0}^i |z_k|^2} - \frac{|w_i|^2}{\sum_{k=0}^j |w_k|^2}, -\frac{|w_{i+1}|^2}{\sum_{k=0}^j |w_k|^2}, ..., -\frac{|w_j|^2}{\sum_{k=0}^j |w_k|^2}\right).$$

Перейдем теперь к описанию образов отображения моментов для построенного действия.

## 3. Описание образа отображения моментов для действия тора $T^j$ на $H_{ij}$

Поскольку построенное действие $T^j$ на $H_{ij}$ гамильтоново, то из теоремы Атьи и Гийемина-Стернберга (о выпуклости образа отображения моментов, см. [2, Theorem 1]) образом гиперповерхности Милнора $H_{ij}$ является выпуклая оболочка образов неподвижных точек этого действия. Неподвижными точками данного действия являются точки вида

$$([0 : ... : 1 : .. : 0], [0 : ... : 1 : .. : 0]),$$

где единицы стоят на $k$ и $l$ месте (на всех остальных местах стоят нули), причем $k = 0, ..., i; l = 0, ..., j$ и $k \neq l$. Таким образом, всего имеется $(ij+j)$ неподвижных точек.

Рассмотрим образ $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$ при отображении $\mu$. Из явного вида $\mu$ получаем, что образом будет выпуклый многогранник, который есть сумма Минковского $j$-мерного симплекса $\triangle^j$ (образ $\mathbb{C}P^j$ при $\mu_2$) и минус $i$-мерного симплекса $\triangle^i$ (образ $\mathbb{C}P^i$ при $\mu_1$). Тогда $\mu(H_{ij}) \subseteq \triangle^j - \triangle^i$. Но поскольку $\mu(H_{ij})$ является выпуклым многогранником, содержащим образы неподвижных точек действия $T^j$ на $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$, то $\mu(H_{ij})$ в точности совпадает с $\triangle^j - \triangle^i$.

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 2.** Опишем действие тора $T^2$ на $H_{22}$. Тор $T^2$ действует следующим образом:

$$(t_1, t_2)([z_0 : z_1 : z_2], [w_0 : w_1 : w_2]) = ([z_0 : t_1 z_1 : t_2 z_2], [w_0 : t_1^{-1} w_1 : t_2^{-1} w_2]).$$

Отображение моментов имеет вид:

$$\mu([z_0 : z_1 : z_2], [w_0 : w_1 : w_2]) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{|z_1|^2}{\sum_{k=0}^2 |z_k|^2} - \frac{|w_1|^2}{\sum_{k=0}^2 |w_k|^2}, \frac{|z_2|^2}{\sum_{k=0}^2 |z_k|^2} - \frac{|w_2|^2}{\sum_{k=0}^2 |w_k|^2}\right).$$

Данное действие имеет 6 неподвижных точек:

$$([1:0:0],[0:1:0]) \to (\frac{1}{2},0),\ ([1:0:0],[0:0:1]) \to (0,\frac{1}{2}),$$

$$([0:1:0],[1:0:0]) \to (-\frac{1}{2},0),\ ([0:1:0],[0:0:1]) \to (-\frac{1}{2},\frac{1}{2}),$$

$$([0:0:1],[1:0:0]) \to (0,-\frac{1}{2}),\ ([0:0:1],[0:1:0]) \to (\frac{1}{2},-\frac{1}{2}).$$

Получаем, что образом $H_{22}$ при отображении $\mu$ будет выпуклая оболочка этих точек – шестиугольник.

**Пример 3.** Опишем действие тора $T^j$ на $H_{1j}$. Тор $T^j$ действует следующим образом:

$$(t_1,...,t_j)([z_0:z_1],[w_0:...:w_j]) = ([z_0:t_1z_1],[w_0:t_1^{-1}w_1:...:t_j^{-1}w_j]).$$

Отображение моментов имеет вид:

$$\mu([z_0:z_1],[w_0:...:w_j]) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{|z_1|^2}{\sum_{k=0}^{1}|z_k|^2} - \frac{|w_1|^2}{\sum_{k=0}^{j}|w_k|^2}, -\frac{|w_2|^2}{\sum_{k=0}^{j}|w_k|^2}, ..., -\frac{|w_j|^2}{\sum_{k=0}^{j}|w_k|^2}\right).$$

Образ $H_{1j}$ при отображении $\mu$ комбинаторно устроен как $\triangle^1 \times \triangle^{j-1}$. Например, при $j=1$ образом будет отрезок, при $j=2$ – трапеция, при $j=3$ – сдвинутая треугольная призма (две ее боковые стороны имеют вид прямоугольных трапеций).

Таким образом заключаем, что существует эффективное действие тора $T^k$ на $H_{ij}$ при $k=j$. Покажем, что $k \leqslant i+j-2$ (для $i \geqslant 2$), то есть что не существует эффективного действия $T^{i+j-1}$ на $H_{ij}$. Для обоснования этого факта потребуется описание кольца когомологий гиперповерхностей Милнора $H_{ij}$ и квазиторических многообразий.

## 4. Описание кольца когомологий $H_{ij}$

**Теорема 4** (см. [1], Теорема 6.46)**.** *Кольцо когомологий гиперповерхности $H_{ij}$ задается следующим образом:*

$$H^*(H_{ij}) \cong \mathbb{Z}[u,v] \Big/ \left(u^{i+1}=0, v^{j-i}\sum_{k=0}^{i}u^k v^{i-k}=0\right),$$

*где $deg\, u = deg\, v = 2$.*

## 5. Описание кольца когомологий квазиторического многообразия

**Определение 5.** Пусть $P$ – комбинаторный простой многогранник размерности $n$. Квазиторическим многообразием над $P$ называется $2n$-мерное многообразие $M$ с действием тора $T^n$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

(1) действие тора является локально стандартным;
(2) существует проекция $\pi : M \to P$, слоями которой являются орбиты действия тора $T^n$.

Пусть $M$ – квазиторическое многообразие. Предположим, что $F_1, ..., F_m$ – гиперграни многогранника $P$. Для любой гиперграни $F_i$ прообраз $\pi^{-1}(int\, F_i)$ состоит из орбит коразмерности один, имеющих одну и ту же одномерную стационарную подгруппу $T(F_i)$. $\pi^{-1}(F_i)$ называется характерестическим подмногообразием и обозначается $M_i$. Соответствие

$$l : F_i \to T(F_i)$$

называется характеристическим отображением квазиторического многообразия $M$.

Подгруппа $T(F_i) \subset T^n$ задается целочисленным вектором $\lambda_i = (\lambda_{1i}, ..., \lambda_{ni})$, $i = 1, ..., m$, который определен с точностью до знака. Выбор знака соответствует выбору ориентации для $T(F_i)$. Введем линейные формы

$$\theta_i = \lambda_{i1} v_1 + ... + \lambda_{im} v_m \in \mathbb{Z}[v_1, ..., v_m], i = 1, ..., n.$$

Образы этих линейных форм в $\mathbb{Z}[P]$ будем обозначать теми же символами. Пусть $\mathscr{J}_l$ обозначает идеал в кольце $\mathbb{Z}[P]$, порожденный элементами $\theta_1, ..., \theta_n$.

**Теорема 6** (Дэвис-Янушкиевич, см. [1], Теорема 6.24)**.** *Имеет место изоморфизм колец*

$$H^*(M) \cong \mathbb{Z}[v_1, ...v_m]/(\mathscr{I}_P + \mathscr{J}_l) = \mathbb{Z}[P]/\mathscr{J}_l,$$

*где $v_i$ - двумерный класс когомологий, двойственный подмногообразию $M_i$ (с выбранной ориентацией), $i = 1, ...m$.*

## 6. Отсутствие эффективного действия тора $T^{i+j-1}$ на $H_{ij}$

Следствием теорем пунктов 4 и 5 является следующий результат

**Теорема 7** (см. [1], Теорема 6.47)**.** *$H_{ij}$ не является квазиторическим многообразием при $i > 1$.*

Таким образом, при $i > 1$ на $H_{ij}$ не существует эффективного действия тора $T^{i+j-1}$. Следовательно было получено следующее ограничение на размерность эффективного действия тора $T^k$ на $H_{ij}$:

$$j \leqslant k \leqslant i + j - 2,$$

при $i \geqslant 2$.

Видно, что для $i = 2$ получен полный ответ: максимальный тор, действующий эффективно на $H_{2j}$, это тор $T^j$.

Полученное ограничение на размерность тора $T^k$ сверху верно только при $i \geqslant 2$. Возникают следующие вопросы:

(1) какое ограничение на $k$ сверху можно получить в случае $i = 1$?
(2) как устроено многообразие $H_{1j}$?

Понятно, что на $H_{1j}$ не существует эффективного действия тора $T^{j+1}$. То есть, описанное в пункте 2 действие тора $T^j$ является максимальным. Явный вид действия $T^j$ на $H_{1j}$ и отображения моментов описан в примере 3. Перейдем к рассмотрению второго вопроса.

## 7. Как устроено торическое многообразие $H_{1j}$?

Рассмотрим следующую конструкцию

*Конструкция* 8. Отождествим пространство $\mathbb{C}P^i$ с множеством прямых $l \subset \mathbb{C}^{i+1}$. Каждой прямой $l$ сопоставим множество гиперплоскостей $\alpha \subset \mathbb{C}^{j+1}$, содержащих $l$. Это множество отождествляется с $\mathbb{C}P^{j-1}$. Рассмотрим пространство пар $E = \{(l, \alpha) : l \subset \alpha\}$. Проекция $(l, \alpha) \to l$ определяет расслоение $E \to \mathbb{C}P^i$ со слоем $\mathbb{C}P^{j-1}$.

Нетрудно заметить (см. 1.1), что гиперповерхность Милнора $H_{ij}$ отождествляется с пространством $E$ из предыдущей конструкции. Таким образом, определено расслоение $H_{ij} \to \mathbb{C}P^i$ со слоем $\mathbb{C}P^{j-1}$.

*Замечание* 9. Можно показать, что поверхность, задаваемая в $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2$ уравнением $z_0^k w_0 = z_1^k w_1$ является поверхностью Хирцебруха $\mathscr{H}_k$. В силу определения гиперповерхностей Милнора, отмечаем, что $H_{12}$ является поверхностью Хирцебруха $\mathscr{H}_1$.

## Список литературы


[1] Бухштабер В. М; Панов Т. Е. *Торические действия в топологии и комбинаторике.* Издательство МЦНМО, 2004.

[2] Atiyah, M. F. *Convexity and commuting hamiltonians.* Bulletin of the London Math. Soc., 1982.