ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»**

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

Эквивариантные когомологии гиперповерхностей Милнора

Выполнил студент
603 академической группы
Каргапольцева А.И.

____
подпись студента

Научный руководитель
Профессор, д.ф-м.н. Панов Т.Е.

____
подпись научного руководителя

Москва
2020 г.

Содержание

1. Введение

Гиперповерхности Милнора H_{ij} это семейство гладких многообразий, классы бордизмов которого порождают кольцо комплексных бордизмов. Представляет интерес нахождение максимальной размерности тора, действующего эффективно на данный класс многообразий, и описание кольца эквивариантных когомологий относительно указанного действия.

В первой части работы рассматриваются эффективные гамильтоновы действия тора T^k на H_{ij}. Доказано существование эффективного гамильтонова действия T^j на H_{ij} при $i \leqslant j$. Кроме того, с помощью теоремы Атьи-Гийемина-Стернберга [1] описан образ отображения моментов данного действия.

Во второй части рассматривается кольцо эквивариантных когомологий $H^*_{T^j}(H_{ij})$ относительно описанного в первой части действия. Используя теорему Горески-Коттвица-Макферсона [2], описан общий вид образующих кольца $H^*_{T^j}(H_{ij})$ $\forall i, j$. Кроме того, найдены соотношения и описаны кольца эквивариантных когомологий $H^*_{T^j}(H_{ij})$.

2. Эффективные действия тора на гиперповерхностях Милнора

Определение 1. Определим гиперповерхность Милнора H_{ij}. Пусть $[z_0 : ... : z_i]$ – однородные координаты на пространстве $\mathbb{C}P^i$, $[w_0 : ... : w_j]$ – однородные координаты на $\mathbb{C}P^j$. Тогда положим

$$H_{ij} = \{[z_0 : ... : z_i] \times [w_0 : ... : w_j] \in \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j : \sum_{k=0}^{min(i,j)} z_k w_k = 0\}.$$

На протяжении всей работы мы будем считать, что $i \leqslant j$. Тогда $\mathbb{C}^{i+1} \subseteq \mathbb{C}^{j+1}$ – вложение по первым $(i+1)$ координатам и гиперповерхность H_{ij} можно также представлять как множество пар

$$H_{ij} = \{(l, U) : l \text{ – прямая в } \mathbb{C}^{i+1}, U \text{ – гиперплоскость в } \mathbb{C}^{j+1} \text{ и } l \subset U\}. \tag{2.1}$$

Перейдем к описанию эффективного действия тора на H_{ij}.

2.1. Описание действия тора T^j на H_{ij}.

Рассмотрим стандартное действие компактного тора $T^j = (S^1)^j$ на $\mathbb{C}^{j+1}$:

$$(t_1, ...t_j)(x_0, ..., x_j) = (x_0, x_1 t_1, ..., x_j t_j).$$

Оно индуцирует действие на прямых в $\mathbb{C}^{i+1} \subseteq \mathbb{C}^{j+1}$

$$[z_0 : ... : z_i] \to [z_0 : t_1 z_1 : ... : t_i z_i]$$

и на гиперплоскостях

$$[w_0 : ... : w_j] \to [w_0 : t_1^{-1} w_1 : .. : t_j^{-1} w_j].$$

Тогда, рассматривая H_{ij} как множество пар (l, U) (см. 2.1), получаем действие T^j на H_{ij}:

$$(t_1, ...t_j)([z_0 : ... : z_i], [w_0 : ... : w_j]) = ([z_0 : t_1 z_1 : ... : t_i z_i], [w_0 : t_1^{-1} w_1 : .. : t_j^{-1} w_j]).$$

Действие тора T^j на $\mathbb{C}P^i$ вида

$$(t_1, ...t_j)[z_0 : ... : z_i] = [z_0 : t_1 z_1 : ... : t_i z_i]$$

получается из действия тора T^i на $\mathbb{C}P^i$ ограничением на первые $(i+1)$ координаты. Такое действие гамильтоново с отображением моментов $\mu_1 : \mathbb{C}P^i \to \mathbb{R}^j$, заданным в однородных координатах следующим образом:

$$\mu_1([z_0 : ... : z_i]) = -\frac{1}{2}\left(\frac{|z_1|^2}{\sum_{k=0}^i |z_k|^2}, ..., \frac{|z_i|^2}{\sum_{k=0}^i |z_k|^2}, 0, ..., 0\right).$$

Действие тора T^j на $\mathbb{C}P^j$ вида

$$(t_1, ...t_j)([w_0 : ... : w_j]) = ([w_0 : t_1^{-1} w_1 : ... : t_j^{-1} w_j])$$

также является гамильтоновым с отображением моментов $\mu_2 : \mathbb{C}P^j \to \mathbb{R}^j$, заданным в однородных координатах следующим образом:

$$\mu_2([w_0 : ... : w_j]) = -\frac{1}{2}\left(\frac{|w_1|^2}{\sum_{k=0}^j |w_k|^2}, ..., \frac{|w_j|^2}{\sum_{k=0}^j |w_k|^2}\right).$$

Лемма 2. *Предположим, что группа Ли G действует гамильтоново на двух симплектических многообразия $(M_j, \omega_j), j = 1, 2$, с отображениями моментов $\mu_j : M_j \to \mathfrak{g}^*$. Тогда на $M_1 \times M_2$ возникает симплектическая структура ω и диагональное действие G на $(M_1 \times M_2, \omega)$ гамильтоново с отображением моментов $\mu : M_1 \times M_2 \to \mathfrak{g}^*$ вида:*

$$\mu(p_1, p_2) = \mu_1(p_1) + \mu_2(p_2), \textit{ для } p_j \in M_j, j = 1, 2.$$

Из Леммы 2 следует тот факт, что построенное в начале пункта 2.1 действие гамильтоново с отображением моментов $\mu : \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j \to \mathbb{R}^j$, где μ есть вектор функция

$$\mu = (\mu_1^1 - \mu_2^1, ..., \mu_1^i - \mu_2^i, -\mu_2^{i+1}, ..., -\mu_2^j).$$

Отображение моментов μ, записанное в однородных координатах, будет иметь вид:

$$\mu([z_0 : ... : z_i], [w_0 : ... : w_j]) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{|z_1|^2}{\sum_{k=0}^{i}|z_k|^2} - \frac{|w_1|^2}{\sum_{k=0}^{j}|w_k|^2}, ..., \frac{|z_i|^2}{\sum_{k=0}^{i}|z_k|^2} - \frac{|w_i|^2}{\sum_{k=0}^{j}|w_k|^2}, -\frac{|w_{i+1}|^2}{\sum_{k=0}^{j}|w_k|^2}, ..., -\frac{|w_j|^2}{\sum_{k=0}^{j}|w_k|^2}\right).$$

Таким образом заключаем, что существует эффективное действие тора T^k на H_{ij} при $k = j$. Кроме того, известно, что при $i \geqslant 2$ не существует эффективного гамильтонова действия тора T^{i+j-1} на H_{ij}, так как H_{ij} не является квазиторическим многообразием при указанных значениях i (доказательство этих фактов можно найти в [3]). Следовательно, было получено следующее ограничение на размерность эффективного гамильтонова действия тора T^k на H_{ij}:

$$j \leqslant k \leqslant i + j - 2, \text{ при } i \geqslant 2.$$

Тогда очевидно, что для $i = 2$ максимальный тор, действующий эффективно и гамильтоново на H_{2j}, это тор T^j. Кроме того, понятно, что на H_{1j} не существует эффективного действия тора T^{j+1}. То есть, описанное в данном пункте действие тора T^j на H_{1j} является максимальным. Явный вид действия T^j на H_{1j} и отображения моментов будет описан в примере 4.

Перейдем теперь к описанию образа отображения моментов для построенного действия.

2.2. **Описание образа отображения моментов для действия тора T^j на H_{ij}.** Поскольку построенное действие T^j на H_{ij} гамильтоново, то из теоремы Атьи-Гийемина-Стернберга (о выпуклости образа отображения моментов, см. [1]) образом гиперповерхности Милнора H_{ij} является выпуклая оболочка образов неподвижных точек этого действия. Неподвижными точками данного действия являются точки вида

$$([\underbrace{0 : ... : 0}_{k} : 1 : \underbrace{0 : ... : 0}_{i-k}], [\underbrace{0 : ... : 0}_{l} : 1 : \underbrace{0 : ... : 0}_{j-l}]),$$

где $k \in [0, i]$, $l \in [0, j]$ и $k \neq l$. Таким образом, всего имеется $(i + 1)j$ неподвижных точек.

Рассмотрим образ $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$ при отображении μ. Из явного вида μ получаем, что образом будет выпуклый многогранник, который есть сумма Минковского j-мерного симплекса $\triangle^j$ (образ $\mathbb{C}P^j$ при μ_2) и минус i-мерного симплекса $\triangle^i$ (образ $\mathbb{C}P^i$ при μ_1). Тогда $\mu(H_{ij}) \subseteq \triangle^j - \triangle^i$. Но поскольку $\mu(H_{ij})$ является выпуклым многогранником, содержащим образы неподвижных точек действия T^j на $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$, то $\mu(H_{ij})$ в точности совпадает с $\triangle^j - \triangle^i$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3. Опишем действие тора T^2 на H_{22}. Тор T^2 действует следующим образом:

$$(t_1, t_2)([z_0 : z_1 : z_2], [w_0 : w_1 : w_2]) = ([z_0 : t_1 z_1 : t_2 z_2], [w_0 : t_1^{-1} w_1 : t_2^{-1} w_2]).$$

Отображение моментов имеет вид:

$$\mu([z_0 : z_1 : z_2], [w_0 : w_1 : w_2]) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{|z_1|^2}{\sum_{k=0}^{2}|z_k|^2} - \frac{|w_1|^2}{\sum_{k=0}^{2}|w_k|^2}, \frac{|z_2|^2}{\sum_{k=0}^{2}|z_k|^2} - \frac{|w_2|^2}{\sum_{k=0}^{2}|w_k|^2}\right).$$

Данное действие имеет 6 неподвижных точек:

$$([1:0:0],[0:1:0]) \to \left(\tfrac{1}{2}, 0\right), \ ([1:0:0],[0:0:1]) \to \left(0, \tfrac{1}{2}\right),$$
$$([0:1:0],[1:0:0]) \to \left(-\tfrac{1}{2}, 0\right), \ ([0:1:0],[0:0:1]) \to \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right),$$
$$([0:0:1],[1:0:0]) \to \left(0, -\tfrac{1}{2}\right), \ ([0:0:1],[0:1:0]) \to \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right).$$

Получаем, что образом H_{22} при отображении μ будет выпуклая оболочка этих точек – шестиугольник.

Пример 4. Опишем действие тора T^j на H_{1j}. Тор T^j действует следующим образом:

$$(t_1, ..., t_j)([z_0 : z_1], [w_0 : ... : w_j]) = ([z_0 : t_1 z_1], [w_0 : t_1^{-1} w_1 : ... : t_j^{-1} w_j]).$$

Отображение моментов имеет вид:

$$\mu([z_0 : z_1], [w_0 : ... : w_j]) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{|z_1|^2}{\sum_{k=0}^{1}|z_k|^2} - \frac{|w_1|^2}{\sum_{k=0}^{j}|w_k|^2}, -\frac{|w_2|^2}{\sum_{k=0}^{j}|w_k|^2}, ..., -\frac{|w_j|^2}{\sum_{k=0}^{j}|w_k|^2}\right).$$

Образ H_{1j} при отображении μ комбинаторно устроен как $\triangle^1 \times \triangle^{j-1}$. Например, при $j = 1$ образом будет отрезок, при $j = 2$ – трапеция, при $j = 3$ – сдвинутая треугольная призма (две ее боковые стороны имеют вид прямоугольных трапеций).

3. Кольцо эквивариантных когомологий гиперповерхностей Милнора

В этой части работы мы будем рассматривать эквивариантные когомологии гиперповерхностей Милнора H_{ij} относительно действия тора T^j, описанного в пункте 2.1. То есть, действие алгебраического тора $C = (\mathbb{C}^*)^j$ мы определим следующим образом:

$$(t_1, ...t_j)([z_0 : ... : z_i], [w_0 : ... : w_j]) = ([z_0 : t_1 z_1 : ... : t_i z_i], [w_0 : t_1^{-1} w_1 : .. : t_j^{-1} w_j]).$$

И будем рассматривать эквивариантные когомологии H_{ij} относительно действия компактного подтора $T^j = (\mathbb{S}^1)^j$.

3.1. **Описание образующих кольца эквивариантных когомологий.**

Рассмотрим универсальное расслоение для $T = (\mathbb{S}^1)^j$:

$$ET \xrightarrow{T} BT = (ET/T).$$

Напомним, что ET – стягиваемое пространство со свободным действием тора T, а $BT = (\mathbb{C}P^\infty)^j$ есть классифицирующее пространство для T. Тогда имеется расслоение

$$\begin{array}{c} H_{ij} \times_T ET \\ {\scriptstyle H_{ij}} \Big\downarrow \\ BT, \end{array}$$

где тотальное пространство есть пространство со свободным диагональным действием тора T и $H_{ij} \times_T ET = (H_{ij} \times ET)/T$. Тогда кольцо эквивариантных когомологий $H_T^*(H_{ij}) = H^*(H_{ij} \times_T ET)$.

Рассмотрим второй лист E_2 спектральной последовательности, соответствующей данному расслоению. В силу того, что нечетномерные группы когомологий H_{ij} и $(\mathbb{C}P^\infty)^j$ равны нулю, спектральная последовательность вырождается в члене E^2, то есть $E^2 = E^\infty$ (напомним, что это свойство называется эквивариантной формальностью). Значит $H_T^*(H_{ij})$ есть свободный модуль над $H^*(BT) = H_T^*(pt) = \mathbb{Z}[t_1, ..., t_j]$.

Пусть H_{ij}^T есть множество неподвижных точек относительно действия тора T. Так как это множество конечно, существует естественное вложение H_{ij}^T в H_{ij}, которое индуцирует отображение $H_T^*(H_{ij}) \to \oplus_{pt \in H_{ij}^T} H_T^*(pt)$. Кроме того, так как H_{ij} эквивариантно формально, то это отображение инъективно (см. [2] и [4]). Таким образом, чтобы вычислить кольцо эквивариантных когомологий H_{ij}, нам необходимо найти образ данного отображения. Это можно сделать с помощью следующей теоремы также доказанной в [2]:

Теорема 5. *Пусть X – гладкое проективное многообразие с эффективным действием алгебраического тора T ($K \subset T$ – компактный тор), относительно которого X эквивариантно формально и имеет конечное число неподвижных точек и одномерных орбит. Обозначим одномерные орбиты $O_1, ..., O_m$. Для каждой орбиты O_i обозначим через t_i ее стабилизатор (T_i – касательное пространство к нему), через S_i и N_i две неподвижные точки, являющиеся полюсами этой орбиты. Пусть X^T – множество неподвижных точек относительно действия тора T и $|X^T| = n$. Тогда*

$$H_K^*(X) \cong \{(f_{p_1}, ..., f_{p_n}) \in \oplus_{pt \in X^T} H_K^*(pt) : f_{N_i}|_{T_i} = f_{S_i}|_{T_i} \forall i = 1, ..., m\}.$$

Заметим, что изоморфизм в этой теореме кольцевой.

3.2. **Вычисление образующих для $H_{T^k}^*(H_{kk})$.**

Пользуясь теоремой 5, найдем образующие кольца эквивариантных когомологий для H_{kk}, $k \geqslant 1$, относительно действия тора T^k. Но прежде рассмотрим несколько примеров.

Пример 6 (Образующие кольца эквивариантных когомологий для H_{11})**.** Как видно из определения, H_{11} это комплексная проективная прямая $\mathbb{C}P^1$. Относительно действия тора $T = \mathbb{C}^*$ имеются две неподвижные точки $[1 : 0]$ и $[0 : 1]$ и только одна одномерная орбита $[*, *]$. Понятно, что стабилизатор этой орбиты – единица. Тогда получаем

$$H_{\mathbb{S}^1}^*(\mathbb{C}P^1) = \{(p_N, p_S) \in H_{\mathbb{S}^1}^*(pt) \oplus H_{\mathbb{S}^1}^*(pt) : p_N(0) = p_S(0)\}.$$

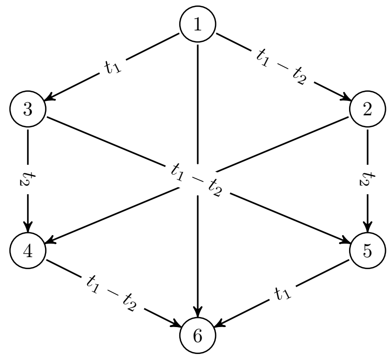

Рис. 1

То есть, если p_N выбирается произвольно в $H^*_{\mathbb{S}^1}(pt)$, то $p_S = p_N + tp$, где p выбирается произвольно в $H^*_{\mathbb{S}^1}(pt)$. Таким образом, кольцо эквивариантных когомологий $\mathbb{C}P^1$ аддитивно порождается классами (p_N, p_N) и $(0, tp)$, где p и p_N пробегают $H^*_{\mathbb{S}^1}(pt)$. Иными словами, $H^*_{\mathbb{S}^1}(\mathbb{C}P^1)$ есть свободный $\mathbb{Z}[t]$ модуль с двумя образующими $u_1 = (1,1)$ и $u_2 = (0,t)$.

Пример 7 (Образующие кольца эквивариантных когомологий для H_{22})**.** Действие тора T^2 на H_{22} имеет 6 неподвижных точек. Занумеруем их следующим образом:

$$1 \to ([0:1:0],[1:0:0]),\ 2 \to ([0:0:1],[1:0:0]),$$
$$3 \to ([1:0:0],[0:1:0]),\ 4 \to ([0:0:1],[0:1:0]),$$
$$5 \to ([1:0:0],[0:0:1]),\ 6 \to ([0:1:0],[0:0:1]).$$

Граф, соответствующий одномерным орбитам и неподвижным точкам с указанием аннигиляторов стабилизаторов орбит, приведен на рисунке 1. По теореме 5 любой элемент образа будет иметь вид $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$, где $q_i \in H^*_{T^2}(pt)$. Будем последовательно находить вид многочленов q_i, соответствующих неподвижным точкам действия. Многочлен $q_1 = p_1$ выбирается произвольно в $H^*_{T^2}(pt)$. Тогда, так как для q_2 должно быть верно, что $q_2 - q_1 \in \langle t_1 - t_2 \rangle$, он должен быть равен $q_2 = p_1 + (t_1 - t_2)p_2$, где p_2 выбирается произвольно в $H^*_{T^2}(pt)$. Аналогично, из того, что $q_3 - q_1 \in \langle t_1 \rangle$, следует вид многочлена q_3: $q_3 = p_1 + t_1 p_3$. Для q_4 должно выполняться:

$$q_4 - q_2 \in \langle t_1 \rangle,\ q_4 - q_3 \in \langle t_2 \rangle.$$

Для того, чтобы выполнялось второе условие, многочлен q_4 должен иметь вид: $q_4 = p_1 + t_1 p_3 + t_2 q$, где q – некоторый многочлен. Для выполнения первого условия требуется, чтобы $q = -p_2 + t_1 p_4$, где p_4 выбирается произвольно в $H^*_{T^2}(pt)$. Аналогичными рассуждениями, поскольку q_5 и q_6 должны удовлетворять следующим условиям

$$q_5 - q_2 \in \langle t_2 \rangle,\ q_5 - q_3 \in \langle t_1 - t_2 \rangle,$$
$$q_6 - q_1 \in \langle t_2 \rangle,\ q_6 - q_4 \in \langle t_1 - t_2 \rangle,\ q_6 - q_5 \in \langle t_1 \rangle,$$

получим явный вид многочленов q_5 и q_6:

$$q_5 = p_1 + (t_1 - t_2)p_2 + t_2 p_3 + t_2(t_1 - t_2)p_5,$$
$$q_6 = p_1 - t_2 p_2 + t_2 p_3 + t_1 t_2 p_4 + t_2(t_1 - t_2)p_5 + t_1 t_2 (t_1 - t_2) p_6.$$

Таким образом, $H^*_{T^2}(H_{22})$ есть свободный $\mathbb{Z}[t_1, t_2]$ модуль с шестью образующими $u_1 = (1,1,1,1,1,1)$, $u_2 = (0, t_1 - t_2, 0, -t_2, t_1 - t_2, -t_2), u_3 = (0,0,t_1,t_1,t_2,t_2), u_4 = (0,0,0,t_1 t_2, 0, t_1 t_2)$,$u_5 = (0,0,0,0,t_2(t_1 - t_2), t_2(t_1 - t_2)), u_6 = (0,0,0,0,0,t_1 t_2 (t_1 - t_2))$.

Перейдем к общему случаю. Действие тора T^k на H_{kk} имеет $k(k+1)$ неподвижных точек. Занумеруем их следующим образом: точка

$$([\underbrace{0:\ldots:0}_{i}:1:\underbrace{0:\ldots:0}_{k-i}],[\underbrace{0:\ldots:0}_{j}:1:\underbrace{0:\ldots:0}_{k-j}]) \to \text{обозначим ее } (i,j)$$

будет иметь номер $jk+i+\mathbb{I}\{j>i\}$, где $\mathbb{I}$ – индикатор. Согласно теореме, каждой неподвижной точке с номером l сопоставляется многочлен $q_l \in H^*_{T^k}(pt)$. Тогда любой элемент образа будет иметь вид $(q_1, ..., q_{k(k+1)})$, где q_l удовлетворяют некоторым условиям. Покажем, что

(1) $q_{jk+i} = \sum_{r=0}^{j-1}\big(\sum_{n=0}^{r}\prod_{l=0}^{n-1}(t_l-t_j)\prod_{l=n+1}^{r}(t_l-t_i)\big)p_{r+1}+\prod_{l=0}^{j-1}(t_l-t_i)\sum_{r=j}^{i-1}\big(\prod_{l=j+1}^{r}(t_l-t_i)\big)p_{r+1}+$ $+\sum_{s=0}^{j-1}\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_j)\big(-p_{(s+1)k+1}+\sum_{r=1}^{s}\prod_{l=0}^{r-1}(t_l-t_i)p_{(s+1)k+r+1}+$ $+\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_i)\sum_{r=s+1}^{j-1}\big(\sum_{c=s+1}^{r}\prod_{l=s+1}^{c-1}(t_l-t_j)\prod_{l=c+1}^{r}(t_l-t_i)\big)p_{(s+1)k+r+1}+$ $+\prod_{l=0}^{j-1}(t_l-t_i)\sum_{r=j}^{i-1}\big(\prod_{l=j+1}^{r}(t_l-t_i)\big)p_{(s+1)k+r+1}\big)$ для точек вида (i,j), где $i>j$;

(2) $q_{ik+j+1} = \sum_{r=0}^{j-1}\big(\sum_{n=0}^{r}\prod_{l=0}^{n-1}(t_l-t_i)\prod_{l=n+1}^{r}(t_l-t_j)\big)p_{r+1}+\prod_{l=0}^{j-1}(t_l-t_i)\sum_{r=j}^{i-1}\big(\prod_{l=j+1}^{r}(t_l-t_i)\big)p_{r+1}+\sum_{s=0}^{j-1}\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_i)\big(-p_{(s+1)k+1}+\sum_{r=1}^{s}\prod_{l=0}^{r-1}(t_l-t_j)p_{(s+1)k+r+1}+$ $+\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_j)\sum_{r=s+1}^{j-1}\big(\sum_{c=s+1}^{r}\prod_{l=s+1}^{c-1}(t_l-t_i)\prod_{l=c+1}^{r}(t_l-t_j)\big)p_{(s+1)k+r+1}+$ $+\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_j)\prod_{l=s+1}^{j-1}(t_l-t_i)\sum_{r=j}^{i-1}\big(\prod_{l=j+1}^{r}(t_l-t_i)\big)p_{(s+1)k+r+1}\big)+\sum_{s=j}^{i-1}\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_i)\big(-p_{(s+1)k+1}+$ $+\sum_{r=0}^{j-1}\prod_{l=0}^{r}(t_l-t_j)p_{(s+1)k+r+2}\big)$ для точек вида (j,i), где $i>j$.

Для начала покажем, что многочлены выше согласуются на касательных пространствах к одномерным орбитам. Здесь и далее мы всегда будем полагать, что $t_0=0$. Начнем с проверки для точки (i,j) при $i>j$, то есть будем рассматривать многочлен q_{jk+i}. Точка (i,j) содержится в замыкании одной одномерной орбиты с точками вида (мы рассматриваем только точки, номера которых меньше, чем номер данной точки):

- $(i,m), 0\leqslant m\leqslant j-1$. Аннигилятор стабилизатора этой орбиты равен t_m-t_j, то есть должно быть верно, что $q_{jk+i}-q_{mk+i}\in\langle t_m-t_j\rangle$;
- $(m,j), 0\leqslant m\leqslant j-1$. Аннигилятор стабилизатора орбиты равен t_m-t_i, то есть $q_{jk+i}-q_{jk+m+1}\in\langle t_m-t_i\rangle$;
- $(m,j), j+1\leqslant m\leqslant i-1$. Аннигилятор стабилизатора орбиты равен t_m-t_i, то есть $q_{jk+i}-q_{jk+m}\in\langle t_m-t_i\rangle$.

Таким образом, проверка для точки (i,j) будет состоять в проверке трех утверждений, указанных выше.

Проверим первое утверждение. По предположению, $q_{mk+i}=\sum_{r=0}^{m-1}\big(\sum_{n=0}^{r}\prod_{l=0}^{n-1}(t_l-t_m)\prod_{l=n+1}^{r}(t_l-t_i)\big)p_{r+1}+\prod_{l=0}^{m-1}(t_l-t_i)\sum_{r=m}^{i-1}\big(\prod_{l=m+1}^{r}(t_l-t_i)\big)p_{r+1}+\sum_{s=0}^{m-1}\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_m)\big(-p_{(s+1)k+1}+$ $+\sum_{r=1}^{s}\prod_{l=0}^{r-1}(t_l-t_i)p_{(s+1)k+r+1}+\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_i)\sum_{r=s+1}^{m-1}\big(\sum_{c=s+1}^{r}\prod_{l=s+1}^{c-1}(t_l-t_m)\prod_{l=c+1}^{r}(t_l-t_i)\big)p_{(s+1)k+r+1}+$ $+\prod_{l=0}^{m-1}(t_l-t_i)\sum_{r=m}^{i-1}\big(\prod_{l=m+1}^{r}(t_l-t_i)\big)p_{(s+1)k+r+1}\big)$. Покажем, что $q_{jk+i}-q_{mk+i}\in\langle t_m-t_j\rangle$. Будем последовательно рассматривать коэффициенты при p_n $(1\leqslant n\leqslant jk+i)$ в указанной разности многочленов при различных индексах r,s и доказывать, что они кратны t_m-t_j:

(1) $m\leqslant s\leqslant j-1$ и $1\leqslant r\leqslant i$: коэффициент при $p_{(s+1)k+r}$ в q_{mk+i} равен нулю, а в q_{jk+i} имеет вид $\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_j)f$, где f – некоторый многочлен. То есть коэффициент при $p_{(s+1)k+r}$ в $q_{jk+i}-q_{mk+i}$ кратен t_m-t_j.

(2) $0\leqslant s\leqslant m-1$: коэффициент при $p_{(s+1)k+1}$ в $q_{jk+i}-q_{mk+i}$ будет иметь вид $\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_j)-\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_m)=\prod_{l=0}^{s}((t_l-t_m)+(t_m-t_j))-\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_m)=\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_m)+(t_m-t_j)f-\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_m)=(t_m-t_j)f$, где f – некоторый многочлен.

(3) $0\leqslant s\leqslant m-1$ и $1\leqslant r\leqslant s$: коэффициенты при $p_{(s+1)k+r+1}$ в q_{mk+i} и q_{jk+i} совпадают с точностью до многочлена, кратного t_m-t_j. Они равны соответственно $\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_m)\prod_{l=0}^{r-1}(t_l-t_i)$ и $\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_j)\prod_{l=0}^{r-1}(t_l-t_i)=\prod_{l=0}^{s}((t_l-t_m)+(t_m-t_j))\prod_{l=0}^{r-1}(t_l-t_i)$.

(4) $0\leqslant s\leqslant m-1$ и $s+1\leqslant r\leqslant m-1$: коэффициент при $p_{(s+1)k+r+1}$ в q_{mk+i} имеет вид $\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_m)(t_l-t_i)\sum_{c=s+1}^{r}\prod_{l=s+1}^{c-1}(t_l-t_m)\prod_{l=c+1}^{r}(t_l-t_i)$, а в q_{jk+i} $\prod_{l=0}^{s}((t_l-t_m)+(t_m-t_j))(t_l-t_i)\sum_{c=s+1}^{r}\prod_{l=s+1}^{c-1}((t_l-t_m)+(t_m-t_j))\prod_{l=c+1}^{r}(t_l-t_i)$. То есть разность коэффициентов кратна t_m-t_j.

(5) $0\leqslant s\leqslant m-1$ и $m\leqslant r\leqslant j-1$: коэффициент при $p_{(s+1)k+r+1}$ в $q_{jk+i}-q_{mk+i}$ равен $\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_i)(t_l-t_j)\sum_{c=s+1}^{r}\prod_{l=s+1}^{c-1}(t_l-t_j)\prod_{l=c+1}^{r}(t_l-t_i)-\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_m)\prod_{l=0,l\neq m}^{r}(t_l-t_i)=\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_i)(t_l-$

$t_m)\big(\sum_{c=s+1}^{r}\prod_{l=s+1}^{c-1}(t_l-t_j)\prod_{l=c+1}^{r}(t_l-t_i)-\prod_{l=s+1,l\neq m}^{r}(t_l-t_i)\big)+f(t_m-t_j)$, где f – некоторый многочлен. Далее будем рассматривать только разность в скобках (все равенства по $mod(t_m-t_j)$): $\sum_{c=s+1}^{r}\prod_{l=s+1}^{c-1}((t_l-t_m)+(t_m-t_j))\prod_{l=c+1}^{r}(t_l-t_i)-\prod_{l=s+1,l\neq m}^{r}(t_l-t_i)=\sum_{c=s+1}^{r}\prod_{l=s+1}^{c-1}(t_l-t_m)\prod_{l=c+1}^{r}(t_l-t_i)-\prod_{l=s+1,l\neq m}^{r}(t_l-t_i)=\sum_{c=s+2}^{r}\prod_{l=s+1}^{c-1}(t_l-t_m)\prod_{l=c+1}^{r}(t_l-t_i)+\prod_{l=s+2}^{r}(t_l-t_i)-\prod_{l=s+1,l\neq m}^{r}(t_l-t_i)=\sum_{c=s+2}^{r}\prod_{l=s+1}^{c-1}(t_l-t_m)\prod_{l=c+1}^{r}(t_l-t_i)+\prod_{l=s+2,l\neq m}^{r}(t_l-t_i)(t_m-t_i-t_{s+1}+t_i)=\sum_{c=s+2}^{r}\prod_{l=s+1}^{c-1}(t_l-t_m)\prod_{l=c+1}^{r}(t_l-t_i)-(t_{s+1}-t_m)\prod_{l=s+2,l\neq m}^{r}(t_l-t_i)=\sum_{c=s+3}^{r}\prod_{l=s+1}^{c-1}(t_l-t_m)\prod_{l=c+1}^{r}(t_l-t_i)+(t_{s+1}-t_m)\prod_{l=s+3}^{r}(t_l-t_i)-(t_{s+1}-t_m)\prod_{l=s+2,l\neq m}^{r}(t_l-t_i)=\sum_{c=s+3}^{r}\prod_{l=s+1}^{c-1}(t_l-t_m)\prod_{l=c+1}^{r}(t_l-t_i)+(t_{s+1}-t_m)\prod_{l=s+3,l\neq m}^{r}(t_l-t_i)(t_m-t_i-t_{s+2}+t_i)=\sum_{c=s+3}^{r}\prod_{l=s+1}^{c-1}(t_l-t_m)\prod_{l=c+1}^{r}(t_l-t_i)-\prod_{l=s+1}^{s+2}(t_l-t_m)\prod_{l=s+3,l\neq m}^{r}(t_l-t_i)=\ldots=\sum_{c=m}^{r}\prod_{l=s+1}^{c-1}(t_l-t_m)\prod_{l=c+1}^{r}(t_l-t_i)-\prod_{l=s+1}^{m-1}(t_l-t_m)\prod_{m+1}^{r}(t_l-t_i)=\sum_{c=m+1}^{r}\prod_{l=s+1}^{c-1}(t_l-t_m)\prod_{l=c+1}^{r}(t_l-t_i)=0$. Таким образом, коэффициент при $p_{(s+1)k+r+1}$ в $q_{jk+i}-q_{mk+i}$ кратен t_m-t_j.

(6) $0\leqslant s\leqslant m-1$ и $j\leqslant r\leqslant i-1$: коэффициент при $p_{(s+1)k+r+1}$ в $q_{jk+i}-q_{mk+i}$ равен (вновь все равенства по $mod(t_m-t_j)$) $\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_m)\prod_{l=0,l\neq m}^{r}(t_l-t_i)-\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_j)\prod_{l=0,l\neq j}^{r}(t_l-t_i)=\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_m)\prod_{l=0,l\neq m,l\neq j}^{r}(t_l-t_i)(t_j-t_i-t_m+t_i)=(t_j-t_m)\prod_{l=0}^{s}(t_l-t_m)\prod_{l=0,l\neq m,l\neq j}^{r}(t_l-t_i)$.

(7) Случаи $0\leqslant r\leqslant m-1$, $m\leqslant r\leqslant j-1$, $j\leqslant r\leqslant i-1$ сводятся к случаям 4, 5 и 6 соответственно при $s=-1$. Коэффициенты при p_{r+1} в $q_{jk+i}-q_{mk+i}$ соответственно равны $\sum_{c=0}^{r}\prod_{l=0}^{c-1}(t_l-t_j)\prod_{l=c+1}^{r}(t_l-t_i)-\sum_{c=0}^{r}\prod_{l=0}^{c-1}(t_l-t_m)\prod_{l=c+1}^{r}(t_l-t_i)$, $\sum_{c=0}^{r}\prod_{l=0}^{c-1}(t_l-t_j)\prod_{l=c+1}^{r}(t_l-t_i)-\prod_{l=0,l\neq m}^{r}(t_l-t_i)$ и $\prod_{l=0,l\neq j}^{r}(t_l-t_i)-\prod_{l=0,l\neq m}^{r}(t_l-t_i)$.

Таким образом, первое утверждение полностью проверено.

Нетрудно заметить, что проверка второго утверждения полностью аналогична проверке выше. Проверка третьего утверждения очевидна и сводится к последовательному преобразованию скобок вида $t_l-t_i=(t_l-t_m)+(t_m-t_i)$. Следовательно, проверка для точки (i,j) завершена.

Перейдем к проверке для точки (j,i) при $i>j$, то есть будем рассматривать многочлен q_{ik+j+1}. Точка (j,i) содержится в замыкании одной одномерной орбиты с точками вида (как и ранее, мы рассматриваем только точки, номера которых меньше, чем номер данной точки):

- $(j,m), 0\leqslant m\leqslant j-1$. Аннигилятор стабилизатора этой орбиты равен t_m-t_i, то есть должно быть верно, что $q_{ik+j+1}-q_{mk+j}\in\langle t_m-t_i\rangle$;
- (i,j). Аннигилятор стабилизатора этой орбиты равен t_j-t_i, то есть $q_{ik+j+1}-q_{kj+i}\in\langle t_j-t_i\rangle$;
- $(j,m), j+1\leqslant m\leqslant i-1$. Аннигилятор стабилизатора орбиты равен t_m-t_i, то есть $q_{ik+j+1}-q_{mk+j+1}\in\langle t_m-t_i\rangle$;
- $(m,i), 0\leqslant m\leqslant j-1$. Аннигилятор стабилизатора орбиты равен t_m-t_j, то есть $q_{ik+j+1}-q_{ik+m+1}\in\langle t_m-t_j\rangle$.

Таким образом, проверка для точки (j,i) будет состоять в проверке четырех утверждений, указанных выше. Нетрудно заметить, что существенная часть проверки первого и последнего утверждений сводится к проверке утверждений 1 и 2 для точки (i,j), для $i>j$ (в силу симметрии многочленов). Проверка утверждений 2 и 3 для точки (j,i) очевидна.

Теперь осталось показать, что все элементы модуля $H^*_{T^k}(H_{kk})$ имеют указанный вид. Предположим, что это не так. Тогда, следуя примеру 7, для $H^*_{T^k}(H_{kk})$ будем последовательно выписывать многочлены $q'_1,...,q'_{k(k+1)}$, соответствующие неподвижным точкам действия: для многочлена q'_i, соответствующего i-ой неподвижной точке, последовательно разрешаем условия делимости, начиная с многочлена q'_1, заканчивая многочленом q'_{i-1} (если для многочлена $q_l, l=1,\ldots,i-1$, это условие имеется). По наборам многочленов $q_1,...,q_{k(k+1)}$ и $q'_1,...,q'_{k(k+1)}$ выпишем две матрицы наборов образующих, то есть транспонированные матрицы наборов многочленов $q_1,...,q_{k(k+1)}$ и $q'_1,...,q'_{k(k+1)}$. Понятно, что обе системы будут иметь верхнетреугольный вид (первая из явного вида $q_1,...,q_{k(k+1)}$, вторая по построению). Используя равенство степеней по $t_1,...,t_k$ соответствующих образующих, нетрудно показать, что образующие из разных систем совпадают с точностью до умножения на -1, а значит они задают один и тот же модуль.

Исходя из доказанного вида многочленов можно сделать вывод о явном виде образующих кольца эквивариантных когомологий для H_{kk} относительно действия тора T^k:

Предложение 8. *Для $k \geqslant 1$ кольцо эквивариантных когомологий $H^*_{T^k}(H_{kk})$ есть свободный $\mathbb{Z}[t_1, ..., t_k]$ модуль с $k(k+1)$ образующими $u_{(a+1)k+n} = (u^1_{(a+1)k+n}, ..., u^{k(k+1)}_{(a+1)k+n})$, где $a \in [-1, k-1], n \in [1, k]$, и компоненты вектора $u^{sk+j}_{(a+1)k+n}$ $(s \in [0, k], j \in [1, k])$ имеют вид:*

(1) *при $n \in [1, a+1]$:*
- (i) *если $s \in [0, a], j \in [1, k]$, то $u^{sk+j}_{(a+1)k+n} = 0$;*
- (ii) *если $s \in [a+1, k]$, то*
  - (i) *если $j \in [1, n-1]$, то $u^{sk+j}_{(a+1)k+n} = 0$;*
  - (ii) *если $j \in [n, s]$, то $u^{sk+j}_{(a+1)k+n} = (-1)^{\mathbb{I}\{n=1\}} \prod_{l=0}^{a}(t_l - t_s) \prod_{l=0}^{n-2}(t_l - t_{j-1})$;*
  - (iii) *если $j \in [s+1, k]$, то $u^{sk+j}_{(a+1)k+n} = (-1)^{\mathbb{I}\{n=1\}} \prod_{l=0}^{a}(t_l - t_s) \prod_{l=0}^{n-2}(t_l - t_j)$;*

(2) *при $n \in [a+2, k]$:*
- (i) *если $s \in [0, a], j \in [1, k]$, то $u^{sk+j}_{(a+1)k+n} = 0$;*
- (ii) *если $s \in [a+1, n-1]$, то*
  - (i) *если $j \in [1, n-1]$, то $u^{sk+j}_{(a+1)k+n} = 0$;*
  - (ii) *если $j \in [n, k]$, то $u^{sk+j}_{(a+1)k+n} = \prod_{l=0}^{a}(t_l - t_s) \prod_{l=0, l\neq s}^{n-1}(t_l - t_j)$;*
- (iii) *если $s \in [n, k]$, то*
  - (i) *если $j \in [1, a+1]$, то $u^{sk+j}_{(a+1)k+n} = 0$;*
  - (ii) *если $j \in [a+2, n]$, то $u^{sk+j}_{(a+1)k+n} = \prod_{l=0}^{a}(t_l - t_{j-1}) \prod_{l=0, l\neq j-1}^{n-1}(t_l - t_s)$;*
  - (iii) *если $j \in [n+1, s]$, то $u^{sk+j}_{(a+1)k+n} = \prod_{l=0}^{a}(t_l - t_{j-1})(t_l - t_s) \sum_{c=a+1}^{n-1} \prod_{l=a+1}^{c-1}(t_l - t_s) \prod_{l=c+1}^{n-1}(t_l - t_{j-1})$;*
  - (iv) *если $j \in [s+1, k]$, то $u^{sk+j}_{(a+1)k+n} = \prod_{l=0}^{a}(t_l - t_j)(t_l - t_s) \sum_{c=a+1}^{n-1} \prod_{l=a+1}^{c-1}(t_l - t_s) \prod_{l=c+1}^{n-1}(t_l - t_j)$.*

3.3. **Вычисление образующих для $H^*_{T^m}(H_{km})$.** Перейдем к вычислению образующих кольца эквивариантных когомологий для H_{km}, где $m > k \geqslant 1$, относительно действия тора T^m. Действие тора T^m на H_{km} имеет $(k+1)m$ неподвижных точек. Продолжим нумерацию из пункта 3.2: точка $([\underbrace{0 : ... : 0}_{i} : 1 : \underbrace{0 : ... : 0}_{k-i}], [\underbrace{0 : ... : 0}_{j} : 1 : \underbrace{0 : ... : 0}_{m-j}])$ (как и ранее обозначим ее (i, j)) будет иметь номер $jk + i + \mathbb{I}\{j > i\}$ при $j \in [0, k]$ и номер $(k+1)(j-1) + i + 1$ при $j \in [k+1, m]$. Каждый элемент образа будет иметь вид $(q_1, ..., q_{k(k+1)}, q_{k(k+1)+1}, ..., q_{(k+1)m})$, где компоненты вектора $q_1, ..., q_{k(k+1)}$ были найдены в пункте 3.2. Покажем, что

$$q_{(k+1)(i-1)+j+1} = \sum_{r=0}^{j-1} \Big(\sum_{n=0}^{r} \prod_{l=0}^{n-1}(t_l - t_i) \prod_{l=n+1}^{r}(t_l - t_j)\Big) p_{r+1} + \prod_{l=0}^{j-1}(t_l - t_i) \sum_{r=j}^{k-1} \Big(\prod_{l=j+1}^{r}(t_l - t_i)\Big) p_{r+1} + \sum_{s=0}^{j-1} \prod_{l=0}^{s}(t_l - t_i)\Big(-p_{(s+1)k+1} + \sum_{r=1}^{s} \prod_{l=0}^{r-1}(t_l - t_j) p_{(s+1)k+r+1} + \prod_{l=0}^{s}(t_l - t_j) \sum_{r=s+1}^{j-1} \Big(\sum_{c=s+1}^{r} \prod_{l=s+1}^{c-1}(t_l - t_i) \prod_{l=c+1}^{r}(t_l - t_j)\Big) p_{(s+1)k+r+1} + \prod_{l=0}^{s}(t_l - t_j) \prod_{l=s+1}^{j-1}(t_l - t_i) \sum_{r=j}^{k-1} \Big(\prod_{l=j+1}^{r}(t_l - t_i)\Big) p_{(s+1)k+r+1}\Big) + \sum_{s=j}^{k-1} \prod_{l=0}^{s}(t_l - t_i)\Big(-p_{(s+1)k+1} + \sum_{r=0}^{j-1} \prod_{l=0}^{r}(t_l - t_j) p_{(s+1)k+r+2}\Big) + \sum_{s=k}^{i-1} \prod_{l=0, l\neq j}^{s}(t_l - t_i) \sum_{r=-1}^{j-1} \Big(\prod_{l=0}^{r}(t_l - t_j)\Big) p_{(k+1)s+r+2}$$

для точек вида (j, i), где $i > j$ и $j \in [0, k], i \in [k+1, m]$.

Аналогично пункту 3.2 проверим, что для многочлена $q_{(k+1)(i-1)+j+1}$ выполняются достаточные условия (рассуждения о необходимости аналогичны пункту 3.2). Точка (j, i) с $j \in [0, k], i \in [k+1, m]$ содержится в замыкании одной одномерной орбиты с точками вида:

- $(j, b), 0 \leqslant b \leqslant j-1$. Аннигилятор стабилизатора этой орбиты равен $t_b - t_i$, то есть должно быть верно, что $q_{(k+1)(i-1)+j+1} - q_{bk+j} \in \langle t_b - t_i \rangle$;
- $(j, b), j+1 \leqslant b \leqslant k$. Аннигилятор стабилизатора орбиты равен $t_b - t_i$, то есть $q_{(k+1)(i-1)+j+1} - q_{bk+j+1} \in \langle t_b - t_i \rangle$;
- $(j, b), k+1 \leqslant b \leqslant i-1$. Аннигилятор стабилизатора орбиты $t_b - t_i$, то есть $q_{(k+1)(i-1)+j+1} - q_{(k+1)(b-1)+j+1} \in \langle t_b - t_i \rangle$;

- $(b,i), 0 \leqslant b \leqslant j-1$. Аннигилятор стабилизатора орбиты $t_b - t_j$, то есть $q_{(k+1)(i-1)+j+1} - q_{(k+1)(i-1)+b+1} \in \langle t_b - t_j \rangle$.

Таким образом, требуется проверить четыре утверждения, указанные выше. Выполним проверку, частично ссылаясь на проверку для точки (j,i) с $j<i, i \in [0,k]$.

(1) Рассмотрим разность многочленов $q_{(k+1)(i-1)+j+1} - q_{bk+j}$. Кратность коэффицентов при $p_{(s+1)k+r+1}$ для $0 \leqslant r \leqslant j-1$ и $-1 \leqslant s \leqslant j-1$ уже была доказана ранее. Рассмотрим остальные случаи:
   (i) $j \leqslant r \leqslant k-1$ и $-1 \leqslant s \leqslant b-1$ коэффицент при $p_{(s+1)k+r+1}$ в указанной разности равен $\prod_{l=0}^{s}(t_l - t_j)\prod_{l=0, l\neq j}^{r}(t_l - t_i)$, что кратно $t_b - t_i$ при $0 \leqslant b \leqslant j-1$.
   (ii) $b \leqslant s \leqslant j-1$, $j \leqslant r \leqslant k-1$ и $j \leqslant s \leqslant k-1$, $0 \leqslant r \leqslant j-1$ коэффицент при $p_{(s+1)k+r+1}$ равен $\prod_{l=0}^{s}(t_l - t_i) f$ (f – некоторый многочлен), что кратно $t_b - t_i$.
   (iii) $k \leqslant s \leqslant i-1$, $0 \leqslant r \leqslant j$ коэффицент при $p_{(s+1)k+r+1}$ равен $\prod_{l=0, l\neq j}^{s}(t_l - t_i) f$ (f – некоторый многочлен), что кратно $t_b - t_i$.

(2) Проверка того, что $q_{(k+1)(i-1)+j+1} - q_{bk+j+1} \in \langle t_b - t_i \rangle$ полностью аналогична предыдущему: существенная часть сводится к проверке разности многочленов $q_{ki+j+1} - q_{bk+j+1}$ из пункта 3.2.

(3) Проверка того, что $q_{(k+1)(i-1)+j+1} - q_{(k+1)(b-1)+j+1} \in \langle t_b - t_i \rangle$ сводится к последовательному преобразованию скобок типа $t_l - t_i = (t_l - t_b) + (t_b - t_i)$.

(4) Проверим, что $q_{(k+1)(i-1)+j+1} - q_{(k+1)(i-1)+b+1} \in \langle t_b - t_j \rangle$. Кратность коэффицентов в $q_{(k+1)(i-1)+j+1} - q_{(k+1)(i-1)+b+1}$ при $p_{(s+1)k+r+1}$ для $0 \leqslant r \leqslant j-1$ и $-1 \leqslant s \leqslant j-1$ была доказана ранее. Рассмотрим остальные случаи:
   (i) $j \leqslant r \leqslant k-1$ и $-1 \leqslant s \leqslant b-1$ коэффицент при $p_{(s+1)k+r+1}$ в указанной разности равен (все равенства по $mod(t_b - t_j)$) $\prod_{l=0}^{s}((t_l - t_b)+(t_b - t_j))\prod_{l=0,l\neq j}^{r}(t_l - t_i) - \prod_{l=0}^{s}(t_l - t_b)\prod_{l=0,l\neq b}^{r}(t_l - t_i) = \prod_{l=0}^{s}(t_l - t_b)\big(\prod_{l=0,l\neq j}^{r}(t_l - t_i) - \prod_{l=0,l\neq b}^{r}(t_l - t_i)\big) = (t_b - t_j)\prod_{l=0}^{s}(t_l - t_b)\prod_{l=0,l\neq b,l\neq j}^{r}(t_l - t_i)$.
   (ii) $b \leqslant s \leqslant j-1$ и $j \leqslant r \leqslant k-1$. Коэффициент при $p_{(s+1)k+r+1}$ равен $\prod_{l=0}^{s}(t_l - t_j) f$, ($f$ – некоторый многочлен), что кратно $t_b - t_j$ при указанных значениях s.
   (iii) $j \leqslant s \leqslant k-1$. При $-1 \leqslant r \leqslant b-1$ коэффицент при $p_{(s+1)k+r+2}$ равен $\prod_{l=0}^{s}(t_l - t_i)\big(\prod_{l=0}^{r}((t_l - t_b)+(t_b - t_j)) - \prod_{l=0}^{r}(t_l - t_b)\big)$. А при $b \leqslant r \leqslant j-1$ $\prod_{l=0}^{r}(t_l - t_j)\prod_{l=0}^{s}(t_l - t_i)$, что кратно $t_b - t_j$ при указанных значениях r.
   (iv) $k \leqslant s \leqslant i-1$. При $-1 \leqslant r \leqslant b-1$ коэффицент при $p_{(s+1)k+r+2}$ равен (все равенства по $mod(t_b - t_j)$): $\prod_{l=0}^{r}(t_l - t_j)\prod_{l=0,l\neq j}^{s}(t_l - t_i) - \prod_{l=0}^{r}(t_l - t_b)\prod_{l=0,l\neq b}^{s}(t_l - t_i) = (t_b - t_j)\prod_{l=0}^{r}(t_l - t_b)\prod_{l=0,l\neq b,l\neq j}^{s}(t_l - t_i)$. А при $b \leqslant r \leqslant j-1$ $\prod_{l=0}^{r}(t_l - t_j)\prod_{l=0,l\neq j}^{s}(t_l - t_i)$, что кратно $t_b - t_j$ при указанных значениях r.

Таким образом, был найден общий вид элемента образа $H^*_{T^m}(H_{km})$ для $k<m$. Исходя из доказанного вида многочленов можно сделать вывод о явном виде образующих кольца эквивариантных когомологий для H_{km} относительно действия тора T^m:

Предложение 9. *Для $1 \leqslant k < m$ кольцо эквивариантных когомологий $H^*_{T^m}(H_{km})$, есть свободный $\mathbb{Z}[t_1, ..., t_m]$ модуль с $m(k+1)$ образующими:*

- *$k(k+1)$ образующих $u_{(a+1)k+n} = (u^1_{(a+1)k+n}, ..., u^{k(k+1)}_{(a+1)k+n}, u^{k(k+1)+1}_{(a+1)k+n}, ..., u^{m(k+1)}_{(a+1)k+n})$, где $a \in [-1, k-1], n \in [1,k]$. Общий вид компонент вектора $u^{sk+j}_{(a+1)k+n}$ для $s \in [0,k], j \in [1,k]$ описан в предложении 8. При $s \in [k, m-1], j \in [1, k+1]$ $u^{s(k+1)+j}_{(a+1)k+n}$ имеет вид:*
  (1) *при $n \in [1, a+1]$:*
     (i) *если $j \in [1, n-1]$, то $u^{s(k+1)+j}_{(a+1)k+n} = 0$;*
     (ii) *если $j \in [n, k+1]$, то $u^{s(k+1)+j}_{(a+1)k+n} = (-1)^{\mathbb{I}\{n=1\}}\prod_{l=0}^{a}(t_l - t_{s+1})\prod_{l=0}^{n-2}(t_l - t_{j-1})$;*
  (2) *при $n \in [a+2, k]$:*
     (i) *если $j \in [1, a+1]$, то $u^{s(k+1)+j}_{(a+1)k+n} = 0$;*
     (ii) *если $j \in [a+2, n]$, то $u^{s(k+1)+j}_{(a+1)k+n} = \prod_{l=0}^{a}(t_l - t_{j-1})\prod_{l=0,l\neq j-1}^{n-1}(t_l - t_{s+1})$;*
     (iii) *если $j \in [n+1, k+1]$, то $u^{s(k+1)+j}_{(a+1)k+n} = \prod_{l=0}^{a}(t_l - t_{j-1})(t_l - t_{s+1})\sum_{c=a+1}^{n-1}\prod_{l=a+1}^{c-1}(t_l - t_{s+1})\prod_{l=c+1}^{n-1}(t_l - t_{j-1})$;*

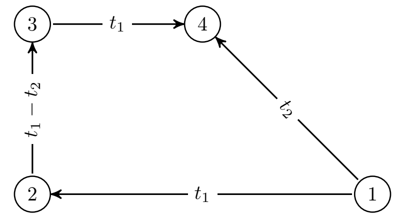

Рис. 2

- $(m-k)(k+1)$ *образующих* $u_{(k+1)a+n} = (u^1_{(k+1)a+n}, ..., u^{m(k+1)}_{(k+1)a+n})$, *где* $a \in [k, m-1], n \in [1, k+1]$. *Компонента вектора* $u^{s(k+1)+j}_{(k+1)a+n}$ $s \in [0, m-1], j \in [1, k+1]$ *имеет вид:*
  (1) *если* $s \in [0, a-1], j \in [1, k+1]$ *и* $s \in [a, m-1], j \in [1, n-1]$, *то* $u^{s(k+1)+j}_{(k+1)a+n} = 0$;
  (2) *если* $j \in [n, k+1], s \in [a, m-1]$, *то* $u^{s(k+1)+j}_{(k+1)a+n} = \prod_{l=0, l\neq j-1}^{a}(t_l - t_{s+1}) \prod_{l=0}^{n-2}(t_l - t_{j-1})$.

3.4. **Описание кольца эквивариантных когомологий** $H^*_{T^m}(H_{1m})$**.** Пользуясь предложениями 8 и 9, а также рассуждениями из пунктов 3.2 и 3.3 вычислим образующие для $H^*_{T^m}(H_{1m})$ при $m \geqslant 1$. Кроме того, найдем соотношения и дадим описание $H^*_{T^m}(H_{1m})$. Начнем с рассмотрения нескольких примеров.

Пример 10 (Образующие и соотношения для $H^*_{T^1}(H_{11})$)**.** В примере 6 было показано, что имеется следующий набор образующих: $\{u_1 = (1, 1), u_2 = (0, t)\}$. Нетрудно заметить, что единственным соотношением будет $u_2^2 = tu_2$. Таким образом, $H^*_{T^1}(\mathbb{C}P^1) \cong \mathbb{Z}[t][u_2]/u_2(u_2 - t) = 0$.

Пример 11 (Образующие и соотношения для $H^*_{T^2}(H_{12})$)**.** Рассматриваем действие T^2 на H_{12}. Имеем четыре неподвижные точки и четыре одномерные орбиты данного действия. Граф, соответствующий одномерным орбитам и неподвижным точкам с указанием аннигиляторов стабилизаторов орбит, приведен на рисунке 2.

Согласно теореме 5, любой элемент образа будет представляться в виде (q_1, q_2, q_3, q_4), где $q_i \in H^*_{T^2}(pt)$. С помощью рассуждений из пункта 3.3 заключаем, что q_i будут иметь следующий вид:

$$q_1 = p_1,\ q_2 = p_1 + t_1p_2,$$
$$q_3 = p_1 + t_2p_2 + (t_1 - t_2)p_3,$$
$$q_4 = p_1 + t_2p_2 - t_2p_3 + t_1t_2p_4.$$

Следовательно, имеем набор образующих $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (0, t_1, t_2, t_2)$, $u_3 = (0, 0, t_1 - t_2, -t_2)$ и $u_4 = (0, 0, 0, t_1t_2)$ (образующие можно было получить, не выписывая многочлены q_i, с помощью предложения 9). Заметим, что $u_2 + u_3 = (0, t_1, t_1, 0)$. Тогда $u_4 = (u_2 + u_3 - t_1)u_3$, а соотношения имеют вид: $(u_2 + u_3)(u_2 + u_3 - t_1) = 0, u_3^2 = u_3(u_2 + u_3 - t_2)$. Таким образом, $H^*_{T^2}(H_{12}) \cong \mathbb{Z}[t_1, t_2][u_2, u_3]/((u_2 + u_3)(u_2 + u_3 - t_1) = 0, u_3(t_2 - u_2) = 0)$.

Пример 12 (Образующие и соотношения для $H^*_{T^3}(H_{13})$)**.** Рассматриваем действие T^3 на H_{13}. Граф, соответствующий одномерным орбитам и неподвижным точкам с указанием аннигиляторов стабилизаторов орбит, приведен на рисунке 3. Пользуясь предложением 9, выпишем набор образующих: $\{u_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1), u_2 = (0, t_1, t_2, t_2, t_3, t_3), u_3 = (0, 0, t_1 - t_2, -t_2, t_1 - t_3, -t_3), u_4 = (0, 0, 0, t_1t_2, 0, t_1t_3),$ $u_5 = (0, 0, 0, 0, (t_1 - t_3)(t_2 - t_3), -t_3(t_2 - t_3)), u_6 = (0, 0, 0, 0, 0, t_1t_3(t_2 - t_3))\}$. Заметим, что $u_2 + u_3 = (0, t_1, t_1, 0, t_1, 0)$. Тогда как и выше, $u_4 = (u_2 + u_3 - t_1)u_3$, а $u_6 = (u_2 + u_3 - t_1)u_5$. Убедимся, что $u_5 = u_3(t_2 - u_2)$. Первые 4 координаты вектора в правой части будут равны нулю, так как выражение в правой части было соотношением на u_2, u_3 в H_{12}. Истинность данного тождества для двух последних координат легко проверяется явным вычислением. Соотношения будут иметь вид: $(u_2 + u_3)^2 = t_1(u_2 + u_3)$, и $u_3(t_2 - u_2)(t_3 - u_2) = 0$. Таким образом,

$$H^*_{T^3}(H_{13}) \cong \mathbb{Z}[t_1, t_2, t_3][u_2, u_3]/((u_2 + u_3)(u_2 + u_3 - t_1) = 0, u_3(t_2 - u_2)(t_3 - u_2) = 0).$$

Перейдем к общему случаю. Выпишем образующие кольца эквивариантных когомологий для H_{1m} относительно действия тора T^m. В этом случае имеется $2m$ образующих вида $(q_1, q_2, ..., q_{2m-1}, q_{2m})$, где $q_1 = p_1$, $q_2 = p_1 + t_1p_2$,

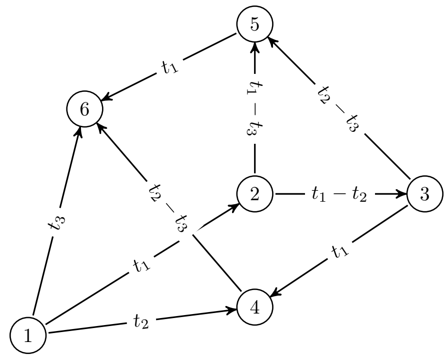

Рис. 3

$$q_{2(i-1)+1} = p_1 + t_i p_2 + \sum_{s=1}^{i-1} \prod_{l=1}^{s} (t_l - t_i) p_{2s+1},$$
$$q_{2(i-1)+2} = p_1 + t_i p_2 + \sum_{s=1}^{i-1} \prod_{l=0, l\neq 1}^{s} (t_l - t_i)\big(p_{2s+1} - t_1 p_{2s+2}\big), \text{ где } i \in [2, m].$$

Таким образом, первые две образующие равны $u_1 = (1, ..., 1)$, $u_2 = (0, t_1, t_2, t_2, ..., t_n, t_n, ..., t_m, t_m)$. Далее, при $1 \leqslant k \leqslant m-1$, $(2k+1)$-я образующая будет иметь вид

$$u_{2k+1} = (\underbrace{0, ..., 0}_{2k}, \prod_{l=1}^{k}(t_l - t_{k+1}), \prod_{l=0,l\neq 1}^{k}(t_l - t_{k+1}), ..., \prod_{l=1}^{k}(t_l - t_n), \prod_{l=0,l\neq 1}^{k}(t_l - t_n), ...$$
$$..., \prod_{l=1}^{k}(t_l - t_m), \prod_{l=0,l\neq 1}^{k}(t_l - t_m)),$$

а $(2k+2)$-я образующая

$$u_{2k+2} = (\underbrace{0, ..., 0}_{2k+1}, -t_1 \prod_{l=0,l\neq 1}^{k}(t_l - t_{k+1}), ..., 0, -t_1 \prod_{l=0,l\neq 1}^{k}(t_l - t_n), ..., 0, -t_1 \prod_{l=0,l\neq 1}^{k}(t_l - t_m)).$$

Заметим, что $u_2 + u_3 = (0, t_1, t_1, 0, ..., t_1, 0, ..., t_1, 0)$. Исходя из явного вида образующих, можно заключить, что $u_{2k+2} = (u_2 + u_3 - t_1) u_{2k+1}$. Получим выражения для u_{2k+1}, при $k = 2, ..., m-1$, через u_2 и u_3 и соотношения на u_2 и u_3.

Покажем, что u_{2k+1}, при $k = 2, ..., m-1$, определяются индуктивно следующим образом: $u_{2k+1} = u_{2k-1}(t_k - u_2) = u_3 \prod_{l=2}^{k}(t_l - u_2)$. Проверим данное равенство явным вычислением:

(1) $t_k - u_2 = (\underbrace{t_k, t_k - t_1, t_k - t_2, t_k - t_2, ..., t_k - t_{k-1}, t_k - t_{k-1}}_{2k-2}, 0, 0, t_k - t_{k+1}, t_k - t_{k+1}, ...$
$..., t_k - t_m, t_k - t_m)$;

(2) $u_{2k-1}(t_k - u_2) = (\underbrace{0, ..., 0}_{2k}, \prod_{l=1}^{k}(t_l - t_{k+1}), \prod_{l=0,l\neq 1}^{k}(t_l - t_{k+1}), ..., \prod_{l=1}^{k}(t_l - t_m), \prod_{l=0,l\neq 1}^{k}(t_l - t_m)) =$
$= u_{2k+1}$.

Перейдем к нахождению соотношений. Ясно, что соотношение $(u_2 + u_3)^2 = t_1(u_2 + u_3)$ будет присутствовать для любого m. Покажем, что для H_{1m} второе соотношение будет иметь вид: $u_{2m-1}(t_m - u_2) = u_3 \prod_{l=2}^{m}(t_l - u_2) = 0$. Из предыдущих рассуждений вытекает, что $u_{2m-1} = (\underbrace{0, ..., 0}_{2m-2}, *, *)$, а $t_m - u_2 = (\underbrace{*, ..., *}_{2m-2}, 0, 0)$. Это означает, что нужное соотношение выполнено.

Для завершения доказательства нужно показать, что других соотношений нет (это касается и рассмотренных выше примеров). Доказательство отсутствия иных соотношений проводится подсчетом размерностей: ряды Гильберта-Пуанкаре для $H^*_{T^m}(H_{1m})$ и $H^*(H_{1m})$ (описание кольца когомологий H_{1m} можно найти в [3]) имеют вид

$$R_{H^*_{T^m}(H_{1m})}(t^{\frac{1}{2}}) = \frac{1 + 2t + 2t^2 + ... + 2t^{m-1} + t^m}{(1-t)^m},$$
$$R_{H^*(H_{1m})}(t^{\frac{1}{2}}) = 1 + 2t + 2t^2 + ... + 2t^{m-1} + t^m.$$

Таким образом, для $m \geqslant 1$

$$H^*_{T^m}(H_{1m}) \cong \mathbb{Z}[t_1, t_2, ..., t_m][u_2, u_3]/((u_2+u_3)(u_2+u_3-t_1)=0, u_3\prod_{l=2}^m(t_l-u_2)=0).$$

Исходя из всего вышесказанного, получаем следующее утверждение:

Предложение 13. *Для $m \geqslant 1$ кольцо эквивариантных когомологий $H^*_{T^m}(H_{1m})$ имеет вид:*

$$H^*_{T^m}(H_{1m}) \cong \mathbb{Z}[t_1, t_2, ..., t_m][u_2, u_3]/((u_2+u_3)(u_2+u_3-t_1)=0, u_3\prod_{l=2}^m(t_l-u_2)=0),$$

где $u_2 = (0, t_1, t_2, t_2, ..., t_n, t_n, ..., t_m, t_m)$, $u_3 = (0, 0, t_1-t_2, -t_2, ..., t_1-t_n, -t_n, ..., t_1-t_m, -t_m)$.

3.5. **Описание кольца эквивариантных когомологий $H^*_{T^k}(H_{kk})$.** В этом пункте будет дано описание кольца эквивариантных когомологий $H^*_{T^k}(H_{kk})$ для любого $k \geqslant 2$.

Для начала покажем, что для образующих, вычисленных в предложении 8 верно следующее индуктивное задание:

(1) $u_{(a+1)k+1} = (-1)^{\mathbb{I}\{a\geqslant 0\}}\prod_{l=0}^a(t_l-u_{k+1})$, при $a \in [-1, k-1]$;

(2) при $a \geqslant 0, n \in [2, a+2]$:
   - $u_{(a+1)k+n} = u_{(a+1)k+n-1}(t_1-(u_2+u_{k+1}))$, при $n=2$;
   - $u_{(a+1)k+n} = u_{(a+1)k+n-1}(u_2+u_{k+1}-(t_1-t_{n-2}))$, при $n \in [3, a+2]$;

(3) при $a \in [-1, k-3], n \in [a+3, k]$:
   - $u_{(a+1)k+n} = u_{(a+1)k+n-1}(u_2-(t_1-t_{n-1}-t_{a+1}))$, при $n = a+3$;
   - $u_{(a+1)k+n} = u_{(a+1)k+n-1}(u_2-(t_1-t_{n-1}-t_{a+1})) - u_{(a+2)k+n-1}$, при $n \in [a+4, k]$.

Проверка данных утверждений будет заключаться в покоординатном рассмотрении равенств для указанных образующих.

Фиксируем произвольное значение a. Тогда векторы $u_{(a+1)k+n}$ делятся на два типа (образующие одного типа задаются одинаково, см. предложение 8): при $n \in [1, a+1]$ и $n \in [a+2, k]$ – будем называть их векторами типа 1 и векторами типа 2 соответственно.

Рассмотрим два подряд идущих вектора типа 1: векторы $u_{(a+1)k+n}$ и $u_{(a+1)k+n+1}$, где $a \in [1, k-1]$, $n \in [1, a]$. Выпишем компоненты этих векторов в зависимости от s, j:

(1) при $s \in [0, a], j \in [1, k]$ обе компоненты $u^{sk+j}_{(a+1)k+n}$ и $u^{sk+j}_{(a+1)k+n+1}$ равны нулю;

(2) при $s \in [a+1, k]$ компоненты $u^{sk+j}_{(a+1)k+n}$ и $u^{sk+j}_{(a+1)k+n+1}$ равны соответственно:
   - 0 и 0, при $j \in [1, n-1]$;
   - $(-1)^{\mathbb{I}\{n=1\}}\prod_{l=0}^a(t_l-t_s)\prod_{l=0}^{n-2}(t_l-t_{n-1})$ и 0, при $j=n$;
   - $(-1)^{\mathbb{I}\{n=1\}}\prod_{l=0}^a(t_l-t_s)\prod_{l=0}^{n-2}(t_l-t_{j-1})$ и $\prod_{l=0}^a(t_l-t_s)\prod_{l=0}^{n-1}(t_l-t_{j-1})$, при $j \in [n+1, s]$;
   - $(-1)^{\mathbb{I}\{n=1\}}\prod_{l=0}^a(t_l-t_s)\prod_{l=0}^{n-2}(t_l-t_j)$ и $\prod_{l=0}^a(t_l-t_s)\prod_{l=0}^{n-1}(t_l-t_j)$, при $j \in [s+1, k]$.

Таким образом, $u_{(a+1)k+n+1} = wu_{(a+1)k+n}$, где вектор w имеет следующий вид:

(1) при $s \in [0, a], j \in [1, k]$ и $s \in [a+1, k], j \in [1, n-1]$ компонента w^{sk+j} может быть произвольной;

(2) при $s \in [a+1, k]$:
   - $w^{sk+j} = 0$, при $j=n$;
   - $w^{sk+j} = (-1)^{\mathbb{I}\{n=1\}}(t_{n-1}-t_{j-1})$, при $j \in [n+1, s]$;
   - $w^{sk+j} = (-1)^{\mathbb{I}\{n=1\}}(t_{n-1}-t_j)$, при $j \in [s+1, k]$.

Из явного вида образующих следует, что $w = t_1-(u_2+u_{k+1})$, при $n=1$, и $w = u_2+u_{k+1}-(t_1-t_{n-1})$, при $n \geqslant 2$. Аналогичными рассуждениями проверяются равенства при $n = a+1$ (то есть при переходе от последнего вектора типа 1 к первому вектору типа 2): $w = t_1-(u_2+u_{k+1})$ при $a=0$ и $w = u_2+u_{k+1}-(t_1-t_a)$ при $a \geqslant 1$. Следовательно утверждение 2 полностью проверено.

Теперь будем рассматривать два подряд идущих вектора типа 2, то есть векторы $u_{(a+1)k+n}$ и $u_{(a+1)k+n+1}$, где $a \in [-1, k-3], n \in [a+2, k-1]$. Рассмотрим покоординатную разность двух векторов $(u_2-(t_1-t_n-t_{a+1}))u_{(a+1)k+n} - u_{(a+1)k+n+1}$ и покажем, что при $n = a+2$ она равна нулю, а при прочих значениях n $u_{(a+2)k+n}$.

Координаты вектора указанной выше разности имеют следующий вид:

(1) 0, при $s \in [0, a+1], j \in [1, k]$

(2) при $s \in [a+2, n-1]$:
- 0, при $j \in [1, n-1]$;
- $(t_n + t_{a+1} - t_j - t_s)\prod_{l=0}^{a}(t_l - t_s)\prod_{l=0, l\neq s}^{n-1}(t_l - t_j) - \prod_{l=0}^{a}(t_l - t_s)\prod_{l=0, l\neq s}^{n}(t_l - t_j) = \prod_{l=0}^{a+1}(t_l - t_s)\prod_{l=0, l\neq s}^{n-1}(t_l - t_j)$, при $j \in [n, k]$;

(3) при $s \in [n, k]$:
- 0, при $j \in [1, a+2]$;
- $\prod_{l=0}^{a+1}(t_l - t_{j-1})\prod_{l=0, l\neq j-1}^{n-1}(t_l - t_s)$, при $j \in [a+3, n]$;
- $(t_n + t_{a+1} - t_{j-1} - t_s)\prod_{l=0}^{a}(t_l - t_{j-1})(t_l - t_s)\sum_{c=a+1}^{n-1}\prod_{l=a+1}^{c-1}(t_l - t_s)\prod_{l=c+1}^{n-1}(t_l - t_{j-1}) - \prod_{l=0}^{a}(t_l - t_{j-1})(t_l - t_s)\sum_{c=a+1}^{n}\prod_{l=a+1}^{c-1}(t_l - t_s)\prod_{l=c+1}^{n}(t_l - t_{j-1})$, при $j \in [n+1, s]$;
- $(t_n + t_{a+1} - t_j - t_s)\prod_{l=0}^{a}(t_l - t_j)(t_l - t_s)\sum_{c=a+1}^{n-1}\prod_{l=a+1}^{c-1}(t_l - t_s)\prod_{l=c+1}^{n-1}(t_l - t_j) - \prod_{l=0}^{a}(t_l - t_j)(t_l - t_s)\sum_{c=a+1}^{n}\prod_{l=a+1}^{c-1}(t_l - t_s)\prod_{l=c+1}^{n}(t_l - t_j)$, при $j \in [s+1, k]$.

Нетрудно заметить, что при $n = a+2$ указанный вектор нулевой. Кроме того, при $n \geqslant a+3$ компоненты вектора с номерами $sk+j$, где $s \in [0, n-1], j \in [1, k]$ и $s \in [n, k], j \in [1, n]$, совпадают с соответствующими компонентами вектора $u_{(a+2)k+n}$. Таким образом, осталось показать равенство соответствующих компонент векторов при $s \in [n, k], j \in [n+1, s]$ (рассуждения для случая $s \in [n, k], j \in [s+1, k]$ будут совпадать при замене $t_{j-1} \to t_j$). Введем обозначения:

$$f = \prod_{l=0}^{a}(t_l - t_{j-1})(t_l - t_s)\sum_{c=a+1}^{n-1}\prod_{l=a+1}^{c-1}(t_l - t_s)\prod_{l=c+1}^{n-1}(t_l - t_{j-1}),$$
$$g = \prod_{l=0}^{a}(t_l - t_{j-1})(t_l - t_s)\sum_{c=a+1}^{n}\prod_{l=a+1}^{c-1}(t_l - t_s)\prod_{l=c+1}^{n}(t_l - t_{j-1}),$$
$$h = \prod_{l=0}^{a+1}(t_l - t_{j-1})(t_l - t_s)\sum_{c=a+2}^{n-1}\prod_{l=a+2}^{c-1}(t_l - t_s)\prod_{l=c+1}^{n-1}(t_l - t_{j-1}).$$

Нужно показать, что $(t_n + t_{a+1} - t_{j-1} - t_s)f - g = (t_n - t_s)f + (t_{a+1} - t_{j-1})f - g = h$. Рассмотрим второе слагаемое: $(t_{a+1} - t_{j-1})f = \prod_{l=0}^{a+1}(t_l - t_{j-1})\prod_{l=0}^{a}(t_l - t_s)\big(\prod_{l=a+2}^{n-1}(t_l - t_{j-1}) + \sum_{c=a+2}^{n-1}\prod_{l=a+1}^{c-1}(t_l - t_s)\prod_{l=c+1}^{n-1}(t_l - t_{j-1})\big) = \prod_{l=0}^{n-1}(t_l - t_{j-1})\prod_{l=0}^{a}(t_l - t_s) + h$. Таким образом, требуется показать, что $(t_n - t_s)f + \prod_{l=0}^{n-1}(t_l - t_{j-1})\prod_{l=0}^{a}(t_l - t_s) - g = 0$. Разделим это выражение на $\prod_{l=0}^{a}(t_l - t_{j-1})(t_l - t_s)$, тогда получим: $(t_n - t_s)\sum_{c=a+1}^{n-1}\prod_{l=a+1}^{c-1}(t_l - t_s)\prod_{l=c+1}^{n-1}(t_l - t_{j-1}) + \prod_{l=a+1}^{n-1}(t_l - t_{j-1}) - \sum_{c=a+1}^{n}\prod_{l=a+1}^{c-1}(t_l - t_s)\prod_{l=c+1}^{n}(t_l - t_{j-1}) = \sum_{c=a+1}^{n-1}\prod_{l=a+1}^{c-1}(t_l - t_s)\prod_{l=c+1}^{n}(t_l - t_{j-1}) + (t_{j-1} - t_s)\sum_{c=a+1}^{n-1}\prod_{l=a+1}^{c-1}(t_l - t_s)\prod_{l=c+1}^{n-1}(t_l - t_{j-1}) + \prod_{l=a+1}^{n-1}(t_l - t_{j-1}) - \sum_{c=a+1}^{n}\prod_{l=a+1}^{c-1}(t_l - t_s)\prod_{l=c+1}^{n}(t_l - t_{j-1}) = (t_{j-1} - t_s)\sum_{c=a+1}^{n-1}\prod_{l=a+1}^{c-1}(t_l - t_s)\prod_{l=c+1}^{n-1}(t_l - t_{j-1}) + \prod_{l=a+1}^{n-1}(t_l - t_{j-1}) - \prod_{l=a+1}^{n-1}(t_l - t_s)$. Рассмотрим сумму первых двух слагаемых:
$(t_{j-1} - t_s)\sum_{c=a+1}^{n-1}\prod_{l=a+1}^{c-1}(t_l - t_s)\prod_{l=c+1}^{n-1}(t_l - t_{j-1}) + \prod_{l=a+1}^{n-1}(t_l - t_{j-1}) = (t_{j-1} - t_s)\prod_{l=a+2}^{n-1}(t_l - t_{j-1}) + \prod_{l=a+1}^{n-1}(t_l - t_{j-1}) + (t_{j-1} - t_s)\sum_{c=a+2}^{n-1}\prod_{l=a+1}^{c-1}(t_l - t_s)\prod_{l=c+1}^{n-1}(t_l - t_{j-1}) = (t_{j-1} - t_s + t_{a+1} - t_{j-1})\prod_{l=a+2}^{n-1}(t_l - t_{j-1}) + (t_{j-1} - t_s)\sum_{c=a+2}^{n-1}\prod_{l=a+1}^{c-1}(t_l - t_s)\prod_{l=c+1}^{n-1}(t_l - t_{j-1}) = (t_{a+1} - t_s)\prod_{l=a+2}^{n-1}(t_l - t_{j-1}) + (t_{j-1} - t_s)\sum_{c=a+2}^{n-1}\prod_{l=a+1}^{c-1}(t_l - t_s)\prod_{l=c+1}^{n-1}(t_l - t_{j-1}) = \ldots = \prod_{l=a+1}^{n-3}(t_l - t_s)\prod_{l=n-2}^{n-1}(t_l - t_{j-1}) +$
$+ (t_{j-1} - t_s)\sum_{c=n-2}^{n-1}\prod_{l=a+1}^{c-1}(t_l - t_s)\prod_{l=c+1}^{n-1}(t_l - t_{j-1}) = \prod_{l=a+1}^{n-3}(t_l - t_s)\prod_{l=n-2}^{n-1}(t_l - t_{j-1}) + (t_{j-1} - t_s)\prod_{l=a+1}^{n-3}(t_l - t_s)(t_{n-1} - t_{j-1}) + (t_{j-1} - t_s)\prod_{l=a+1}^{n-2}(t_l - t_s) = \prod_{l=a+1}^{n-2}(t_l - t_s)(t_{n-1} - t_{j-1}) + (t_{j-1} - t_s)\prod_{l=a+1}^{n-2}(t_l - t_s) = \prod_{l=a+1}^{n-1}(t_l - t_s)$. Это завершает доказательство третьего утверждения. Проверка первого утверждения тривиальна.

Таким образом, было получено индуктвное задание образующих для $H^*_{T^k}(H_{kk})$. Перейдем к нахождению соотношений. Нетрудно заметить, что соотношение степени $k+1$ будет иметь вид $\prod_{l=0}^{k}(u_2 + u_{k+1} - (t_1 - t_l)) = 0$ (следует из явного вида образующих). Явным вычислением проверяется, что соотношение степени k будет иметь вид $u_{2k} - (u_2 - (t_1 - t_k))u_k = 0$. Это соотношение нетривиально, так как в индуктивном задании u_{2k} не содержатся множители вида $t_k f$, где f – некоторый многочлен, а $u_k \neq 0$. То, что других соотношений нет, показывается подсчетом размерностей:

$$R_{H^*_{T^k}(H_{kk})}(t^{\frac{1}{2}}) = (1-t)^{-k}\sum_{l=0}^{k-1}\left((l+1)t^l + (k-l)t^{k+l}\right),$$

что согласуется с видом $H^*(H_{kk})$.

Предложение 14. *Для $k \geqslant 2$ кольцо эквивариантных когомологий $H^*_{T^k}(H_{kk})$ имеет вид:*

$$H^*_{T^k}(H_{kk}) \cong \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_k][u_2, u_{k+1}]/(\textstyle\prod_{l=0}^{k}(u_2 + u_{k+1} - (t_1 - t_l)) = 0,\ u_{2k} - (u_2 - (t_1 - t_k))u_k = 0), \text{ где}$$
$$deg\, u_2 = deg\, u_{k+1} = 2,\ deg\, u_{2k} = 2k,$$

$u_1, ..., u_{(k+1)k}$ *имеют вид:*
- $u_{(a+1)k+1} = (-1)^{\mathbb{I}\{a\geqslant 0\}} \prod_{l=0}^{a}(t_l - u_{k+1}), a \in [-1, k-1]$;
- *при* $a \geqslant 0, n \in [2, a+2]$:
  - $u_{(a+1)k+n} = u_{(a+1)k+n-1}(t_1 - (u_2 + u_{k+1}))$, *при* $n = 2$;
  - $u_{(a+1)k+n} = u_{(a+1)k+n-1}(u_2 + u_{k+1} - (t_1 - t_{n-2}))$, *при* $n \in [3, a+2]$;
- *при* $a \in [-1, k-3], n \in [a+3, k]$:
  - $u_{(a+1)k+n} = u_{(a+1)k+n-1}(u_2 - (t_1 - t_{n-1} - t_{a+1}))$, *при* $n = a+3$;
  - $u_{(a+1)k+n} = u_{(a+1)k+n-1}(u_2 - (t_1 - t_{n-1} - t_{a+1})) - u_{(a+2)k+n-1}$, *при* $n \in [a+4, k]$.

3.6. **Описание кольца эквивариантных когомологий $H^*_{T^m}(H_{km})$.** В этом пункте будет дано описание кольца эквивариантных когомологий $H^*_{T^m}(H_{km})$ для любого $m > k \geqslant 2$.

Как и в пункте 3.5 требуется найти представление для образующих, вычисленных в предложении 9. Для образующих $u_1, ..., u_{k(k+1)}$ верно то же индуктивное задание через u_2 и u_{k+1}, что и в пункте 3.5 (требуется проверить равенства только для компонент с номерами $k(k+1)+1, ..., (k+1)m$). Образующие $u_{k(k+1)+1}, ..., u_{(k+1)m}$ задаются следующим образом:

(1) $u_{k(k+1)+1} = (u_2 - (t_1 - t_k))u_k - u_{2k}$;
(2) $u_{(k+1)(a+1)+1} = u_{(k+1)a+1}(t_{a+1} - u_{k+1})$, при $a \in [k, m-2]$;
(3) $u_{(k+1)a+n} = u_{(k+1)a+n-1}(u_2 + u_{k+1} - (t_1 - t_{n-2}))$, при $a \in [k, m-1], n \in [2, k+1]$.

Проверка всех этих фактов полностью аналогична проверке пукта 3.5 и проводится явным покоординатным вычислением. Соотношение степени $k+1$ будет таким же, как и в $H^*_{T^k}(H_{kk})$: $\prod_{l=0}^{k}(u_2 + u_{k+1} - (t_1 - t_l)) = 0$. Покажем, что соотношение степени m имеет вид:

$$(u_{2k} - (u_2 - (t_1 - t_k))u_k) \prod_{l=k+1}^{m}(t_l - u_{k+1}) = 0.$$

Из индуктивного задания образующих и их явного вида, указанного в предложении 9, следует, что $(u_{2k} - (u_2 - (t_1 - t_k))u_k) \prod_{l=k+1}^{m}(t_l - u_{k+1}) = (t_m - u_{k+1})u_{(k+1)(m-1)+1}$. При этом $u_{(k+1)(m-1)+1} = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{(k+1)(m-1)}, \underbrace{*, ..., *}_{k+1})$, а $(t_m - u_{k+1}) = (\underbrace{*, *, ..., *}_{(k+1)(m-1)}, \underbrace{0, ..., 0}_{k+1})$, где $*$ – некоторое значение. Таким образом, $(t_m - u_{k+1})u_{(k+1)(m-1)+1} = 0$. Отсутствие иных соотношений, как и ранее, проверяется подсчетом размерностей. Таким образом, может быть сфомулирован следующий результат:

Теорема 15. *Для* $2 \leqslant k \leqslant m$ *кольцо эквивариантных когомологий* $H^*_{T^m}(H_{km})$ *имеет вид:*

$$H^*_{T^m}(H_{km}) \cong \mathbb{Z}[t_1, ..., t_m][u_2, u_{k+1}]/(\textstyle\prod_{l=0}^{k}(u_2 + u_{k+1} - (t_1 - t_l)) = 0,$$
$$(u_{2k} - (u_2 - (t_1 - t_k))u_k) \textstyle\prod_{l=k+1}^{m}(t_l - u_{k+1}) = 0), \text{ где } deg\, u_2 = deg\, u_{k+1} = 2,\ deg\, u_{2k} = 2k,$$

$u_1, ..., u_{(k+1)k}$ *имеют вид:*
- $u_{(a+1)k+1} = (-1)^{\mathbb{I}\{a\geqslant 0\}} \prod_{l=0}^{a}(t_l - u_{k+1}), a \in [-1, k-1]$;
- *при* $a \geqslant 0, n \in [2, a+2]$:
  - $u_{(a+1)k+n} = u_{(a+1)k+n-1}(t_1 - (u_2 + u_{k+1}))$, *при* $n = 2$;
  - $u_{(a+1)k+n} = u_{(a+1)k+n-1}(u_2 + u_{k+1} - (t_1 - t_{n-2}))$, *при* $n \in [3, a+2]$;
- *при* $a \in [-1, k-3], n \in [a+3, k]$:
  - $u_{(a+1)k+n} = u_{(a+1)k+n-1}(u_2 - (t_1 - t_{n-1} - t_{a+1}))$, *при* $n = a+3$;
  - $u_{(a+1)k+n} = u_{(a+1)k+n-1}(u_2 - (t_1 - t_{n-1} - t_{a+1})) - u_{(a+2)k+n-1}$, *при* $n \in [a+4, k]$.

3.7. **Описание кольца эквивариантных когомологий $H^*_{T^m}(H_{2m})$.** Рассмотрим пример использования теоремы 15 и дадим описание $H^*_{T^m}(H_{2m})$ при $m \geqslant 2$. С помощью теоремы получаем, что $u_4 = u_3(t_1 - (u_2 + u_3))$ и соотношения имеют вид

$$(u_2 + u_3)(u_2 + u_3 - t_1)(u_2 + u_3 - (t_1 - t_2)) = 0,$$
$$(u_3(t_1 - (u_2 + u_3)) - (u_2 - (t_1 - t_2))u_2) \textstyle\prod_{l=3}^{m}(t_l - u_3) = 0,$$

где $u_2 = (0, t_1 - t_2, 0, -t_2, t_1 - t_2, -t_2, t_1 - t_3, -t_3, t_1 - t_2 - t_3, ..., t_1 - t_n, -t_n, t_1 - t_2 - t_n, ..., t_1 - t_m, -t_m, t_1 - t_2 - t_m)$, $u_3 = (0, 0, t_1, t_1, t_2, t_2, t_3, t_3, t_3, ..., t_n, t_n, t_n, ..., t_m, t_m, t_m)$. Таким образом, для $m \geqslant 2$

$$H^*_{T^m}(H_{2m}) \cong \mathbb{Z}[t_1, ..., t_m][u_2, u_3]/((u_2 + u_3)(u_2 + u_3 - t_1)(u_2 + u_3 - (t_1 - t_2)) = 0,$$
$$(u_3(t_1 - (u_2 + u_3)) - (u_2 - (t_1 - t_2))u_2) \textstyle\prod_{l=3}^{m}(t_l - u_3) = 0).$$

3.8. **Связь между обычными и эквивариантными когомологиями.** Рассмотрим связь между обычными и эквивариантными когомологиями H_{ij}. В следующей теореме приведено описание кольца когомологий $H^*(H_{ij})$:

Теорема 16 (см. [3], Теорема 6.46)**.** *Кольцо когомологий гиперповерхности Милнора H_{ij} задается следующим образом:*

$$H^*(H_{ij}) \cong \mathbb{Z}[u,v] \Big/ \Big(u^{i+1} = 0, v^{j-i} \textstyle\sum_{k=0}^{i} u^k v^{i-k} = 0\Big), \text{ где } deg\, u = deg\, v = 2.$$

Так как H_{ij} эквивариантно формально относительно действия тора, то обычные когомологии $H^*(H_{ij})$ могут быть получены из эквивариантных когомологий $H^*_{T^j}(H_{ij})$ следующим образом:

$$H^*(H_{ij}) = \frac{H^*_{T^j}(H_{ij})}{M \cdot H^*_{T^j}(H_{ij})},$$

где $M = \langle t_1, ..., t_j \rangle$ – максимальный однородный идеал в $H^*_{T^j}(pt)$. То есть кольцо когомологий $H^*(H_{ij})$ есть кольцо эквивариантных когомологий $H^*_{T^j}(H_{ij})$ при $t_l = 0, l \in [1, j]$.

В пунктах 3.4 и 3.7 было получено описание колец эквивариантых когомологий для H_{1j} и H_{2j} соответственно. Тогда $H^*(H_{1j})$ и $H^*(H_{2j})$ имеют вид:

$$H^*(H_{1j}) \cong \mathbb{Z}[u_2, u_3]/((u_2 + u_3)^2 = 0, u_3 u_2^{j-1} = 0),$$
$$H^*(H_{2j}) \cong \mathbb{Z}[u_2, u_3]/((u_2 + u_3)^3 = 0,\ (u_3^2 + u_2 u_3 + u_2^2) u_3^{j-2} = 0).$$

Таким образом, после замены образующих $u = u_2 + u_3$, $v = -u_2$ в первом случае и $u = u_2 + u_3$, $v = -u_3$ во втором, описание колец $H^*(H_{1j})$ и $H^*(H_{2j})$, данное с помощью эквивариантных когомологий, совпадает с описанием из теоремы 16.

4. Заключение

В первой части работы мы получили ограничение на размерность эффективного действия тора на гиперповерхности Милнора H_{ij} следующего вида: для $i \geqslant 3$ максимальная размерность тора T^k, действующего эффективно и гамильтоново на H_{ij} находится в промежутке $j \leqslant k \leqslant i+j-2$; для $i = 1, 2$ показано, что T^j это максимальный тор с указанными свойствами. Возможно продолжение исследований в данном направлении, а именно нахождение максимального k при котором тор T^k действует эффективно и гамильтоново на H_{ij} при $i \geqslant 3$.

Во второй части работы мы получили описание кольца эквивариантных когомологий $H^*_{T^j}(H_{ij})$ как свободного $\mathbb{Z}[t_1, ..., t_j]$ модуля: привели общий вид образующих, порождающих $H^*_{T^j}(H_{ij})$ для любых i, j. Кроме того, получили описание $H^*_{T^j}(H_{ij})$ с помощью образующих и соотношений.

Список литературы

[1] Atiyah, M. F. *Convexity and commuting hamiltonians*. Bulletin of the London Math. Soc., 1982.

[2] Goresky M., Kottwitz R., MacPherson R. *Equivariant cohomology, Koszul duality and the localization theorem.* Invent. Math. 131 (25-83), 1998.

[3] Бухштабер В. М; Панов Т. Е. *Торические действия в топологии и комбинаторике.* Издательство МЦНМО, 2004.

[4] Franz M., Puppe V. *Exact cohomology sequences with integral coefficients for torus actions.* 2000.

[5] Guillemin V., Zara C. *One-skeleta, Betti numbers and equivariant cohomology.* 2000.

[6] Tymoczko, J. S. *An introduction to equivariant cohomology and homology, following Goresky, Kottwitz, and MacPherson*, 2005.