МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет, 5 курс
Кафедра высшей геометрии и топологии

Котельский Артем
Дипломная работа

Минимальные и гамильтоново-минимальные подмногообразия в торической геометрии

Научный руководитель — Панов Т. Е.

1. Введение

Гамильтонова минимальность (H-минимальность) для лагранжевых подмногообразий является симплектическим аналогом минимальности в смысле римановой метрики. Лагранжево вложение называется H-минимальным, если вариации его объёма вдоль всех гамильтоновых векторных полей равны нулю. Это понятие было введено в работе О [9] в связи со знаменитой гипотезой Арнольда о числе неподвижных точек гамильтонова симплектоморфизам. Простейшим примером H-минимального лагранжевого подмногообразия является координатный тор [9] $S^1_{r_1} \times \cdots \times S^1_{r_m} \subset \mathbb{C}^m$, где $S^1_{r_k}$ обозначает окружность радиуса $r_k > 0$ в k-ом координатном подпространстве $\mathbb{C}^m$. Другие примеры H-минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^m$ и $\mathbb{C}P^m$ были построены Кастро-Урбано, Хелеин-Рамон, Амарзая-Онита, среди прочих математиков.

В 2003 году А.Миронов в статье [6] описал универсальную конструкцию H-минимальных лагранжевых вложений $N \hookrightarrow \mathbb{C}^m$ на основе пересечения вещественных квадрик Z специального вида. Те же пересечения квадрик возникают в торической геометрии как (вещественные) момент-угол многообразия. В настоящей работе, используя методы из статей Й.Донга [2] и Хсианга-Лосона [3], доказывается минимальность вложения $N \hookrightarrow Z$, а так же H-минимальность лагранжевого вложения $N \hookrightarrow \mathbb{C}^m$ другим способом. Так же, на основе заметки Т.Панова и А.Миронова [8], приведена обобщающая результат А.Миронова конструкция, которая позволяет строить H-минимальные лагранжевы подмногообразия в торических многообразиях.

Структура работы следующая: после введения изложены требующиеся в дальнейшем факты из теории минимальности и H-минимальности. В третьей части кратко представлена конструкция симплектических торических многообразий. В последних двух частях изложены основные результаты.

Автор благодарен научному руководителю Т.Е.Панову за постановку задачи и поддержку в ходе написания настоящей работы.

2. Минимальность и H-минимальность

2.1. Минимальность Пусть M и L — гладкие замкнутые многообразия, на M задана риманова метрика g. Пусть $i : L \hookrightarrow M$ – неособое вложение, то есть L является подмногообразием в M. Мы будем подразумевать, что на L задана риманова метрика, индуцированная вложением в M.

Определение. Гладкой *вариацией* i будем называть C^∞-отображение $i : [-\epsilon, +\epsilon] \times L \to M$ такое, что все отображения $i_t = i(t, \cdot) : L \hookrightarrow M$ являются неособыми вложениями и $i_0 = i$.

Замечание. В случае, если у L есть граница, добавляют условие $i_t(\partial L) = i(\partial L)$ для всех t.

Обозначим $i_t(y) = y_t$, $\frac{d}{dt} i_t(y) = X(y_t)$, $i_t(L) = L_t$. Далее будем говорить, что вариация i_t проходит вдоль векторного поля X.

Определение. Вложение $i : L \hookrightarrow M$ называется *минимальным*, если объём L стационарен относительно любых вариаций, то есть

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Vol(L_t) = 0$$

Приведем необходимый нам в дальнейшем классический критерий минимальности. Подробности доказательства можно найти в [4].

Теорема 2.1 (Формула первой вариации)**.**

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Vol(L_t) = -\int_L \langle H, X\rangle d\alpha$$

где H — векторное поле средней кривизны вложения i, X — векторное поле, вдоль которого проходит вариация, $d\alpha$ — форма объёма.

Следствие 2.2. *$i : L \hookrightarrow M$ минимально тогда и только тогда, когда $H \equiv 0$.*

Сформулируем и докажем важный критерий минимальности для G-инвариантных подмногообразий. Впервые он опубликован в статье Хсианга-Лосона [3]. Пусть G — компактная связная группа Ли, действующая на M изометриями. Вложение $i : L \hookrightarrow M$ называется G-инвариантным, если существует гладкое действие $G : L$ такое, что $ig = gi$ для всех $g \in G$. Эквивариантными вариациями G-инвариантного вложения будем называть такие вариации i_t, что $i_t g = g i_t$ для всех $g \in G$ и $t \in [-\epsilon, +\epsilon]$.

Теорема 2.3. *Пусть $i : L \hookrightarrow M$ — G-инвариантное вложение. Тогда $i : L \hookrightarrow M$ минимально тогда и только тогда, когда объём L стационарен относительно всех эквивариантных вариаций.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно. Докажем в другую сторону: предполагаем, что объем L стационарен относительно всех эквивариантных вариаций.

Пусть H — векторное поле средней кривизны на $i(L)$. Поскольку H зависит только от вложения i, а i — G-инвариантно, мы имеем $g_* H = H$ для любого $g \in G$.

Пусть ϕ — гладкая, G-инвариантная функция на L. Определим вариацию i_t, $-\epsilon < 0 < \epsilon$ следующим образом:

$$i_t(y) = y_t = exp_{y_0}[t\phi(y_0)H(y_0)].$$

Выбираем $\epsilon > 0$ достаточно малым, чтобы все i_t были неособыми вложениями. Заметим, что для любого $g \in G$ верно

$$g \circ i_t(y) = g \circ exp_{y_0}[t\phi(y_0)H(y_0)] = exp_{gy_0}[(g_*(t\phi(y_0)H(y_0))] =$$
$$= exp_{gy_0}[t\phi(y_0)g_*H(y_0)] = exp_{gy_0}[t\phi(gy_0)H(gy_0)] = i_t \circ g(y),$$

поскольку $gy_0 = gi(y) = i(gy)$, и ϕ — G-инвариантная функция. Таким образом i_t является эквивариантной вариацией.

Заметим, что так как вариация i_t проходит вдоль векторного поля ϕH (по определению), по формуле первой вариации мы имеем

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Vol(L_t) = -\int_L \phi |H|^2 d\alpha.$$

Из того, что вариация эквивариантна, следует, что это выражение равно нулю. Отсюда, вкупе с произвольностью ϕ, следует, что $H \equiv 0$, и это доказывает теорему. $\square$

2.2. Н-минимальность Пусть теперь на M задана симплектическая структура ω и почти комплексная структура J, согласованные с метрикой g, т.е. $\omega(\cdot, J\cdot) = g(\cdot,\cdot)$. В настоящей работе все многообразия являются кэлеровыми, для них это свойство выполняется. Векторное поле X называется гамильтоновым, если $i_X\omega = \omega(X,\cdot) = df$, где f — некоторая гладкая функция на M.

Определение. Лагранжево вложение $i : L \hookrightarrow M$ называется *гамильтоново-минимальным (H-минимальным)*, если объём L стационарен относительно вариаций вдоль всех гамильтоновых векторных полей.

Предложение 2.4 (формула первой вариации)**.** *Лагранжево вложение $i : L \hookrightarrow M$ H-минимально тогда и только тогда, когда $\delta i_H\omega \equiv 0$ на L, где δ — двойственный по Ходжу оператор к d на L.*

Доказательство. По формуле первой вариации вдоль гамильтонового векторного поля получаем

$$\frac{d}{dt}Vol(L_t) = \int_L \langle H, X\rangle d\alpha = \int_L \langle i_H\omega, i_X\omega\rangle d\alpha.$$

Так как $i_X\omega = df$ и для любой f найдется такое векторное поле X, имеем

$$\int_L \langle \delta i_H\omega, f\rangle d\alpha = 0$$

для произвольной функции f. Это доказывает предложение. $\square$

Теперь приведем критерий Н-минимальности для G-инвариантных лагранжевых вложений, аналогичный теореме 2.3. Этот критерий недавно сформулировал Й.Донг в статье [2].

Предложение 2.5. *Пусть $G : M$ — симплектическое ($g^*\omega = \omega$ для всех $g \in G$) действие изометриями, где G — компактная связная группа Ли. Пусть $i : L \hookrightarrow M$ — G-инвариантное лагранжево вложение. Тогда $i : L \hookrightarrow M$ H-минимально тогда и только тогда, когда объём L стационарен относительно всех эквивариантных вариаций вдоль гамильтоновых векторных полей.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно. Докажем в другую сторону: предполагаем, что объем L стационарен относительно всех эквивариантных вариаций вдоль гамильтоновых векторных полей.

Пусть H — векторное поле средней кривизны на $i(L)$. Поскольку H зависит только от вложения i, а i — G-инвариантно, мы имеем $g_*H = H$ для любого $g \in G$. Из этого следует, что $i_H\omega$ и $\delta i_H\omega$ G-инвариантны, т.к. действие является симплектическим.

Пусть ϕ — гладкая, G-инвариантная функция на L. Определим вариацию i_t, $-\epsilon < 0 < \epsilon$ следующим образом:

$$i_t(y) = y_t = exp_{y_0}[tV]$$

где $JV = \bigtriangledown(\phi\delta i_H\omega)$, что эквивалентно $i_V\omega = d(\phi\delta i_H\omega)$. Выбираем $\epsilon > 0$ достаточно малым, чтобы все i_t были неособыми вложениями. Заметим, что для любого $g \in G$ верно

$$\begin{aligned} g \circ i_t(y) &= g \circ exp_{y_0}[tV(y_0)] = exp_{gy_0}[tg_*V(y_0)] \\ &= exp_{gy_0}[tV(gy_0)] = i_t \circ g(y), \end{aligned}$$

потому что $gy_0 = gi(y) = i(gy)$, и V — G-инвариантное векторное поле. Таким образом i_t является эквивариантной вариацией.

Заметим, что так как по определению вариация i_t проходит вдоль векторного поля V, из формулы первой вариации мы имеем

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} Vol(L_t) = -\int_L \langle H, V\rangle d\alpha = -\int_L \langle i_H\omega, i_V\omega\rangle d\alpha = -\int_L \langle |\delta i_h\omega|^2\phi\rangle d\alpha.$$

Поскольку вариация эквивариантна, это выражение равно нулю. Отсюда, вкупе с произвольностью ϕ, следует, что $\delta i_H\omega \equiv 0$, и это доказывает теорему. $\square$

3. Симплектическая редукция и торические многообразия

3.1. Симплектическая редукция Пусть (M, ω) — симплектическое многообразие, $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^n$ — алгебра Ли n-мерного тора T^n, $\mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^n$ — двойственное ему пространство. Пусть действие $\psi : T^n \to Sympl(M, \omega)$ является симплектическим, т.е. сохраняет форму ω. Любому $X \in \mathfrak{g}$ соответствует векторное поле скоростей $X^\#$ на M, порожденное действием однопараметрической подгруппы $\{exp(tX)|t \in \mathbb{R}\} \subseteq T^n$.

Определение. Действие ψ называется *гамильтоновым*, если существует отображение моментов

$$\mu : M \to \mathfrak{g}^*,$$

удовлетворяющее следующему условию: для любого единичного базисного вектора $X_i \in \mathbb{R}^n \cong \mathfrak{g}$ функция μ_i является гамильтонианом для векторного поля $X_i^\#$, т.е. $i_{X_i^\#}\omega = d\mu_i$.

Замечание. Гамильтоновость векторного поля эквивалентна точности формы $i_{X_i^\#}\omega$, а симплектичность эквивалентна замкнутости этой формы. Отсюда следует, что гамильтоново действие является симплектическим, то есть сохраняет симплектическую форму.

Пример 3.1. Рассмотрим на $\mathbb{C}^m$ стандартную симплектическую форму $\omega = -i\sum_{k=1}^m dz_k \wedge d\overline{z_k}$. Рассмотрим подгруппу по умножению $T^m = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m | |z_i| = 1 \quad \text{\textit{для всех}} \quad 1 \leqslant i \leqslant m\} \subset \mathbb{C}^m$. Тогда действие покоординатным умножением $T^m : \mathbb{C}^m$ гамильтоново, и соответствующее отображение моментов записывается формулой

$$\mu(z_1, \dots, z_m) = (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2)$$

Теорема 3.2 (Симплектическая редукция). *Пусть (M, ω, T^n, μ) — симплектическое многообразие с гамильтоновым T^n-действием. Пусть $i : \mu^{-1}(c) \to M$ — отображение вложения, где c является регулярным значением отображения моментов. Предположим, что отображение моментов μ собственно и T^n действует свободно на $\mu^{-1}(c)$. Тогда:*

• *множество уровня $\mu^{-1}(c)$ является гладким замкнутым T^n-инвариантным подмногообразием в M,*

• *пространство орбит $M_{red} = \mu^{-1}(c)/T^n$ является многообразием,*

• *$\pi : \mu^{-1}(c) \to M_{red}$ является главным T^n-расслоением, и*

• *существует симплектическая форма ω_{red} на M_{red}, удовлетворяющая условию $i^*\omega = \pi^*\omega$.*

Замечание. Если M компактно, то отображение μ собственно.

Замечание. Теорема о симплектической редукции верна и для произвольного случая (M, ω, G, μ) гамильтонового действия компактной связной группы Ли G, определение которого мы не давали. Доказательство см. в [5].

3.2. Момент-угол многообразия

Конструкция 3.3. *Рассмотрим непустой многогранник, заданный пересечением полуплоскостей*

$$P = P(A, \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle + b_i \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m\}$$

Отображение

$$i_{A,\boldsymbol{b}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad i_{A,\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) = A^t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = (\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x} \rangle + b_1, \dots, \langle \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{x} \rangle + b_m)^t$$

вкладывает P в $\mathbb{R}^m_{\geqslant}$. Момент-угол многообразием называется пространство $Z_{A,\boldsymbol{b}}$, определяющееся коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} Z_{A,\boldsymbol{b}} & \xrightarrow{i_Z} & \mathbb{C}^m \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \mu \\ P & \xrightarrow{i_{A,\boldsymbol{b}}} & \mathbb{R}^m_{\geqslant} \end{array}$$

где $\mu(z_1, \dots, z_m) = (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2)$ — отображение моментов стандартного координатного действия тора $T^m = \{(e^{2\pi i\phi_1}), \dots, e^{2\pi i\phi_m})) \in \mathbb{C}^m | \ \phi_j \in \mathbb{R}, \ \ 1 \leqslant j \leqslant m\}$ на $\mathbb{C}^m$.

Рассмотрим матрицу Γ размера $(m-n) * m$, чьи строки образуют базис пространства $\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m : \boldsymbol{y}A^t = 0\}$. Тогда имеем $rk\Gamma = (m-n)$ и $\Gamma A^t = 0$. Множество столбцов $(\boldsymbol{\gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\gamma}_m)$ матрицы Γ называется двойственной по Гейлу конфигурацией к множеству столбцов $(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m)$ матрицы A. Заметим, что теперь образ $i_{A,\boldsymbol{b}}(\mathbb{R}^n)$ можно задать уравнением $\Gamma\boldsymbol{x} = \Gamma\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$. Тогда образ $Z_{A,\boldsymbol{b}}$ в $\mathbb{C}^m$ при отображении i_Z можно задать пересечением вещественных квадрик:

$$Z_\Gamma = i_Z(Z_{A,\boldsymbol{b}}) = \{\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : \sum_{k=1}^m \gamma_{jk}|z_k|^2 = \sum_{k=1}^m \gamma_{jk}b_k, \quad 1 \leqslant j \leqslant m-n\}$$

Пример 3.4. Пусть P — треугольник, заданный уравнениями

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \\ 1 - x_1 - y_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Тогда отображение $i_{A,\boldsymbol{b}}$ задается формулой $i_{A,\boldsymbol{b}}(x_1,x_2)=(x_1,x_2,1-x_1-y_2)$ и $i_{A,\boldsymbol{b}}(P)=\mathbb{R}^3_{\geqslant}\cap\{y_1+y_2+y_3=1\}$. Получаем, что

$$Z_\Gamma=\{(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{C}^3|z_1^2+z_2^2+z_3^2=1\}\cong S^5,$$
$$R_\Gamma=\{(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3|y_1^2+y_2^2+y_3^2=1\}\cong S^2.$$

Момент-угол многообразие является неособым гладким компактным многообразием тогда и только тогда, когда пересечение квадрик невырождено, что эквивалентно простоте многогранника P (т.е. все гиперграни, встречающиеся в одной вершине, должны находится в общем положении, что равносильно тому, что их ровно n). Компактность следует из ограниченности многогранника. Далее мы будем считать, что P — непустой простой многогранник, и использовать обозначения Z_Γ и Z_P для многообразия $Z_{A,\boldsymbol{b}}$.

Аналогично определяется вещественное момент-угол многообразие из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
R_{A,\boldsymbol{b}} \arrow[r, "i_R"] \arrow[d] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "\mu"] \\
P \arrow[r, "i_{A,\boldsymbol{b}}"] & \mathbb{R}^m_{\geqslant}
\end{tikzcd}$$

где $\mu(y_1,\ldots,y_m)=(|y_1|^2,\ldots,|y_m|^2)$ — ограничение отображения моментов. Так же как и комплексном случае, можно представить $R_{A,\boldsymbol{b}}$ в виде пересечения квадрик:

$$R_\Gamma=\{u=(u_1,\ldots,u_m)\in\mathbb{R}^m:\sum_{k=1}^m\gamma_{jk}u_k^2=\sum_{k=1}^m\gamma_{jk}b_k,\quad 1\leqslant j\leqslant m-n\}$$

Заметим, что есть естественное вложение $R_\Gamma\hookrightarrow Z_\Gamma$. Так же заметим существование действий $T^m:Z_\Gamma$ и $\mathbb{Z}_2^m:R_\Gamma$, индуцированных действиями $T^m:\mathbb{C}^m$ и $\mathbb{Z}_2^m:\mathbb{C}^m$. Пространство орбит в обоих случаях эквивалентно многограннику: $Z_\Gamma/T^m=R_\Gamma/\mathbb{Z}_2^m\cong P$.

3.3. Симплектические торические многообразия Далее мы будем предполагать, что на $\mathbb{C}^m$ задана стандартная симплектическая форма $\omega=-i\sum_{k=1}^m dz_k\wedge d\overline{z_k}$. Напомним, что действие $T^m:\mathbb{C}^m$ гамильтоново, и соответствующее отображение моментов записывается формулой $\mu(z_1,\ldots,z_m)=(|z_1|^2,\ldots,|z_m|^2)$.

Пусть векторы $\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_m}$ образуют решетку $N=\mathbb{Z}\langle\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_m}\rangle\subset\mathbb{R}^n$. Это условие эквивалентно тому, что столбцы $\boldsymbol{\gamma}_1,\ldots,\boldsymbol{\gamma}_m$ матрицы Γ образуют решетку $L=\mathbb{Z}\langle\boldsymbol{\gamma_1},\ldots,\boldsymbol{\gamma_m}\rangle\subset\mathbb{R}^{m-n}$ (см. [1]). Так как $\mathbb{R}\langle\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_m}\rangle=\mathbb{R}^n$, мы имеем $N\cong\mathbb{Z}^n$ и $L\cong\mathbb{Z}^{m-n}$. Рассмотрим следующую подгруппу в T^m:

$$T_\Gamma=\mathbb{R}^{m-n}/L^*=\{(e^{2\pi i(\gamma_1,\phi)},\ldots,e^{2\pi i(\gamma_m,\phi)})\in T^m\}\cong T^{m-n}$$

где $L^*=\{\lambda^*\in\mathbb{R}^{m-n}:(\lambda^*,\lambda)\in\mathbb{Z}\quad\textit{для}\quad\textit{всех}\quad\lambda\in L\}$ — двойственная решетка. Аналогично для R_Γ определим группу $D_\Gamma=\frac{1}{2}L^*/L^*\cong(\mathbb{Z}/2)^{m-n}$, она естественно вкладывается как подгруппа в T_Γ. Действие

$T_\Gamma \subset T^m$ на $\mathbb{C}^m$ так же гамильтоново, и соответствующее отображение моментов является композицией

$$\mu_\Gamma : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^m \to \mathfrak{t}_\Gamma^*$$

где $\mathbb{R}^m \to \mathfrak{t}_\Gamma^*$ — отображение двойственных алгебр Ли, соответствующее вложению $T_\Gamma \hookrightarrow T^m$. Отображение μ_Γ во второй части композиции сопоставляет i-ому базисному вектору $e_i \in \mathbb{R}^m$ вектор $\gamma_i \in \mathfrak{t}_\Gamma^* \cong \mathbb{R}^{m-n}$. Поэтому μ_Γ является композицией стандартного отображения моментов μ и умножения на матрицу Γ:

$$\mu_\Gamma(z_1, \dots, z_m) = (\sum_{k=1}^m \gamma_{1k}|z_k|^2, \dots, \sum_{k=1}^m \gamma_{(m-n)k}|z_k|^2).$$

Множество уровня $\mu_\Gamma^{-1}(\Gamma \boldsymbol{b})$ есть в точности момент-угол многообразие Z_Γ. Далее мы будем предполагать, что T_Γ действует свободно на Z_Γ, что эквивалентно условию дельзантовости многогранника P, т.е. для каждой вершины i нормальные вектора соответствующих примыкающих гиперграней образуют базис решетки, которую образуют все нормальные вектора: $\mathbb{Z}\langle \boldsymbol{a}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_n}\rangle = \mathbb{Z}\langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\rangle = N$.

Теорема 3.5. *Пусть $P = P(A, \boldsymbol{b})$ является дельзантовым многогранником, $\Gamma = (\boldsymbol{\gamma}_1, ...\boldsymbol{\gamma}_m)$ — соответствующая двойственная по Гейлу конфигурация векторов в $\mathbb{R}^{m-n}$, которая определяет момент-угол многообразие $Z_P = Z_\Gamma = Z_{A,\boldsymbol{b}}$. Тогда:*

- $\Gamma\boldsymbol{b}$ *является регулярным значением собственного отображения моментов $\mu_\Gamma : \mathbb{C}^m \to \mathfrak{t}_\Gamma^* \cong \mathbb{R}^{m-n}$,*
- Z_P *является регулярным множеством уровня $\mu_\Gamma^{-1}(\Gamma\boldsymbol{b})$,*
- *действие T_Γ на Z_P свободно.*

Замечание. Условия для применения симплектической редукции следующие: отображение моментов должно быть собственным, действие свободным, а множество уровня регулярным. Эти условия соответственно эквивалентны следующим: ограниченности Z_Γ, дельзантовости P, и неособости многообразия Z_Γ.

Применяя симплектическую редукцию, мы получаем фактормногообразие $Z_P/T_\Gamma = V_P$. Оно канонически изоморфно торическому многообразию V_{Σ_P}, которое соответствует нормальному вееру Σ_P многогранника P (см.[1]). Эти многообразия называются *симплектическими торическими многообразиями.*

Алгебраическое многообразие V_{Σ_P} проективно. Редуцированная симплектическая форма ω_{red} и метрика, индуцированная субмерсией $Z_P \to V_P$, эквивалентны симплектической форме, индуцированной вложением в проективное пространство, и метрике, возникающей из алгебраической структуры. Отметим также замечательный факт о том, что множество дельзантовых многогранников находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством симплектических торических многообразий (см. [1]).

Важным замечанием является то, что R_P проецируется со слоем D_Γ на вещественное торическое многообразие U_P (вещественные точки в комплексных картах V_P). Ключевые факты этой части можно проиллюстрировать следующей коммутативной диаграммой (1), где слоями проекций π и r являются T_Γ и D_Γ соответственно.

$$\begin{tikzcd}
R_P \arrow[r, hook] \arrow[d, "r"] & Z_P \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{C}^m \\
U_P \arrow[r, hook] & V_P &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

4. Минимальные подмногообразия в момент-угол многообразии

Зафиксирует обозначения как на диаграмме (1).

Предложение 4.1. *Вещественное торическое многообразие U_P минимально в V_P.*

Доказательство. Вещественное торическое многообразие U_P является множеством неподвижных точек при изометричной инволюции $\sigma : V_P$, индуцированной комплексным сопряжением на $Z_P \subset \mathbb{C}^m$. Отсюда нетрудно понять, что U_P *вполне геодезично* в V_P, т.е. все геодезические, лежащие в U_P, являются геодезическими и в V_P. Поэтому U_P минимально в V_P, так как геодезичность вполне эквивалентна обнулению всей квадратичной формы, а минимальность эквивалентна обнулению её следа, то есть вектора средней кривизны (подробности см. в [4]). □

Определим функцию $Vo : V_P \to \mathbb{R}$ как объём орбиты: $Vo(x) = Vol(\pi^{-1}(x))$.

Предложение 4.2. *Вещественное торическое многообразие U_P минимально в V_P относительно метрики $\tilde{g} = Vo^{2/n}g$.*

Доказательство. Инволюция $\sigma : V_P$, индуцированная комплексным сопряжением, сохраняет функцию Vo. Это следует из того, что объём орбиты зависит только от модулей координат точек в этой орбите. При равенстве модулей одна орбита переводится в другую покоординатным умножением на единичные по модулю числа, а значит объём одинаковый. В нашем случае эти числа равны $\overline{z_i}/z_i$.

$$\begin{aligned} Vo(x) = Vol(\pi^{-1}(x)) = Vol(T_\Gamma(z_1, \ldots, z_m)) = Vol(|z_1|, \ldots, |z_m|) = \\ = Vol(|\overline{z_1}|, \ldots, |\overline{z_m}|) = Vol(T_\Gamma(\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_m})) = Vol(\pi^{-1}(\sigma x)) = Vo(\sigma x). \end{aligned}$$

Поэтому σ — изометричная инволюция не только относительно метрики g, но и относительно метрики $\tilde{g} = Vo^{2/n}g$. Это означает, работают те же доводы для доказательства, что и в предыдущем предложении. □

Так же нам понадобится обобщённая теорема Нётер.

Теорема 4.3. *Пусть (M, ω, T, μ) — симплектическое многообразие с гамильтоновым действием тора. Пусть X — гамильтоново T-инвариантное векторное поле. Тогда отображение моментов μ сохранятся вдоль траекторий векторного поля X.*

Доказательство. Доказательство представляет собой цепочку равенств:

$$X(\mu_i) = i_X d\mu_i = i_X i_{X_i^\#}\omega = -i_{X_i^\#} i_X\omega = -i_{X_i^\#} df = -X_i^\#(f) = 0$$

так как X является T-инвариантным, и следовательно $f = i_X\omega$ является T-инвариантным. □

Замечание. Это утверждение верно и для произвольного случая (M, ω, G, μ) гамильтонового действия компактной связной группы Ли G, определение которого мы не давали.

Рассмотрим $N = \pi^{-1}(U_P) \cong R_P \times_{D_\Gamma} T_\Gamma$ — подмногообразие в $Z_P \subset \mathbb{C}^m$.

Теорема A. *Подмногообразие N минимально в Z_P.*

Доказательство. Так как действие $T_\Gamma : Z_P$ свободно и $Z_P/T_\Gamma = V_P$, существует биекция

$$\left\{\begin{array}{l} T_\Gamma - \textit{инвариантные} \quad \textit{горизонтальные} \\ \textit{векторные} \quad \textit{поля} \quad \textit{на} \quad Z_P \end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \textit{векторные} \\ \textit{поля} \quad \textit{на} \quad V_P \end{array}\right\}$$

Пусть i_t — T_Γ-инвариантная вариация естественного вложения $i : N \hookrightarrow Z_P$. Из определения $\tilde{g}$ следует

$$Vol(N_t, g) = Vol(\pi(N_t), \tilde{g}).$$

Сравнивая T_Γ-инвариантные вариации N в Z_P и вариации $\pi(N) = U_P$ в V_P мы получаем по предложению 4.2, что объём N стационарен относительно T_Γ-инвариантных вариаций. Из теоремы 2.3 следует минимальность N. □

Теорема B. *Многообразие N лагранжево H-минимально вкладывается в $\mathbb{C}^m$.*

Доказательство. Вложение очевидно строится так: $N \hookrightarrow Z_P \hookrightarrow \mathbb{C}^m$.

Докажем сначала лагранжевость. Так как $N = \pi^{-1}(U_P)$, для любой точки $z \in N$ верно разложение касательного пространства $T_xN = T_{R_\Gamma} \oplus T_{T_\Gamma}$ на касательные пространства вдоль действия тора и вдоль вещественного момент-угол многообразия. Каноническая симплектическая форма $\omega = -i\sum_{k=1}^m dz_k \wedge d\overline{z_k}$ на $\mathbb{C}^m$ обнуляется на пространстве T_{R_Γ}, так как в $\boldsymbol{z} \cdot T_{R_\Gamma}$ содержатся только вещественные вектора (касательные к R_Γ) для некоторого $\boldsymbol{z} \in T_\Gamma$. Пусть теперь $X_i \in T_{T_\Gamma}$ и $Y \in T_xN$. Тогда

$$\omega(X_i, Y) = i_{X_i}\omega(Y) = d\mu_i(Y) = Y(\mu_i) = 0,$$

потому что $Y \in T_xN$, а значит сохраняет μ (так как $N \subset Z_\Gamma = \mu^{-1}(\Gamma\boldsymbol{b})$). Отсюда следует, что ω обнуляется на всем $T_xN = T_{R_\Gamma} \oplus T_{T_\Gamma}$, а значит N лагранжево.

Теперь докажем H-минимальность. По предложению 2.5 мы можем рассматривать только T_Γ-инвариантные гамильтоновы вариации. Отсюда (здесь важно условия гамильтоновости), по теореме 4.3, следует, что T_Γ-инвариантные гамильтоновы вариации подмногообразия $N \subset Z_\Gamma \subset \mathbb{C}^m$ проходят внутри Z_Γ. А то, что объём N стационарен относительно всех T_Γ-инвариантных вариаций внутри Z_Γ мы доказали в предыдущей теореме. Теорема доказана.

□

Пример 4.4 (Одна квадрика). Пусть $m-n=1$, то есть Z_Γ задается одним уравнением

$$\gamma_1|z_1|^2+\ldots+\gamma_m|z_m|^2=c$$

Из компактности следует, что все коэффициенты положительны. Свободность действия $T_\Gamma:Z_\Gamma$ (дельзантовость первоначального многогранника) эквивалентна следующему условию: для любой точки $\boldsymbol{z}\in Z_\Gamma$ выполняется равенство $\mathbb{Z}\langle\gamma_{i_1},\ldots,\gamma_{i_k}\rangle=\mathbb{Z}\langle\gamma_1,\ldots,\gamma_k\rangle=L$, где i_k — все ненулевые координаты точки $\boldsymbol{z}\in Z_\Gamma$ (см. [7]). Поскольку Z_Γ в нашем случае содержит точки с лишь одной ненулевой координатой, любой γ_i должен порождать ту же решетку, что и весь набор $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$. Значит $\gamma_1=\ldots=\gamma_m$, и Z_Γ является сферой S^{2m-1} с радиусом $\sqrt{a}=\sqrt{\frac{c}{\gamma_1}}$, заданной уравнением

$$|z_1|^2+\ldots+|z_m|^2=a$$

Многообразие $R_\Gamma\subset Z_\Gamma$ является сферой в вещественной части: $S^{m-1}=\{(r_1,\ldots,r_m)\in\mathbb{C}^m|r_i\in\mathbb{R}\quad 1\leqslant i\leqslant m,\quad r_1^2+\ldots+r_m^2=a\}$. Чтобы получить $N=R_\Gamma\times_{D_\Gamma}T_\Gamma$, нужно «разнести» сферу $R_\Gamma\cong S^{m-1}$ по окружности $T_\Gamma=\{(e^{2\pi i\phi}),\ldots,e^{2\pi i\phi})\in\mathbb{C}^m\}\cong S^1$ и диагонально профакторизовать по антиподальной инволюции D_Γ.

Таким образом, в зависимости от того, меняет ли инволюция ориентацию на S^{m-1} или нет (то есть четным или нечетным является m), мы получаем многообразие

$$N(m)\cong S^{m-1}\times S^1\qquad \textit{при}\quad m\ -\ \textit{четном}$$
$$N(m)\cong K^m\qquad \textit{при}\quad m\ -\ \textit{нечетном}$$

Оно минимально вкладывается в S^{2m-1} и лагранжево H-минимально в $\mathbb{C}^m$.

Пример 4.5 (Две квадрики). Пусть $m-n=2$, тогда Z_Γ задается уравнениями

$$\begin{cases}\gamma_{11}|z_1|^2+\ldots+\gamma_{m1}|z_m|^2=c\\ \gamma_{12}|z_1|^2+\ldots+\gamma_{m2}|z_m|^2=0\end{cases}$$

где $\gamma_{k1}>0$, $c>0$, $\gamma_{j2}>0$, $\gamma_{i2}<0$ для $1\leqslant k\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant p$, $p+1\leqslant i\leqslant m$, что следует из стандартного вида пересечения квадрик, см. [7]. Видно, что второе уравнение задает конус над эллипсоидами размерностей $2p-1$ и $2q-1$. Пересекая его с эллипсоидом размерности $2m-1$, который задает первое уравнение, получаем, что $Z_\Gamma\cong S^{2p-1}\times S^{2q-1}$ и $R_\Gamma\cong S^{p-1}\times S^{q-1}$. Отметим, что соответствующий им многогранник комбинаторно эквивалентен произведению симплексов $\triangle^{p-1}\times\triangle^{q-1}$.

Топологический тип многообразия N определяется тремя числами p,q и l, где $p+q=m$ и $0\leqslant l\leqslant p$. Его можно описать как тотальное пространство расслоения

$$N_l(p,q)\xrightarrow{N(q)}N(p)$$

топология которого зависит от l. Так же оно является тотальным пространством расслоения $N\to T^2$ со слоем $R_\Gamma\cong S^{p-1}\times S^{q-1}$, а так же расслоения $N \to U_\Gamma$ со слоем T^2. Подробности классификации $N_l(p,q)$ и построения расслоений можно прочитать в [7].

Многообразие N минимально вкладывается в $Z_\Gamma \cong S^{2p-1} \times S^{2q-1}$, и лагранжево Н-минимально вкладывается в $\mathbb{C}^m$. При $p = q = 2$ и $l = 1$ мы получаем минимальное вложение $N_1(2,2) \hookrightarrow Z_\Gamma \cong S^3 \times S^3$, где $N_1(2,2) \to T^2$ — нетривиальное расслоение со слоем T^2. При этом в $Z_\Gamma \cong S^3 \times S^3$ минимально вкладывается и тривиальное расслоение $S^4 = T^2 \times T^2 = N_0(p,q)$. Этот факт является следствием случая одной квадрики, где мы построили минимальное вложение $T^2 \hookrightarrow S^3$.

5. Лагранжевы Н-минимальные подмногообразия в торических многообразиях

Рассмотрим два множества квадрик Z_Γ и Z_Δ:

$$Z_\Gamma = \{\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m : \sum_{k=1}^{m} \gamma_{jk}|z_k|^2 = c_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m-n\}$$

$$Z_\Delta = \{\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m : \sum_{k=1}^{m} \delta_{jk}|z_k|^2 = d_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m-l\}$$

такие, что Z_Γ, Z_Δ и $Z_\Gamma \cap Z_\Delta$ — невырожденные рациональные пересечения квадрик, то есть, если брать на примере Z_Γ, должны выполняться условия:

а)$\boldsymbol{c} \in R_\geqslant\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_m\rangle$

б)если $\boldsymbol{c} \in R_\geqslant\langle\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_k}\rangle$, то $k \geqslant m-n$

с)векторы $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ образуют решетку L максимального ранга в $\mathbb{R}^{m-n}$

Так же предположим, что многогранники, соответствующие пересечениям квадрик Z_Γ, Z_Δ и $Z_\Gamma \cap Z_\Delta$, дельзантовы (соответствие в обратную сторону существует, см. [7]).

Группы T_Δ и D_Δ определяются аналогично группам T_Γ и D_Γ. Идея состоит в том, чтобы профакторизовать все по одному набору квадрик, то есть по T_Γ, а дальше с помощью другого набора Z_Δ построить конструкцию, аналогичную диаграмме (1).

Обозначим $Z_\Gamma/T_\Gamma = V_\Gamma$ — торическое многообразие, и заметим что индуцированное действие $T_\Delta : V_\Gamma$ будет гамильтоновым. Отображение моментов $\mu_\Delta : V_\Gamma \to \mathbb{R}^{m-l}$ задается формулой

$$\mu_\Delta(x) = \Delta \cdot \mu(\pi^{-1}(x)) = \Delta \cdot (|z_1|^2, \ldots, |z_m|^2)^t$$

где $\pi^{-1}(x) = (z_1, \ldots, z_m)$ — любой прообраз точки x при проекции $\pi : Z_\Gamma \to V_\Gamma$ (модули координат у любого прообраза одинаковые, так как слоем проекции является T_Γ). Теперь применим конструкцию симплектической редукции к действию $T_\Delta : V_\Gamma$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму (2):

$$\begin{tikzcd}
U_\Gamma \cap R_\Delta \arrow[r, hook] \arrow[d, "\tilde{r}"] & V_\Gamma \cap Z_\Delta \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"] & V_\Gamma \\
U_{\Gamma\Delta} \arrow[r, hook] & V_{\Gamma\Delta} &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

где слоями проекций $\tilde{\pi}$ и $\tilde{r}$ являются T_Δ и D_Δ соответственно, и

$$V_\Gamma \cap Z_\Delta = (Z_\Gamma \cap Z_\Delta)/T_\Gamma, \quad V_{\Gamma\Delta} = (Z_\Gamma \cap Z_\Delta)/(T_\Gamma \times T_\Delta),$$
$$U_\Gamma \cap R_\Delta = (R_\Gamma \cap R_\Delta)/D_\Gamma, \quad U_{\Gamma\Delta} = (R_\Gamma \cap R_\Delta)/(D_\Gamma \times D_\Delta).$$

Рассмотрим $\tilde{N} = \tilde{\pi}^{-1}(U_{\Gamma\Delta}) \cong (U_\Gamma \cap R_\Delta) \times_{D_\Delta} T_\Delta$ — подмногообразие в $V_\Gamma \cap Z_\Delta \subset V_\Gamma$. Совершенно аналогично теоремам A и B мы получаем:

Теорема C. *Многообразие $\tilde{N}$ минимально вкладывается в $V_\Gamma \cap Z_\Delta$ и лагранжево H-минимально вкладывается в торическое многообразие V_Γ.*

Пример 5.1.

1. Если $m - n = 0$, т.е. $Z_\Gamma = \emptyset$, то $V_\Gamma = \mathbb{C}^m$ и мы получаем исходную конструкцию подмногообразий N, минимальных в Z_Δ и H-минимальных лагранжевых в $\mathbb{C}^m$.

2. Если $m-l = 0$, т.е. $Z_\Delta = \emptyset$, то $\tilde{N}$ является вещественным торическим многообразием U_Γ, которое минимально (вполне геодезично) в Γ.

3. Если $m - n = 1$, т.е. $Z_\Gamma \cong S^{2m-1}$, то мы получаем H-минимальное лагранжево подмногообразие $\tilde{N}$ в $V_\Gamma = \mathbb{C}P^{m-1}$. Эта серия включает в себя многие раннее построенные семейства проективных примеров. Так же $\tilde{N}$ минимально вкладывается в проективное подмногообразие $\mathbb{C}P^{m-1} \cap Z_\Delta$.

Список литературы

[1] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Toric topology*, arXiv:1210.2368.

[2] Y. Dong, *Hamiltonian-minimal Lagrangian submanifolds in Kaehler manifolds with symmetries*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications 67 (2007), 865–882.

[3] W. Y. Hsiang, H. B. Lawson *Minimal submanifolds of low-cohomogeneity*, J. Differential Geom. 5 (1971) 1–38.

[4] B. Lawson, *Lectures on Minimal Submanifolds*, vol.1 Berkeley: Publish or Perish 1980.

[5] J. Marsden, A. Weinstein, *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Rep. Mathematical Phys. 5 (1974), 121-130.

[6] А. Е. Миронов, *О новых примерах гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$* , Матем. сб., 2004, том 195, номер 1, страницы 89–102.

[7] А. Е. Миронов, Т. Е. Панов, *Пересечения квадрик, момент-угол-многообразия и гамильтоново-минимальные лагранжевы вложения,* Функц. анализ и его прил. (2013), 47, выпуск 1, стр.47; arXiv:1103.4970.

[8] А. Е. Миронов, Т. Е. Панов, *Гамильтоново-минимальные лагранжевы подмногообразия в торических многообразиях* , Успехи математических наук 68 (2013), выпуск 2.

[9] Y.-G. Oh, *Volume Minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations*, Math. Z. 212 (1993), no.2, 175-192.

E-mail address: `artofkot@gmail.com`