Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова
Механико - математический факультет, 5 курс.
Кафедра Высшей Геометрии и Топологии

Каргапольцева Анастасия Игоревна
Курсовая работа

Описание колец эквивариантных когомологий гиперповерхностей Милнора.

Научный руководитель – Тарас Евгеньевич Панов

Москва
2019 г.

1. Постановка задачи

В данной работе рассматриваются гиперповерхности Милнора H_{ij} и осуществляется вычисление колец эквивариантных когомологий относительно действия компактного тора T^2 для H_{22} и T^j для H_{1j}, где $j \geqslant 1$.

Определим гиперповерхности Милнора H_{ij}. Пусть $[z_0 : ... : z_i]$ – однородные координаты на пространстве $\mathbb{C}P^i$, $[w_0 : ... : w_j]$ – однородные координаты на $\mathbb{C}P^j$. Тогда положим

$$H_{ij} = \{[z_0 : ... : z_i] \times [w_0 : ... : w_j] \in \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j : \sum_{k=0}^{min(i,j)} z_k w_k = 0\}.$$

На протяжении всей работы мы будем считать, что $i \leqslant j$. Кроме того, действие алгебраического тора $C^j = (\mathbb{C}^*)^j$ мы определим следующим образом:

$$(t_1, ...t_j)([z_0 : ... : z_i], [w_0 : ... : w_j]) = ([z_0 : t_1 z_1 : ... : t_i z_i], [w_0 : t_1^{-1} w_1 : .. : t_j^{-1} w_j]).$$

И будем рассматривать эквивариантные когомологии H_{ij} относительно действия компактного подтора $T^j = (\mathbb{S}^1)^j$. Подробное описание данного действия, соответствующего отображения моментов, а также его образа, можно найти в [3].

2. Описание образующих кольца эквивариантных когомологий

Рассмотрим универсальное расслоение для $T = (\mathbb{S}^1)^j$:

$$ET \xrightarrow{T} BT = (ET/T).$$

Напомним, что ET – стягиваемое пространство со свободным действием тора T, а $BT = (\mathbb{C}P^\infty)^j$ есть классифицирующее пространство для T. Тогда имеется расслоение

$$\begin{array}{c} H_{ij} \times_T ET \\ {\scriptstyle H_{ij}}\Big\downarrow \\ BT, \end{array}$$

где тотальное пространство есть пространство со свободным диагональным действием тора T и $H_{ij} \times_T ET = (H_{ij} \times ET)/T$. Тогда кольцо эквивариантных когомологий $H^*_T(H_{ij}) = H^*(H_{ij} \times_T ET)$.

Рассмотрим второй лист E_2 спектральной последовательности, соответствующей данному расслоению. В силу того, что нечетномерные группы когомологий H_{ij} и $(\mathbb{C}P^\infty)^j$ равны нулю, спектральная последовательность вырождается в члене E^2, то есть $E^2 = E^\infty$ (напомним, что это свойство называется эквивариантной формальностью). Значит $H^*_T(H_{ij})$ есть свободный модуль над $H^*(BT) = H^*_T(pt) = \mathbb{Z}[t_1, ..., t_j]$.

Пусть H^T_{ij} есть множество неподвижных точек относительно действия тора T. Так как это множество конечно, существует естественное вложение H^T_{ij} в H_{ij}, которое индуцирует отображение $H^*_T(H_{ij}) \to \oplus_{pt \in H^T_{ij}} H^*_T(pt)$. Кроме того, так как H_{ij} эквивариантно формально, то это отображение инъективно (см. [1] и [4]). Таким образом, чтобы вычислить кольцо эквивариантных когомологий H_{ij}, нам необходимо найти образ данного отображения. Это можно сделать с помощью следующей теоремы также доказанной в [1]:

Теорема 1. *Пусть X – гладкое проективное многообразие с эффективным действием алгебраического тора T ($K \subset T$ – компактный тор), относительно которого X эквивариантно формально и имеет конечное число неподвижных точек и одномерных орбит. Обозначим одномерные орбиты $O_1, ..., O_m$. Для каждой орбиты O_i обозначим через t_i ее стабилизатор (T_i – касательное пространство к нему), через S_i и N_i две неподвижные точки, являющиеся полюсами этой орбиты. Пусть X^T – множество неподвижных точек относительно действия тора T и $|X^T| = n$. Тогда*

$$H^*_K(X) \cong \{(f_{p_1}, ..., f_{p_n}) \in \oplus_{pt \in X^T} H^*_K(pt) : f_{N_i}|_{T_i} = f_{S_i}|_{T_i} \forall i = 1, ..., m\}.$$

Заметим, что изоморфизм в этой теореме кольцевой.

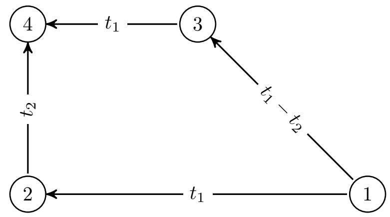

Рис. 1

3. Вычисление образующих для H_{1n}

Пользуясь предыдущей теоремой, найдем образующие для H_{1n}. Но прежде рассмотрим несколько примеров.

Пример 2 (Образующие кольца эквивариантных когомологий для H_{11})**.** Как видно из определения, H_{11} это комплексная проективная прямая $\mathbb{C}P^1$. Относительно действия $\mathbb{C}^*$ имеются две неподвижные точки $[1:0]$ и $[0:1]$ и только одна одномерная орбита $[*,*]$. Понятно, что стабилизатор этой орбиты – единица. Тогда получаем

$$H^*_{\mathbb{S}^1}(\mathbb{C}P^1) = \{(p_N, p_S) \in H^*_{\mathbb{S}^1}(pt) \oplus H^*_{\mathbb{S}^1}(pt) : p_N(0) = p_S(0)\}.$$

То есть, если p_N выбирается произвольно в $H^*_{\mathbb{S}^1}(pt)$, то $p_S = p_N + tp$, где p выбирается произвольно в $H^*_{\mathbb{S}^1}(pt)$. Таким образом, кольцо эквивариантных когомологий $\mathbb{C}P^1$ аддитивно порождается классами (p_N, p_N) и $(0, tp)$, где p и p_N пробегают $H^*_{\mathbb{S}^1}(pt)$. Иными словами, $H^*_{\mathbb{S}^1}(\mathbb{C}P^1)$ есть свободный $\mathbb{Z}[t]$ модуль с образующими $(1,1)$ и $(0,t)$.

Пример 3 (Образующие кольца эквивариантных когомологий для H_{12})**.** Рассматриваем действие T^2 на H_{12}. Занумеруем неподвижные точки этого действия:

$$([1:0],[0:1:0]) \to 1, ([0:1],[1:0:0]) \to 2,$$
$$([1:0],[0:0:1]) \to 3, ([0:1],[0:0:1]) \to 4.$$

Имеем четыре одномерные орбиты: $([1:0],[0:w_1:w_2])$ содержит точки 1 и 3, $([0:1],[w_0:0:w_2])$ содержит точки 2 и 4, $([z_0:z_1],[0:0:1])$ содержит точки 3 и 4, $([z_0:z_1],[w_0:w_1:0])$ содержит точки 1 и 2. Граф, соответствующий одномерным орбитам и неподвижным точкам с указанием аннигиляторов стабилизаторов одномерных орбит, приведен на рисунке 1.

Согласно теореме, любой элемент образа будет иметь вид (q_1, q_2, q_3, q_4), где $q_i \in H^*_{T^2}(pt)$ и q_i удовлетворяют соотношениям:

$$q_2 - q_1 \in \langle t_1 \rangle, q_3 - q_1 \in \langle t_1 - t_2 \rangle, q_4 - q_2 \in \langle t_2 \rangle, q_4 - q_3 \in \langle t_1 \rangle.$$

Откуда следует, что q_i будут иметь следующий вид:

$$q_1 = p_1,\ q_2 = p_1 + t_1 p_2,$$
$$q_3 = p_1 + (t_1 - t_2) p_3,$$
$$q_4 = p_1 + t_1 p_2 - t_2 p_3 + t_1 t_2 p_4.$$

Таким образом, $H^*_{T^2}(H_{12})$ есть свободный $\mathbb{Z}[t_1, t_2]$ модуль с образующими $(1,1,1,1)$, $(0, t_1, 0, t_1)$, $(0, 0, t_1 - t_2, -t_2)$ и $(0,0,0,t_1 t_2)$.

Перейдем к общему случаю: выпишем образующие кольца эквивариантных когомологий для H_{1n} относительно действия тора T^n. В этом случае имеется $2n$ образующих $(q_1, q_2, ..., q_{2n-1}, q_{2n})$, соответствующих неподвижным точкам действия. Покажем, что первые две образующие будут иметь вид: $(1, ..., 1)$, $(0, t_1, 0, t_1, ..., 0, t_1)$. Далее, при $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $(2k+1)$-я образующая будет иметь вид: $(\underbrace{0, ..., 0}_{2k}, \prod_{l=1}^{k}(t_l - t_{k+1}), -t_{k+1}\prod_{l=2}^{k}(t_l - t_{k+1}), ..., \prod_{l=1}^{k}(t_l - t_n), -t_n \prod_{l=2}^{k}(t_l - t_n))$; $(2k+2)$-я образующая будет иметь вид: $(\underbrace{0, ..., 0}_{2k}, 0, t_1 t_{k+1} \prod_{l=2}^{k}(t_l - t_{k+1}), ..., 0, t_1 t_n \prod_{l=2}^{k}(t_l - t_n))$.

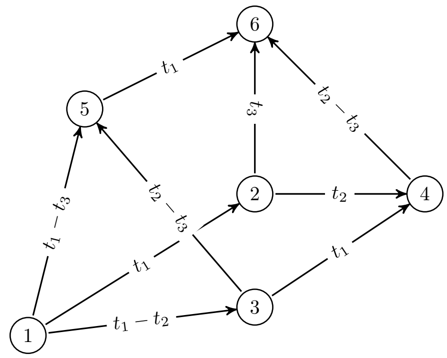

Рис. 2

Доказательство проведем индукцией по n. База индукции проверена в примерах 2 и 3. Пусть для H_{1n} все доказано, докажем для $H_{1,n+1}$. Так как мы умеем выписывать образующие для H_{1n}, то можем указать явный вид для $q_1, q_2, ..., q_{2n-1}, q_{2n}$. Для завершения доказательства необходимо выписать явный вид для многочленов q_{2n+1}, q_{2n+2}. При переходе от H_{1n} к $H_{1,n+1}$ добавляются две неподвижные точки действия $([1:0], [\underbrace{0:...:0}_{n+1}:1])$ и $([0:1], [\underbrace{0:...:0}_{n+1}:1])$. Занумеруем неподвижные точки $H_{1,n+1}$ относительно действия T^{n+1} следующим образом:

$$1 \to ([1:0], [0:1:0:...:0]),\ 2 \to ([0:1], [1:0:...:0]),$$
а для $2 \leqslant k \leqslant n+1$ положим
$$2k-1 \to ([1:0], [\underbrace{0:...:0}_{k}:1:0:...:0]),$$
$$2k \to ([0:1], [\underbrace{0:...:0}_{k}:1:0:...:0]).$$

Тогда при переходе от H_{1n} к $H_{1,n+1}$ в графе, соответствующем H_{1n}, помимо двух точек происходит добавление $2n+1$ ребер, соответствующих одномерным орбитам, содержащим пары точек $(1, 2n+1), ..., (2n-1, 2n+1)$ и $(2, 2n+2), ..., (2n, 2n+2), (2n+1, 2n+2)$. Аннигиляторы стабилизаторов указанных орбит равны соответственно $(t_1 - t_{n+1}), ..., (t_n - t_{n+1})$ и $t_{n+1}, (t_2 - t_{n+1}), ..., (t_n - t_{n+1}), t_1$.

Найдем q_{2n+1}. Рассуждения для q_{2n+2} будут абсолютно аналогичны. q_{2n+1} должен удовлетворять следующим условиям:

$$q_{2n+1} - q_1 \in \langle t_1 - t_{n+1} \rangle,$$
$$q_{2n+1} - q_3 \in \langle t_2 - t_{n+1} \rangle,$$
$$...$$
$$q_{2n+1} - q_{2n-1} \in \langle t_n - t_{n+1} \rangle.$$

Индукцией по количеству выполненных условий покажем, что $q_{2n+1} = p_1 + (t_1 - t_{n+1})p_3 + ...$ $... + \prod_{l=1}^{n}(t_l - t_{n+1})p_{2n+1}$. Пусть после выполнения m условий $q_{2n+1} = p_1 + (t_1 - t_{n+1})p_3 + ... + \prod_{l=1}^{m}(t_l - t_{n+1})q$, где q – некоторый многочлен. Найдем q такое, что $q_{2n+1} - q_{2m+1} \in \langle t_{m+1} - t_{n+1} \rangle$. Так как $q_{2m+1} = p_1 + (t_1 - t_{m+1})p_3 + ... + \prod_{l=1}^{m}(t_l - t_{m+1})p_{2m+1}$, то $q_{2n+1} - q_{2m+1} = ((t_1 - t_{n+1}) - (t_1 - t_{m+1}))p_3 + ... + (\prod_{l=1}^{m-1}(t_l - t_{n+1}) - \prod_{l=1}^{m-1}(t_l - t_{m+1}))p_{2m-1} + \prod_{l=1}^{m}(t_l - t_{n+1})q - \prod_{l=1}^{m}(t_l - t_{m+1})p_{2m+1}$. Убедимся, что $\prod_{l=1}^{i}(t_l - t_{m+1}) - \prod_{l=1}^{i}(t_l - t_{n+1})$ кратна $t_{m+1} - t_{n+1}$ $\forall i$: $\prod_{l=1}^{i}(t_l - t_{m+1}) - \prod_{l=1}^{i}(t_l - t_{n+1}) = \prod_{l=1}^{i}(t_l - t_{m+1}) - \prod_{l=1}^{i}((t_l - t_{m+1}) + (t_{m+1} - t_{n+1})) = \prod_{l=1}^{i}(t_l - t_{m+1}) - \prod_{l=1}^{i}(t_l - t_{m+1}) + (t_{m+1} - t_{n+1})f$, где f – некоторый многочлен. Таким образом, q должен иметь вид $q = p_{2m+1} + (t_{m+1} - t_{n+1})\tilde{q}$, где $\tilde{q}$ – некоторый многочлен. Это завершает доказательство.

Значит $H^*_{T^n}(H_{1n})$ есть свободный $\mathbb{Z}[t_1, ..., t_n]$ модуль с $2n$ образующими, указанными выше.

4. Вычисление соотношений для H_{1n} и описание кольца эквивариантных когомологий

Для образующих, вычисленных в предыдущем пункте, введем обозначения: $e = (1, 1, ..., 1, 1)$, $u = (0, t_1, 0, t_1, ..., 0, t_1)$. Далее, для $1 \leqslant k \leqslant n-1$, обозначим $(2k+1)$-ю образующую через v_k,

$(2k+2)$-ю образующую через w_k. Исходя из явного вида образующих, можно заключить, что $w_k = -uv_k$. Получим выражения для v_k, при $k = 2, ..., n-1$, через u и v_1 и соотношения на u и v_1.

Пример 4 (Соотношения для H_{11})**.** В этом случае имеем следующий набор образующих: $\{e = (1,1), u = (0,t)\}$. Нетрудно заметить, что единственным соотношением будет $u^2 = tu$. Таким образом, $H^*_{T^1}(\mathbb{C}P^1) \cong \mathbb{Z}[t][u]/u(u-t) = 0$.

Пример 5 (Соотношения для H_{12})**.** Имеем следующий набор образующих: $\{e = (1,1,1,1), u = (0,t_1,0,t_1), v_1 = (0,0,t_1-t_2,-t_2), w_1 = (0,0,0,t_1t_2)\}$. Как уже было сказано, $w_1 = -uv_1$. Нетрудно убедиться, что соотношения будут иметь вид: $u^2 = t_1u, v_1^2 = v_1((t_1-t_2)-u)$. Таким образом,

$$H^*_{T^2}(H_{12}) \cong \mathbb{Z}[t_1,t_2][u,v_1]/(u(u-t_1) = 0, v_1(v_1+u-(t_1-t_2)) = 0.$$

Пример 6 (Соотношения для H_{13})**.** Граф, соответствующий одномерным орбитам и неподвижным точкам с указанием аннигилятров стабилизаторов, приведен на рисунке 2.

Укажем набор образующих: $\{e = (1,1,1,1,1,1), u = (0,t_1,0,t_1,0,t_1), v_1 = (0,0,t_1-t_2,-t_2,t_1-t_3,-t_3), w_1 = (0,0,0,t_1t_2,0,t_1t_3), v_2 = (0,0,0,0,(t_1-t_3)(t_2-t_3),-t_3(t_2-t_3)), w_2 = (0,0,0,0,0,t_1t_3(t_2-t_3))\}$. Как и выше, $w_1 = -uv_1, w_2 = -uv_2$. Убедимся, что $v_2 = v_1(v_1+u-(t_1-t_2))$. Первые 4 координаты вектора в правой части будут равны нулю, так как выражение в правой части было соотношением в H_{12}. Истинность данного тождества для двух последних координат легко проверяется явным вычислением. Соотношения будут иметь вид: $u^2 = t_1u, v_2(v_1+u-(t_1-t_3)) = v_1(v_1+u-(t_1-t_2))(v_1+u-(t_1-t_3)) = 0$. Таким образом, $H^*_{T^3}(H_{13}) \cong \mathbb{Z}[t_1,t_2,t_3][u,v_1]/(u(u-t_1) = 0, v_1\prod_{l=2}^3((t_1-t_l)-(u+v_1)) = 0)$.

В общем случае имеем набор образующих $\{e, u, v_1, -uv_1, ..., v_{n-1}, -uv_{n-1}\}$. Покажем, что $v_2, ..., v_{n-1}$ определяются индуктивно следующим образом: $v_{k+1} = v_k((u+v_1)-(t_1-t_{k+1}))$. Проверим это явным вычислением:

(1) $u+v_1 = (0,t_1,t_1-t_2,t_1-t_2,...,t_1-t_n,t_1-t_n)$;

(2) $u+v_1-(t_1-t_{k+1}) = (\underbrace{t_{k+1}-t_1, t_{k+1}, t_{k+1}-t_2, t_{k+1}-t_2, ..., t_{k+1}-t_k, t_{k+1}-t_k}_{2k}, 0, 0, t_{k+1}-t_{k+2}, t_{k+1}-t_{k+2}, ..., t_{k+1}-t_n, t_{k+1}-t_n)$;

(3) $v_k(u+v_1-(t_1-t_{k+1})) = (\underbrace{0,...,0}_{2k+2}, (t_1-t_{k+2})...(t_{k+1}-t_{k+2}), -t_{k+2}(t_2-t_{k+2})...(t_{k+1}-t_{k+2}), ..., (t_1-t_n)...(t_{k+1}-t_n), -t_n(t_2-t_n)...(t_{k+1}-t_n)) = v_{k+1}$.

Перейдем к нахождению соотношений. Ясно, что соотношение $u^2 = t_1u$ будет присутствовать для любого n. Покажем, что второе соотношение будет иметь вид: $v_{n-1}((t_1-t_n)-(u+v_1)) = v_1\prod_{l=2}^n((t_1-t_l)-(u+v_1)) = 0$. Из предыдущих рассуждений вытекает, что $v_{n-1} = (\underbrace{0,...,0}_{2n-2}, *, *)$. Рассмотрим второй член произведения: $u+v_1 = (0,t_1,t_1-t_2,t_1-t_2,...,t_1-t_n,t_1-t_n)$. Значит $(t_1-t_n)-(u+v_1) = (\underbrace{*,...,*}_{2n-2}, 0, 0)$. Это означает, что нужное соотношение выполнено. Таким образом,

$$H^*_{T^n}(H_{1n}) \cong \mathbb{Z}[t_1,t_2,...,t_n][u,v_1]/(u(u-t_1) = 0, v_1\prod_{l=2}^n((t_1-t_l)-(u+v_1)) = 0).$$

Замечание 7. Для завершения доказательства нужно показать, что других соотношений нет (это касается и рассмотренных выше примеров). Доказательство отсутствия иных соотношений проводится подсчетом размерностей: ряды Гильберта-Пуанкаре для $H^*_{T^n}(H_{1n})$ и $H^*(H_{1n})$ (описание кольца когомологий $H^*(H_{1n})$ можно найти в [2]) имеют вид

$$R_{H^*_{T^n}(H_{1n})}(t^{\frac{1}{2}}) = \frac{1+2t+2t^2+...+2t^{n-1}+t^n}{(1-t)^n},$$
$$R_{H^*(H_{1n})}(t^{\frac{1}{2}}) = 1+2t+2t^2+...+2t^{n-1}+t^n.$$

Таким образом, описанное в работе кольцо $H^*_{T^n}(H_{1n})$ согласуется с видом $H^*(H_{1n})$.

5. Описание кольца эквивариантных когомологий H_{22}

Действие тора T^2 на H_{22} имеет 6 неподвижных точек. Занумеруем их следующим образом:

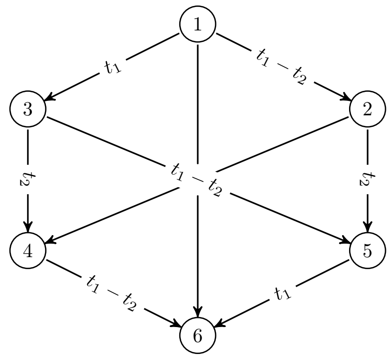

Рис. 3

$$1 \to ([0:1:0],[1:0:0]),\ 2 \to ([0:0:1],[1:0:0]),$$
$$3 \to ([1:0:0],[0:1:0]),\ 4 \to ([0:0:1],[0:1:0]),$$
$$5 \to ([1:0:0],[0:0:1]),\ 6 \to ([0:1:0],[0:0:1]).$$

Граф, соответствующий одномерным орбитам и неподвижным точкам с указанием аннигиляторов стабилизаторов орбит, приведен на рисунке 3. По теореме 1 любой элемент образа будет иметь вид $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$, где $q_i \in H^*_{T^2}(pt)$. Будем последовательно находить вид многочленов q_i, соответствующих неподвижным точкам действия. Многочлен $q_1 = p_1$ выбирается произвольно в $H^*_{T^2}(pt)$. Тогда, так как для q_2 должно быть верно, что $q_2 - q_1 \in \langle t_1 - t_2 \rangle$, он должен быть равен $q_2 = p_1 + (t_1 - t_2)p_2$, где p_2 выбирается произвольно в $H^*_{T^2}(pt)$. Аналогично, из того, что $q_3 - q_1 \in \langle t_1 \rangle$, следует вид многочлена q_3: $q_3 = p_1 + t_1 p_3$. Для q_4 должно выполняться:

$$q_4 - q_2 \in \langle t_1 \rangle,\ q_4 - q_3 \in \langle t_2 \rangle.$$

Для того, чтобы выполнялось второе условие, многочлен q_4 должен иметь вид: $q_4 = p_1 + t_1 p_3 + t_2 q$, где q – некоторый многочлен. Для выполнения первого условия требуется, чтобы $q = -p_2 + t_1 p_4$, где p_4 выбирается произвольно в $H^*_{T^2}(pt)$. Аналогичными рассуждениями, поскольку q_5 и q_6 должны удовлетворять следующим условиям

$$q_5 - q_2 \in \langle t_2 \rangle,\ q_5 - q_3 \in \langle t_1 - t_2 \rangle,$$
$$q_6 - q_1 \in \langle t_2 \rangle,\ q_6 - q_4 \in \langle t_1 - t_2 \rangle,\ q_6 - q_5 \in \langle t_1 \rangle,$$

получим явный вид многочленов q_5 и q_6:

$$q_5 = p_1 + (t_1 - t_2)p_2 + t_2 p_3 + t_2(t_1 - t_2)p_5,$$
$$q_6 = p_1 - t_2 p_2 + t_2 p_3 + t_1 t_2 p_4 + t_2(t_1 - t_2)p_5 + t_1 t_2 (t_1 - t_2) p_6.$$

Таким образом, $H^*_{T^2}(H_{22})$ есть свободный $\mathbb{Z}[t_1, t_2]$ модуль с шестью образующими $u_1 = (1,1,1,1,1,1)$, $u_2 = (0, t_1 - t_2, 0, -t_2, t_1 - t_2, -t_2)$, $u_3 = (0,0,t_1,t_1,t_2,t_2)$, $u_4 = (0,0,0,t_1t_2,0,t_1t_2)$,$u_5 = (0,0,0,0,t_2(t_1 - t_2), t_2(t_1 - t_2))$, $u_6 = (0,0,0,0,0,t_1t_2(t_1 - t_2))$. Явным вычислением проверяется, что $u_4 = u_3(t_1 - (u_2 + u_3))$, $u_5 = t_1(t_1 - u_3)$, $u_6 = u_5(t_1 - (u_2 + u_3))$ и соотношения имеют вид

$$(u_2 + u_3)(u_2 + u_3 - t_1)(u_2 + u_3 - (t_1 - t_2)) = 0,$$
$$u_3(t_1 - (u_2 + u_3)) - (u_2 - (t_1 - t_2))u_2 = 0.$$

Отсутствие иных соотношений доказывается подсчетом размерностей. Таким образом,

$$H^*_{T^2}(H_{22}) \cong \mathbb{Z}[t_1, t_2][u_2, u_3]/((u_2 + u_3)(u_2 + u_3 - t_1)(u_2 + u_3 - (t_1 - t_2)) = 0,$$
$$u_3(t_1 - (u_2 + u_3)) - (u_2 - (t_1 - t_2))u_2 = 0).$$

Список литературы

[1] Goresky M., Kottwitz R., MacPherson R. *Equivariant cohomology, Koszul duality and the localization theorem.* Invent. Math. 131 (25-83), 1998.

[2] Бухштабер В. М; Панов Т. Е. *Торические действия в топологии и комбинаторике.* Издательство МЦНМО, 2004.

[3] Каргапольцева А. И. *Эффективные действия тора на гиперповерхностях Милнора.* 2018.

[4] Franz M., Puppe V. *Exact cohomology sequences with integral coefficients for torus actions.* 2000.