МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет, 4 курс
Кафедра высшей геометрии и топологии

Котельский Артем

КУРСОВАЯ РАБОТА

Топология гамильтоново-минимальных лагранжевых подмногообразий

Научный руководитель — Панов Т. Е.

1. Пересечения квадрик

Доказательство фактов в этой и последующих частях, представленных без объяснения, можно найти в [1], за исключением двух, которые будут специально отмечены.

Пусть дан набор из m векторов

$$\Gamma = \{\gamma_k = (\gamma_{1,k}, \dots, \gamma_{m-n,k}) \in \mathbb{R}^{m-n}, 1 \leqslant k \leqslant m\}$$

и вектор $c = (c_1, \dots, c_{m-n}) \in \mathbb{R}^{m-n}$. Рассмотрим пересечения $m-n$ вещественных квадрик в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{C}^m$:

$$R_\Gamma = \{u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{k=1}^{m} \gamma_{jk} u_k^2 = c_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m-n\} \tag{1.1}$$

$$Z_\Gamma = \{z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : \sum_{k=1}^{m} \gamma_{jk} u_k^2 = c_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m-n\} \tag{1.2}$$

и потребуем, чтобы эти пересечения были непусты и невырождены. Тогда R_Γ и Z_Γ являются гладкими многообразиями в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{C}^m$ размерности n и $m+n$ соответственно, а векторы $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ порождают все $\mathbb{R}^{m-n}$.

Тор $\mathbb{T}^m$ действует на Z_Γ покоординатно. Аналогично, «вещественный тор» $(\mathbb{Z}/2)^m \subset \mathbb{T}^m$ действует на R_Γ.

Потребуем теперь, чтобы $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ порождали некоторую решетку L в $\mathbb{R}^{m-n}$. Тогда получаем, что $L \cong \mathbb{Z}^{m-n}$. Пусть

$$L^* = \{\lambda^* \in \mathbb{R}^{m-n} : (\lambda^*, \lambda) \in \mathbb{Z} \quad \textit{для} \quad \textit{всех} \quad \lambda \in L\}$$

— двойственная решетка. Векторы γ_i задают $(m-n)$-мерную торическую подгруппу в $\mathbb{T}^m$, решетка характеров которой изоморфна L:

$$T_\Gamma = \{(e^{2\pi i(\gamma_1, \phi)}, \dots, e^{2\pi i(\gamma_m, \phi)}) \in \mathbb{T}^m\} \cong \mathbb{T}^{m-n},$$

где $\phi \in \mathbb{R}^{m-n}$. $T_\Gamma \cong \mathbb{R}^{m-n}/L^*$ — естественный изоморфизм. Положим

$$D_\Gamma = \frac{1}{2} L^*/L^* \cong (\mathbb{Z}/2)^{m-n}.$$

Заметим, что D_Γ канонически вкладывается, как подгруппа в T_Γ.

Предложение 1.1. *Группа T_Γ действует на Z_Γ почти свободно.*

2. Лагранжевы погружения

Пусть (M, ω) - симплектическое многообразие размерности $2n$. Погружение $i : N \longrightarrow M$ многообразия размерности n называется лагранжевым, если $i^*(\omega) = 0$. Если i - вложение, то N называют лагранжевым подмногообразием в M. Векторное поле ξ называется гамильтоновым, если 1-форма $\omega(\cdot, \xi)$ является точной.

Пусть на M выбрана согласованная риманова метрика. Лагранжево погружение $i : N \longrightarrow M$ называется гамильтоново минимальным (H-минимальным), если вариации объёма вдоль всех гамильтоновых векторных полей с компактным носителем равны нулю, т.е.

$$\frac{d}{dt} vol(i_t(N))|_{t=0} = 0,$$

где $i_0(N) = i(N)$, $i_t(N)$ — деформация $i(N)$ вдоль гамильтонова векторного поля (т.о. это обобщение минимальных погружений, когда вариации вдоль всех полей равны нулю).

Используя обозначения из предыдущего раздела, рассмотрим отображение

$$j : R_\Gamma \times T_\Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^m,$$
$$(u, \phi) \to u \cdot \phi = (u_1 e^{2\pi(\gamma_1, \phi)}, \dots, u_m e^{2\pi(\gamma_m, \phi)}).$$

Заметим, что $j(R_\Gamma \times T_\Gamma) \subset Z_\Gamma$. Диагональное действие D_Γ на $R_\Gamma \times T_\Gamma$ свободно, т.к. оно свободно на втором сомножителе. Поэтому фактор-пространство

$$N_\Gamma = R_\Gamma \times_{D_\Gamma} T_\Gamma$$

является m-мерным многообразием.

Лемма 2.1. *1) Отображение $j : R_\Gamma \times T_\Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^m$ индуцирует погружение $i_\Gamma : N_\Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^m$.*

2) Это погружение является вложением тогда и только тогда, когда действие $T_\Gamma : Z_\Gamma$ свободно.

Снабдим $\mathbb{C}^m$ стандартной симплектической формой $\frac{i}{2} \sum dz_k \wedge d\overline{z_k}$.

Теорема А. *Погружение $i_\Gamma : N_\Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^m$ является лагранжевым H-минимальным.*

Доказательство этого факта можно найти в [2].

Поскольку действие D_Γ на $N_\Gamma = R_\Gamma \times T_\Gamma$ свободно на втором сомножителе, всегда есть расслоение

$$N_\Gamma \longrightarrow T^{m-n} = T_\Gamma / D_\Gamma$$

со слоем R_Γ. А если действие $T_\Gamma : Z_\Gamma$ свободно (погружение является вложением), то и $D_\Gamma : R_\Gamma$ свободно, и мы имеем второе расслоение

$$N_\Gamma \longrightarrow R_\Gamma / D_\Gamma$$

со слоем T_Γ.

3. Случай одной и двух квадрик

Далее мы будем рассматривать только случай компактных R_Γ и N_Γ, и только случай H-минимальных вложений (т.е. $T_\Gamma : Z_\Gamma$ свободно).

Предложение 3.1. *(случай одной квадрики) В случае $m - n = 1$ N_Γ лагранжево H-минимально вкладывается в $\mathbb{C}^m$ тогда и только тогда, когда $\gamma_1 = \dots = \gamma_m$. В этом случае топологический тип $N = N(m)$ зависит лишь от четности m, а именно*

$$N(m) \cong S^{m-1} \times S^1, \qquad \text{если} \quad m \quad \text{четно},$$
$$N(m) \cong K^m, \qquad \text{если} \quad m \quad \text{нечетно}.$$

В случае $m - n = 2$ R_Γ линейными преобразованиями приводится к виду

$$\begin{cases} \gamma_{11} u_1^2 + \dots & + \gamma_{1m} u_m^2 = c_1 \\ \gamma_{21} u_1^2 + \dots + \gamma_{2p} u_p^2 - \gamma_{2(p+1)} u_{p+1}^2 - \dots & - \gamma_{2m} u_m^2 = 0 \end{cases}$$

где все γ_{ij} и c_1 положительны. Таким образом R_Γ диффеоморфно $S^{p-1} \times S^{q-1}$ где $q = m - p$.

Предложение 3.2. *(случай двух квадрик) В случае $m - n = 2$ если N_Γ лагранжево H-минимально вкладывается в $\mathbb{C}^m$ ($T_\Gamma : Z_\Gamma$, $D_\Gamma : R_\Gamma$ свободны), то с точностью до перенумерации координат действие $D_\Gamma : R_\Gamma$ выглядит так:*

$$\varphi_1 : (u_1, \dots, u_m) \to (-u_1, \dots, -u_k, -u_{k+1}, \dots, -u_p, u_{p+1}, \dots, u_m)$$
$$\varphi_2 : (u_1, \dots, u_m) \to (-u_1, \dots, -u_k, u_{k+1}, \dots, u_p, -u_{p+1}, \dots, -u_m)$$

где φ_1, φ_2 - специально выбранный базис D_Γ. Таким образом топология $N_\Gamma = N_k(p, q)$ зависит только от чисел p, q и k.

$$N_k(p, q) \cong (S^{p-1} \times S^{q-1}) \times_{\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2} (S^1 \times S^1)$$

где инволюции на $S^{p-1} \times S^{q-1}$ описаны выше. Так как φ_1 не действует на S^{q-1} и действует антиподально на S^{p-1}, мы имеем

$$N_k(p, q) = N(p) \times_{\mathbb{Z}/2} (S^{q-1} \times S^1)$$

где $N(p)$ - многообразие из предложения 3.1. Отсюда видно, что мы имеем расслоение

$$N_k(p, q) \longrightarrow N(q)$$

со слоем $N(p)$.

Утверждение 3.3. *Предположим что p и q четны ($N(p) \cong S^{p-1} \times S^1$, $N(q) \cong S^{q-1} \times S^1$). Тогда при k нечетном расслоения $N_k(p, q) \longrightarrow T^2$ и $\rho = N_k(p, q) \longrightarrow N(q)$ со слоями $R(p, q)$ и $N(p)$ соответственно нетривиальны. При k четном расслоения тривиальны, и*

$$N_k(p, q) \cong N(p) \times N(q) \cong S^{p-1} \times S^{q-1} \times T^2$$

Доказательство. Случай нечетного k следует из леммы, которая следует сразу за этим утверждением. При четном k расслоение $N_k(p, q) \longrightarrow N(q)$ со слоем $N(p)$ тривиально по следующим соображениям. Введем на $N(p) \cong S^{p-1} \times S^1$ координаты $(x_1, \dots, x_p, \phi), \phi \in (0, 2\pi), x_i \in \mathbb{R}, x_1^2 + \dots + x_p^2 = 1$, а на $S^{q-1} \times S^1$ координаты $(y, \psi), \psi \in (0, 2\pi)$. Рассмотрим послойный гомеоморфизм тривиального расслоения $s : N(p) \times S^{q-1} \times S^1 \to E$, который над точкой базы (y, ψ) действует так:

$$s : (x_1, \dots, x_p, \phi) \to (x_1 \sin\psi + x_2 \cos\psi, -x_1 \cos\psi + x_2 \sin\psi, \dots,$$
$$x_{k-1} \sin\psi + x_k \cos\psi, -x_{k-1} \cos\psi + x_k \sin\psi, x_{k+1}, \dots, x_p, \phi + \psi),$$

то есть в слое $N(p)$ первые k координат в S^{p-1} разбиваются на пары (здесь используется четность), и плоскости, натянутые на эти пары, вместе с окружностью S^1 крутятся на угол ψ. Ясно, что это гомеоморфизм, поскольку если к ψ прибавить 2π то отображение в слое не изменится. Теперь рассмотрим индуцированный гомеоморфизм

$$s^* : (N(p) \times (S^{q-1} \times S^1))/(\mathbb{Z}/2) \to E/(\mathbb{Z}/2),$$

где $\mathbb{Z}/2 : N(p) \times (S^{q-1} \times S^1)$ действует только на $S^{q-1} \times S^1$ так, как в случае одной квадрики, то есть чтобы получилось $N(q)$ (т.о. слои $N(p)$

склеиваются тождественно), а $\mathbb{Z}/2 : L$ действует, склеивая слои на противоположных точках базы, учитывая произведенный поворот (именно поэтому и возникает индуцированный гомеоморфизм, прообразы склеивающихся точек тоже склеиваются). Остается заметить, что s^* является послойным гомеоморфизмом тотальных пространств тривиального $N(p) \times N(q) \to N(q)$ и нашего $N_k(p,q) \to N(q)$ расслоений.

$\square$

4. Лемма и частный случай трех квадрик

Лемма 4.1. *Пусть N_Γ лагранжево H-минимально вкладывается в $\mathbb{C}^m$, Γ — целочисленная матрица размера $(m-n)*m$, и L является стандартной решеткой $\mathbb{Z}^{m-n} \subset \mathbb{R}^{m-n}$ (этого можно добиться линейными преобразованиями Γ). Тогда если у матрицы $\Gamma(mod 2)$ есть строки с нечетным количеством единиц, то расслоение $N_\Gamma \longrightarrow T^{m-n} = T_\Gamma/D_\Gamma$ со слоем R_Γ нетривиально.*

Доказательство. Поскольку

$$T_\Gamma = \{(e^{2\pi i(\gamma_1,\phi)}, \dots, e^{2\pi i(\gamma_m,\phi)}) \in \mathbb{T}^m\} \cong \mathbb{T}^{m-n},$$

действие $T_\Gamma : Z_\Gamma$ имеет вид

$$\psi_j : (z_1, \dots, z_m) \longrightarrow (z_1 e^{2\pi i \gamma_{j1}\psi_j}, \dots, z_m e^{2\pi i \gamma_{jm}\psi_j}),$$

где ψ_j - поворот по j-й координате в торе $T_\Gamma = T^{m-n}$, а действие $D_\Gamma : R_\Gamma$ (где в D_Γ каждая образующая φ_j соответствует $\psi_j = \frac{1}{2}$, так как L^* - стандартная решетка $\mathbb{R}^{m-n}$) выглядит так:

$$\varphi_j : (x_1, \dots, x_m) \longrightarrow ((-1)^{\gamma_{j1}} x_1, \dots, (-1)^{\gamma_{jm}} x_m).$$

Теперь пусть в j-й строчке $\Gamma(mod 2)$ нечетное кол-во единиц. Тогда инволюция φ_j меняет знак у нечетного количества координат. Заметим, что φ_j соответствует инволюции действующей в слое R_Γ при прохождении j-й окружности на базе расслоения $N_\Gamma \longrightarrow T^{m-n} = T_\Gamma/D_\Gamma$. R_Γ - ориентируемое многообразие, потому что пересечение квадрик невырождено. Заметим, что инволюция меняет ориентацию на всем пространстве $\mathbb{R}^m$ (меняет знак нечетного количество координат), и не меняет ориентацию в нормальном пространстве к R_Γ (при инволюции нормали переходят в себя). Таким образом при прохождении j-й окружности на базе расслоения в слое меняется ориентация, значит расслоение неориентируемо, а следовательно, нетривиально.

$\square$

Пример 4.2. (частный случай трех квадрик) Рассмотрим пятиугольник

$$P = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, -x_1+2 \geqslant 0, -x_2+2 \geqslant 0, -x_1-x_2+3 \geqslant 0\}$$

Если применить отображение

$$f : P \to \mathbb{R}^5, f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, -x_1+2, -x_2+2, -x_1-x_2+3)$$

и взять прообраз при отображении моментов

$$\mu : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5, \quad \mu((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_5^2),$$

то мы получим соответствующее пересечение трех квадрик R, вещественное момент-угол многообразие

$$\begin{cases} (y_1)^2 + (y_3)^2 = 2 \\ (y_2)^2 + (y_4)^2 = 2 \\ (y_1)^2 + (y_2)^2 + (y_5)^2 = 3 \end{cases}$$

Это будет риманова поверхность рода 5 (см. [3]). Тем самым мы получили H-минимальное лагранжево подмногообразие $N_\Gamma \subset \mathbb{C}^5$, которое является тотальным пространством нетривиального (в третьем уравнении нечетное количество единиц) расслоения над T^3 со слоем поверхность рода 5.

Список литературы

[1] А. Е. Миронов, Т. Е. Панов, *Пересечения квадрик, момент-угол-многообразия и гамильтоново-минимальные лагранжевы вложения* , Функц. анализ и его прил. (2012), принято к печати; arXiv:1103.4970.

[2] А. Е. Миронов, *О новых примерах гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$* , Матем. сб., 2004, том 195, номер 1, страницы 89–102.

[3] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действи в топологии и комбинаторике,* Издательство МЦНМО, Москва, 2004.