Московский Государственный Университет имени
М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

КУРСОВАЯ РАБОТА

«Свойства дельзантовости для нестаэдров»

Выполнила студентка 403 группы
Кушнарева Лаида
Научный руководитель
профессор
Панов Тарас Евгеньевич

Москва 2014

Введение и определения

Нашей задачей сейчас является доказательство дельзантовости нестаэдров различной размерности. Для того, чтобы это сделать, предварительно следует ввести ряд определений и утверждений.

Определим ***сумму Минковского*** двух подмножеств $\mathbb{R}^n$ A и B как $A+B = \{x+y : x \in A, y \in B\}$.

Для каждой совокупности $\mathfrak{F}$ некоторых подмножеств множества индексов $\{1, ..., n+1\}$ определим ***полиэдр*** $P_{\mathfrak{F}}$ как сумму Минковского симплексов $P_{\mathfrak{F}} = \sum_{S \in \mathfrak{F}} \Delta_S \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Совокупность непустых подмножеств $\mathfrak{B}$ множества индексов $\{1, ..., n+1\}$ назовем ***порождающим множеством***, если выполнены следующие два условия:
A) Если $S', S'' \in \mathfrak{B}$ таковы, что $S' \cap S'' \neq \emptyset$, то $S' \cup S'' \in \mathfrak{B}$.
B) $\{i\} \in \mathfrak{B} \forall i \in \{1, ..., n+1\}$.

Полиэдр $P_{\mathfrak{B}}$, отвечающий порождающему множеству $\mathfrak{B}$, называется ***нестаэдром***.

Дельзантовым назовем многогранник размерности $n \geqslant 2$, обладающий следующим свойством: К любому набору его гиперграней, сходящихся в общей вершине, можно построить нормальные векторы так, чтобы они образовывали базис пространства $\mathbb{Z}^n$.

Ограничением $\mathfrak{B}$ на C назовем порождающее множество на C, определенное как $\mathfrak{B}|_C = \{I \subset C : I \in \mathfrak{B}\}$

Сокращением C из $\mathfrak{B}$ назовем порождающее множество на $S - C$, определенное как $C \setminus \mathfrak{B} = \{I \subset S - C : I \in \mathfrak{B} \vee C \cup I \in \mathfrak{B}\}$.

Гранью назовем множество вида $H_C = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{S \in \mathfrak{S}} \sum_{i \in S} x_i = 2^{|S|} - 1\}$, где $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}$. ***Гипергранью*** называется грань размерности $n-1$.

Теорема 1 (см. Теорема 1.5.13 в [1]).
Пересечение граней $F_{S_1}, ..., F_{S_k}$ непусто, если и только если выполнены два условия:
(1) $\forall i, j 1 \leqslant i < j \leqslant k$ либо $S_i \subset S_j$, либо $S_j \subset S_i$, либо $S_i \cap S_j = \emptyset$.
(2) Если множества $S_{i_1}, ..., S_{i_p}$ попарно не пересекаются, то $S_{i_1} \sqcup ... \sqcup S_{i_p} \notin \mathfrak{B}$.

Соответствующий набор множеств называется ***сгнездованным***.

Симплициальный комплекс на $\mathfrak{B} - B_{max}$, сформированный сгнездованными множествами, также называется ***сгнездованным*** комплексом и обозначается $N(\mathfrak{B})$.

Линком C в $N(\mathfrak{B})$ называется множество $N(\mathfrak{B})_C = \{N' \subset \mathfrak{B} - B_{max} - \{C\} : N' \cup \{C\} \in N(\mathfrak{B})\}$

Теорема 2 (см. Теорема 1.5.15 в [1]).
Каждый нестаэдр является также простым многогранником.

Доказательство дельзантовости для некоторых нестаэдров

1. Двумерный случай.

Соответствует порождающему множеству, построенному на трех элементах.

Здесь возможно четыре различных случая:

1.) {{1},{2},{3},{1,2,3}} - симплекс.

2.) {{1},{2},{3},{1,2},{1,2,3}} $\leftrightarrow$ {{1},{2},{3},{2,3},{1,2,3}} $\leftrightarrow$ {{1},{2},{3},{3,1},{1,2,3}} - симплекс, у которого усечена одна вершина.

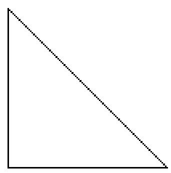
3.) {{1},{2},{3},{1,3},{2,3},{1,2,3}} и другие порождающие множества, содержащих два двухэлементных элемента - симплекс, у которого усечены две вершины.

4.) {{1},{2},{3},{1,2},{2,3},{3,1},{1,2,3}} - симплекс, у которого усечены все три вершины - двумерный пермутаэдр.

Реализуем каждый из этих случаев в трехмерном пространстве на плоскости, ограниченной уравнением $x_1+x_2+x_3 = const$ (где $const$ - количество подмножеств в соответствующем порождающем множестве) и, выразив одну координату через две другие, покажем, как нормальные векторы к граням (сторонам), встречающимся в общей вершине, порождают базис двумерной решетки в этой плоскости.

1.) Используя соотношение $x_1+x_2+x_3 = 4$ и делая замену $x_3 = 4-x_1-x_2$, получаем, что симплекс на нашей двумерной плоскости задается неравенствами: $x_1 \geqslant 1, x_2 \geqslant 1, 4-x_1-x_2 = x_3 \geqslant 1$.

Соответствующие нормальные векторы к его граням (сторонам) имеют вид: $(1,0),(0,1),(-1,-1)$.

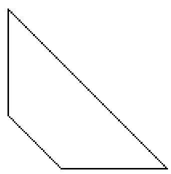


Проверяем условие дельзантовости:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$

2.) Используя соотношение $x_1+x_2+x_3 = 5$ и делая замену $x_3 = 5-x_1-x_2$, получаем неравенства: $x_1 \geqslant 1, x_2 \geqslant 1, 4-x_1-x_2 = x_3 \geqslant 1, x_1+x_2 \geqslant 3$.

Нормальные векторы к сторонам этого усеченного треугольника имеют вид: $(0,1),(-1,-1),(1,0),(1,1)$.

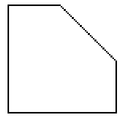


Проверяем условие дельзантовости:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

3.) Исходные неравенства: $x_1 \geqslant 1, x_2 \geqslant 1, x_3 \geqslant 1, x_1+x_3 \geqslant 3, x_2+x_3 \geqslant 3$ после замены $x_3 = 6-x_1-x_2$ дают $x_1 \geqslant 1, x_2 \geqslant 1, 6-x_1-x_2 \geqslant 1, 6-x_2 \geqslant 3, 6-x_1 \geqslant 3$.

Нормальные векторы к сторонам этого дважды усеченного треугольника имеют вид: $(0,1),(-1,0),(-1,-1)$, $(0,-1),(1,0)$.

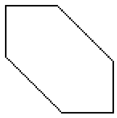


Проверяем условие дельзантовости:

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

4.) Исходные неравенства: $x_1 \geqslant 1, x_2 \geqslant 1, x_3 \geqslant 1, x_1+x_2 \geqslant 3, x_1+x_3 \geqslant 3, x_2+x_3 \geqslant 3$ после замены $x_3 = 7-x_1-x_2$ дают $x_1 \geqslant 1, x_2 \geqslant 1, 7-x_1-x_2 \geqslant 1, x_1+x_2 \geqslant 3, 7-x_2 \geqslant 3, 7-x_1 \geqslant 3$.

Нормальные векторы к сторонам этого трижды усеченного треугольника - то есть шестиугольника - имеют вид: $(0,1),(-1,0),(-1,-1)$, $(0,-1),(1,0),(1,1)$.



Проверяем условие дельзантовости:
$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$, $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$, $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$, $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Доказательство дельзантовости нестаэдра

Основная теорема.
Каждый нестаэдр является дельзантовым многогранником.

Для начала приведем известное доказательство этого факта, изложенное в [2].
Доказательство 1:
Лемма 1 - линк-разложение (см. Теорема 3.2 в [2]).
$\forall C \in \mathfrak{B} - B_{max}$ линк $N(\mathfrak{B})_C$ изоморфен $N(\mathfrak{B}|_C \times C \setminus \mathfrak{B})$
Доказательство:
Для доказательства этой леммы достаточно показать следующее: для каждого набора $I_1, ..., I_k \in \mathfrak{B}_0$ множество $\{C, I_1, ..., I_k\}$ является сгнездованным для $\mathfrak{B}$, если и только если множество $\{I'_1, ..., I'_k\}$ является сгнездованным для $\mathfrak{B}_0$. Здесь $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}|_C \times C \setminus \mathfrak{B}$;
$I' = I$, если $I \in \mathfrak{B} - \{C\} : I \subset C$ либо $I \in \mathfrak{B} - B_{max} : C \cap I = \emptyset, C \cup I \notin \mathfrak{B}$,
$I' = I - C$, если $I \in \mathfrak{B} - B_{max} - \{C\} : C \subset I$;
$\mathfrak{B}_0 = \{I \in \mathfrak{B} - B_{max} - \{C\} : \{C, I\} \in N(\mathfrak{B})\}$.
$\square$

Перейдем к доказательству самой теоремы.
Докажем, что вектора e_I для $I \in N \cup B_{max}$ формируют $\mathbb{Z}$-базис в $\mathbb{Z}^s$.
Будем действовать для этого индукцией по $N = rk(\mathfrak{B})$. Если $rk(\mathfrak{B}) = 0$, то N пусто и $\mathfrak{B}$ содержит только синглтоны (одноэлементные подмножества), что делает утверждение теоремы тривиальным. Если $rk(\mathfrak{B}) > 0$, выберем $C \in \mathfrak{B}$ и применим предположение индукции к порождающему множеству $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}|_C \times C \setminus \mathfrak{B}$ на S и максимальному сгнездованному множеству $N' \in N(\mathfrak{B}|_C \times C \setminus \mathfrak{B})$, изоморфному N по лемме 1. Заменяя $(\mathfrak{B}, N)$ на $(\mathfrak{B}', N')$, изменим вектора e_I для $I \in N \cup B_{max}$ следующим образом: для каждого $I \in N \cup B_{max}$, строго содержащего C, заменим e_I на $e_{I-C} = e_I - e_C$. Очевидно, это преобразование, также, как и обратное к нему, сохраняет базис $\mathbb{Z}^s$. $\square$

Теперь приведем новое доказательство, использующее двойную индукцию по размерности.
Доказательство 2:
Переведем определение сгнездованного множества на язык нормальных векторов.
Для начала отметим, что все нормальные векторы нестаэдра, соответствующего порождающему множеству на $n+1$ элементах в $n+1$-мерном пространстве могут иметь только единичные и нулевые координаты. При переходе к n-мерному подпространству, заданному уравнением $x_1 + ... + x_{n+1} = const$ и полностью содержащему в себе нестаэдр, появляются также координаты вида -1.
Если два нормальных вектора A_1 и A_2 восстановлены к гиперграням, сходящимся в общей вершине, то для них должно выполняться следующее ***условие***, соответствующее первому условию на элементы сгнездованного множества:

(1)
   (a) либо все единичные координаты вектора A_1 являются подмножеством единичных координат вектора A_2,
   (b) либо все единичные координаты вектора A_2 являются подмножеством единичных координат вектора A_1,
   (c) либо множества единичных координат векторов A_1 и A_2 не пересекаются.

Докажем с помощью этого условия следующую лемму, на которую, в свою очередь, будет опираться наше доказательство дельзантовости.

Лемма 2.
В каждой вершине нестаэдра $P_{\mathfrak{B}} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ сходится по меньшей мере одна гипергрань, нормальный вектор к которой имеет ровно одну ненулевую (единичную) координату в $\mathbb{R}^{n+1}$.
Доказательство:
Пусть это не так. То есть пусть существует такая вершина нестаэдра, что все нормальные вектора $A_1, ..., A_n$ в сходящихся в ней гипергранях имеют $\geqslant 2$ ненулевых координат.
Тогда выберем среди этих векторов вектор с наименьшим (но $\geqslant 2$) количеством ненулевых координат. Без ограничения общности можно считать, что это вектор A_1. И начнем сравнивать его

с остальными векторами $A_2, ..., A_n$ по порядку. При сравнении вектора A_1 с очередным A_j могут возникнуть два случая:

1) Множество единичных координат вектора A_1 содержится в множестве единичных координат вектора A_j (наоборот быть не может по выбору A_1 как вектора с минимальным количеством единичных координат). Тогда заменим вектор A_j на $A_j - A_1$. Эта операция не влияет на условие дельзантовости, и в этом новом векторе стоят нули на тех местах, где у A_1 стоят единицы.

2) Множества единичных координат A_1 и A_j не пересекаются. Тогда мы не трогаем вектор A_j и замечаем, что в нем уже стоят нули на тех местах, где у A_1 стоят единицы.

Запишем координаты векторов $A_1, ..., A_n$ по строкам в матрицу размеров $n \times (n+1)$. В этой матрице над единицами вектора A_1 находится полоса нулей ширины $\geqslant 2$.

Теперь для перехода к векторам в n-мерном пространстве нужно вычесть из каждого столбца последний столбец, а затем удалить его (это будет соответствовать тому, что мы выразили x_{n+1}-ю координату через остальные). То, что раньше было полосой нулей, то есть несколькими столбцами нулей с единицей на одном и том же месте, превращается в несколько одинаковых столбцов (содержащих элементы -1, 0, 1). Но тогда полученная матрица вырождена, что приводит нас к противоречию (это значило бы, что пересекающиеся в вершине нестаэдра гиперграни не находятся в общем положении). □

Приступим к доказательству самой теоремы.

Итак, пусть среди набора $\{A_i, i \in [1, n]\}$ нормальных векторов к граням, сходящимся в общей вершине, вектор A_1 имеет единственный ненулевой (единичный) элемент. При необходимости переименуем координаты так, чтобы этот элемент стоял у него на первом месте. Теперь перейдём к матрице размера $n \times n$, вычитая изо всех столбцов последний и затем удаляя его. Затем произведем следующий набор преобразований, который назовём Δ: вычитаем или прибавляем к каждому вектору из набора $A_2, ..., A_n$ вектор A_1 так, чтобы на том месте, где у A_1 стоит единица, у всех остальных векторов были нули.

Получаем матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что ее подматрица $M = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ размера $(n-1) \times (n-1)$ имеет определитель, по модулю равный единице, что даст такой же определитель у исходной матрицы, и по индукции доказывает теорему (базой индукции можно взять двумерный случай).

Модуль определителя не изменится при целочисленных преобразованиях, поэтому мы можем провести набор преобразований Δ^{-1} (игнорируя отсеченные первый столбец и первую строку). Переходя на язык порождающих множеств, можно сказать, что мы получили множество $1 \setminus B$, где $\{1\}$ - одноэлементное подмножество, соответствующее первой координате. Это множество также является порождающим, но имеет меньшую размерность. Следовательно, ему соответствует нестаэдр меньшей размерности, который является дельзантовым по предположению индукции, и модуль нужного определителя равен 1.□

Список литературы

[1] V. M. Buchstaber, T. E. Panov - *Toric Topology,* A book project, стр.27-33.

[2] A. Zelevinsky - *Nested Complexes And Their Polyhedral Realizations*, Pure and Applied Mathematics Quarterly, 2 (2006), no. 3, 1-17, http://arxiv.org/abs/math/0507277v4, стр. 2-8.