Московский Государственный Университет имени
М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

«Вычисление когомологий Дольбо некоторых момент-угол многообразий»

Выполнила студентка 503 группы
Кушнарева Лаида
Научный руководитель
профессор
Панов Тарас Евгеньевич

Москва 2015

1. Введение

Момент-угол комплексы впервые были введены в работах [2] и [3]. Момент-угол комплекс $\mathscr{Z}_\mathcal{K}$ сопоставляется конечному абстрактному симплициальному комплексу $\mathcal{K}$ на множестве $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$ и представляет собой некоторое объединение декартовых произведений дисков и окружностей. Конкретнее,

$$\mathscr{Z}_\mathcal{K} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} B_I \subset \mathbb{D}^m,$$

где $\mathbb{D}^m$ — единичный полидиск в пространстве $\mathbb{C}^m$, объединение берется по всевозможным симплексам $I = \{i_1, \dots i_k\} \in \mathcal{K}$, а

$$B_I = \{(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{D}^m \colon |z_i|^2 = 1, i \notin I\}.$$

По-другому, момент-угол комплекс представляет собой полиэдральное произведение $(D^2, S^1)^\mathcal{K}$.

Оказывается, что дополнение к построенному по этому же симплициальному комплексу $\mathcal{K}$ набору координатных подпространств в $\mathbb{C}^m$ деформационно ретрагируется на $\mathscr{Z}_\mathcal{K}$ и поэтому имеет те же группы гомотопий и гомологий. Поэтому с помощью момент-угол комплексов, например, удобно изучать дополнения к координатным подространствам в $\mathbb{C}^m$. Кроме того, гомологические инварианты колец граней могут быть интерпретированы геометрически в терминах когомологий момент-угол комплексов.

Момент-угол комплексы, соответствующие симплициальным веерам и, в частности, симплициальным многогранникам, могут быть наделены гладкой структурой. Они и называются момент-угол многообразиями. Момент-угол многообразия четной размерности также допускают комплексно-аналитическую структуру и образуют важное и интересное семейство некэлеровых комплексных многообразий. Одним из основных инвариантов комплексной структуры многообразия являются когомологии Дольбо и их размерности - числа Ходжа. Когомогологии Дольбо комплексного момент-угол многообразия можно описывать в терминах комбинаторно-геометрических данных, задающих комплексную структуру. Во многих случаях когомологии Дольбо момент-угол многообразия $\mathscr{Z}_\mathcal{K}$ можно вычислять при помощи когомологий соответствующего торического многообразия.

В данной работе вычисляются когомологии Дольбо двух момент-угол многообразий, соответствующих четырех- и пятиугольнику с некоторой заданной комплексной структурой.

2. Торические многообразия, соответствующие четрех- и пятиугольнику и их когомологии

Теорема 1. (Данилов-Юркевич)

Пусть V_Σ — неособое комплексное n-мерное торическое многообразие, соответствующее полному регулярному вееру Σ в $N_\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$. Тогда кольцо когомологий V_Σ задается как

$$H^*(V_\Sigma;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[v_1,...,v_m]/\mathcal{I},$$

где $v_1,...,v_m \in H^2(V_\Sigma)$ - классы когомологий, двойственные инвариантным дивизорам, соответствующим одномерным конусам Σ, и $\mathcal{I}$ - идеал, порожденный элементами двух типов:

(a) $v_{i_1},...,v_{i_k}$ при $\{i_1,...,i_k\} \notin \mathcal{K}_\Sigma$ (отношения Стенли-Райснера)

(b) $\sum_{j=1}^m \langle a_j,u\rangle v_j$ для любого $\forall u \in N^*$.

Вычисление когомологий торического многообразия по многоугольнику. В частном случае $n=2$ мы получаем следующее описание торических многообразий, соответствующих многоугольникам. Пусть дан m-угольник, стороны которого пронумерованы последовательно от 1 до m. Предположим, что этот многоугольник определяет неособый веер.

Пусть $a_i = (a_{1i}, a_{2i})$ — примитивный нормальный вектор к i-й стороне многоугольника, направленный внутрь. Запишем эти векторы в виде матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}.$$

Тогда когомологии соответствующего торического многообразия, согласно теореме Данилова-Юркевича, можно представить как фактор-алгебру алгебры многочленов $\mathbb{Z}[v_1,...,v_m]$ по соотношениям следующих двух типов:

(a) $v_iv_j = 0$, где i,j — пара несмежных сторон многоугольника.

(b) $AV = 0$, где $V = (v_1,...v_m)^T$.

Когомологии торического многообразия в случае четырехугольника. В случае четырехугольника с матрицей нормальных векторов $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ эти соотношения имеют вид

$$v_1 - v_3 - v_4 = 0,\ v_2 - v_4 = 0,\ v_1v_3 = 0,\ v_2v_4 = 0.$$

Из второго и четвертого соотношения получаем $v_4^2 = 0$.

Возведя первое соотношение $v_1 - v_3 = v_4$ в квадрат, получаем $v_1^2 - 2v_1v_3 + v_3^2 = v_4^2 = 0$. С учетом того, что $v_1v_3 = 0$, получаем $v_1^2 = v_3^2$. Так как у нас есть четыре образующих и два линейных образующих соотношения, все можно выразить через две переменные.

Например, после замены $u_1 = v_1, u_2 = v_3$ получаем:

$$H^*(V) \cong \mathbb{Z}[u_1,u_2]/u_1^2 = -u_2^2,\ u_1u_2 = 0.$$

Когомологии торического многообразия в случае пятиугольника. В случае пятиугольника с матрицей нормальных векторов

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

образующие соотношения имеют вид

$v_1 - v_3 - v_4 = 0, v_2 - v_3 - v_5 = 0, v_1v_4 = 0, v_2v_3 = 0, v_1v_3 = 0, v_2v_3 = 0, v_4v_5 = 0.$

Рассмотрим замену $v_1 + v_5 = u_1, v_4 = u_2, v_5 = u_3$.

После замены алгебра принимает более простой вид: $C[u_1,u_2,u_3]/u_1^2 = -u_2^2 = -u_3^2, u_1u_2 = u_1u_3 = u_2u_3 = 0$.

Это кольцо представляет собой кольцо когомологий связной суммы $\mathbb{CP}^2\#\overline{\mathbb{CP}^2}\#\overline{\mathbb{CP}^2}$. Легко видеть, что наше многообразие диффеоморфно этой связной сумме.

3. Когомологии Дольбо момент-угол многообразий, соответствующих четырех- и пятиугольнику

Определение 2. Пусть $\Omega^{p,q}(M)$ — пространство комплексных дифференциальных форм типа (p,q) на комплексном многообразии M. Группа когомологий Дольбо определяется как

$$H^{p,q}_{\bar\partial}(M) = Z^{p,q}_{\bar\partial}(M)/\bar\partial(\Omega^{p,q-1}(M)),$$

где $Z^{p,q}_{\bar\partial}(M)$ — пространство $\bar\partial$-замкнутых форм типа (p,q). Из соотношения $\partial^2/\partial\bar z_i\partial\bar z_j = \partial^2/\partial\bar z_j\partial\bar z_i$ вытекает $\bar\partial^2 = 0$ на $\Omega^{p,q}(M)$, так что $\bar\partial(\Omega^{p,q}(M)) \subset Z^{p,q+1}_{\bar\partial}(M)$, и когомологии Дольбо определены корректно.

Операторы $\bar\partial : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p,q+1}(M)$, $\partial : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p+1,q}(M)$ определяются соотношениями $\bar\partial = \pi^{(p,q+1)} \circ d$, $\partial = \pi^{(p+1,q)} \circ d$ (т.е. $\partial + \bar\partial = d$).

Следующая конструкция позволяет вводить комплексную структуру на момент-угол многообразии четной размерности, соответствующему симплициальному вееру.

Конструкция 1 (конструкция 6.6.1 в [1])**.** Пусть дан полный симплициальный веер Σ в n-мерном пространстве $N_{\mathbb{R}}$, и A — матрица, столбцами которой являются координаты примитивных векторов $a_1, \dots, a_m$ вдоль одномерных конусов. Предположим, что $m-n$ четно (этого всегда можно добиться, добавив «пустой» одномерный конус с соответствующим вектором $a_i = 0$). Положим $m - n = 2l$.

Выберем комплексное l-мерное подпространство в $\mathbb{C}^m$, проектирующееся изоморфно на $(m-n)$-мерное вещественное подпространство $KerA \subset \mathbb{R}^m$. Более точно, пусть $\mathfrak{c} \cong \mathbb{C}^l$, и выберем $\mathbb{C}$-линейное отображение $\Psi : \mathfrak{c} \to \mathbb{C}^m$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

(a) Композиция отображений $\mathfrak{c} \xrightarrow{\Psi} \mathbb{C}^m \xrightarrow{Re} \mathbb{R}^m$ — мономорфизм.

(b) Композиция отображений $\mathfrak{c} \xrightarrow{\Psi} \mathbb{C}^m \xrightarrow{Re} \mathbb{R}^m \xrightarrow{A} N_{\mathbb{R}}$ — ноль.

Введём следующую голоморфную, но не алгебраическую подгруппу в алгебраическом торе $\mathbb{C}*^m$

$$C_\Psi = \exp \Psi(\mathfrak{c}) = \{e^{\langle \psi_1, \omega\rangle}, \dots, e^{\langle \psi_m, \omega\rangle} \in (\mathbb{C}^\times)^m\},$$

Очевидно, мы имеем $C_\Psi \cong \mathbb{C}^l$.

Конструкция 2 (Конструкция 4.7.1 в [1])**.** Для каждго подмножества $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$ рассмотрим соответствующее координатное подпространство в $\mathbb{C}^m$:

$$L_I = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : z_{i_1} = \ldots = z_{i_k} = 0\}.$$

Сопоставим симплициальному комплексу $\mathcal{K}$ набор комплексных координатных подпространств

$$\mathcal{A}(\mathcal{K}) = \{L_I : I \notin \mathcal{K}\}$$

и рассмотрим его дополнение:

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \cup_{I \notin \mathcal{K}} L_I.$$

Теорема 3. *Пусть данные $\{\mathcal{K}; a_1, ..., a_m\}$ определяют полный регулярный веер Σ в $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^m$, $m - n = 2l$. Тогда*

(a) Голоморфное действие C_Ψ на $U(\mathcal{K})$ свободно и собственно, и факторпространство $U(\mathcal{K})/C_\Psi$ имеет структуру компактного комплексного многообразия.

(b) $U(\mathcal{K})/C_\Psi$ диффеоморфно момент-угол многообразию $\mathscr{Z}_{\mathcal{K}}$.

Таким образом, $\mathscr{Z}_{\mathcal{K}}$ наделен комплексной структурой, на которой каждый элемент тора $\mathbb{T}^m$ действует голоморфным преобразованием.

Пусть данные $\{\mathcal{K}; a_1, ..., a_m\}$ определяют полный симплициальный ***рациональный*** веер Σ. Тогда определена следующая алгебраическая подгруппа в $(\mathbb{C}^*)^m$:

$$G = \{(z_1, \dots, z_m) \in (\mathbb{C}^\times)^m : \prod_{i=1}^m z_i^{\langle a_i, u\rangle} = 1 \text{ для всех } u \in N\}.$$

Торическое многообразие V_Σ определяется как фактормногообразие $U(\mathcal{K})/G$.

Теорема 4. (Теорема 6.7.1. в [1]) .

(a) Торическое многообразие V_Σ как топологическое пространство является является фактор-пространством $\mathscr{Z}_\mathcal{K}$ по голоморфному действию комплексного компактного тора G/C_Ψ.

(b) Если веер Σ регулярный, то V_Σ — база голоморфного главного расслоения с тотальным пространством $\mathscr{Z}_\mathcal{K}$ и слоем компактным комплексным тором $G/C_\Psi \cong T^l_\mathbb{C}$.

Когомологии Дольбо компактного комплексного l-тора $T^l_\mathbb{C}$ изоморфны внешней алгебре от $2l$ образующих:

$$H^{*,*}_{\bar\partial}(T^l_\mathbb{C}) \cong \Lambda[\xi_1, \dots \xi_l, \eta_1, \dots, \eta_l],$$

где $\xi_1, \dots, \xi_l \in H^{1,0}_{\bar\partial}(T^l_\mathbb{C})$ — классы базисных голоморфных 1-форм, и $\eta_1, \dots, \eta_l \in H^{0,1}_{\bar\partial}(T^l_\mathbb{C})$ — классы базиса антиголоморфных 1-форм.

Когомологии де Рама торического многообразия V_Σ допускают разложение Ходжа с нетривиальными компонентами только на главной диагонали ([**5**], параграф 12). Вместе с теоремой Данилова-Юркевича это дает следующее описание его когомологий Дольбо:

$$H^{*,*}_{\bar\partial}(V_\Sigma) \cong \mathbb{Z}[v_1, ..., v_m]/\mathcal{I},$$

где $v_i \in H^{1,1}_{\bar\partial}(V_\Sigma)$ и идеал I определяется так же, как в теореме 1.

Следующий результат получается из рассмотрения спектральной последовательности Бореля голоморфного расслоения $\mathscr{Z}_\mathcal{K} \to V_\Sigma$.

Теорема 5. (Теорема 6.7.3 из [**1**]).

Пусть данные $\{\mathcal{K}; a_1, ..., a_m\}$ определяют полный рациональный регулярный веер Σ в $N_\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^m$, $m - n = 2l$, и пусть $\mathscr{Z}_\mathcal{K}$ — соответствующее момент-угол многообразие с комплексной структурой, определенной предыдущей теоремой. Тогда алгебра когомологий Дольбо $H^{*,*}_{\bar\partial}(\mathscr{Z}_\mathcal{K})$ изоморфна когомологиям дифференциальной биградуированной алгебры

$$A = \Lambda[\xi_1, ..., \xi_l, \eta_1, ..., \eta_l] \otimes H^{*,*}_{\bar\partial}(V_\Sigma)$$

с дифференциалом d бистепени $(0, 1)$, определенным на образующих как:

$$dv_i = d\eta_j = 0,\ d\xi_j = c(\xi_j), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant l,$$

где c — первый класс Черна отображения главного $T^l_\mathbb{C}$-расслоения $\mathscr{Z}_\mathcal{K} \to V_\Sigma$.

Лемма 6. (6.7.2 из [**1**]).

Пусть k — количество нулевых векторов среди $a_1, ..., a_m$. Отображение первого класса Черна

$$c : H^{1,0}_{\bar\partial}(T^l_\mathbb{C}) \to H^2(V_\Sigma, \mathbb{C}) = H^{1,1}_{\bar\partial}(V_\Sigma)$$

главного $T^l_\mathbb{C}$-расслоения $\mathscr{Z}_\mathcal{K} \to V_\Sigma$ задается композицией

$$AnnIm\Psi/AnnKerA_\mathbb{C} \xrightarrow{i} \mathbb{C}^m/AnnKerA_\mathbb{C} \xrightarrow{p} \mathbb{C}^{m-k}/AnnKerA_\mathbb{C},$$

где i — включение, p — проекция, «забывающая» координаты в $\mathbb{C}^m$, соответствующие нулевым векторам.

Точнее, отображение c задается на образующих $\xi_j \in H^{1,0}_{\bar\partial}(T^l_\mathbb{C})$, $1 \leqslant j \leqslant l$, как

$$c(\xi_j) = \mu_{j1}v_1 + ... + \mu_{jm}v_m,$$

где $M = (\mu_{ij})$ — комплексная $l \times m$- матрица, удовлетворяющая условиям:

(a) $\Gamma M^T : \mathbb{C}^l \to \mathbb{C}^{2l}$ - мономорфизм, где $\Gamma : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^{m-n} = \mathbb{C}^{2l}$ — сюрвективное отображение, удовлетворяющее $\Gamma A = 0$.

(b) $M\Psi = 0$.

Когомологии Дольбо момент-угол многообразия в случае четырехугольника. На произведении сфер $S^3 \times S^3$ можно ввести комплексную структуру, рассматривая произведение двух расслоений Хопфа $S^3 \times S^3 \to \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ и вводя в каждом слое $S^1 \times S^1$ структуру комплексного многообразия (тора) $T^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z})$ с одним и тем же $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Получаемое комплексное многообразие называется многообразием Калаби-Экманна $CE(1,1)$. Ту же самую комплексную структуру можно получить как частный случай конструкции 1 и теоремы 4, рассматривая $S^3 \times S^3$ как момент-угол многообразие $\mathscr{Z}_{\mathcal{K}}$, соответствующее границе четырехугольника (границе произведения двух одномерных симплексов). Для этого рассмотрим отображение

$$\Psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^4, \quad \omega \mapsto (\omega, \omega, \alpha\omega, \alpha\omega), \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Легко видеть, что оно удовлетворяет условиям конструкции 1. Тогда структура многообразия Калаби-Экмана получается как факторпространство $U(\mathcal{K})/C_\Psi \cong S^3 \times S^3$

Из теоремы 5 и леммы 6 вытекает следующее описание когомологий Дольбо многообразия Калаби-Экмана:

$$H^{*,*}_{\bar\partial}(CE(1,1)) \cong H\big(\Lambda[\xi,\eta] \otimes \mathbb{C}[x,y]/(x^2,y^2), d\big),$$

где $dx = dy = d\eta = 0, d\xi = x - y$ (поскольку когомологии соответствующего торического многообразия $V_\Sigma = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ можно также представить как $\mathbb{C}[x,y]/(x^2,y^2)$). Откуда получаем

$$H^{*,*}_{\bar\partial}(CE(1,1)) \cong \Lambda[\omega,\eta] \otimes \mathbb{C}[x]/(x^2),$$

где $\omega \in H^{2,1}_{\bar\partial}(CE(1,1))$ — класс когомологий коцикла $\xi(x+y)$.

Когомологии Дольбо момент-угол многообразия в случае пятиугольника. Рассмотрим момент-угол многообразие $\mathscr{Z}_{\mathcal{K}}$, соответствующее границе пятиугольника.

$$\mathscr{Z}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2 \times S^1 \times S^1 \times S^1) \cup (S^1 \times \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2 \times S^1 \times S^1) \cup (S^1 \times S^1 \times \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2 \times S^1) \cup \\ \cup (S^1 \times S^1 \times S^1 \times \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2) \cup (\mathbb{D}^2 \times S^1 \times S^1 \times S^1 \times \mathbb{D}^2).$$

Известно (см. Теорему 4.6.12 в [1]), что это момент-угол многообразие диффеоморфно связной сумме $(S^3 \times S^4)^{\#5}$ пяти экземпляров произведения сфер $S^3 \times S^4$. Мы введем на этом многообразии комплексную структуру на основе конструкции 1 и вычислим его когомологии Дольбо.

В качестве матрицы A берем матрицу (2.1). Тогда соответствующая матрица Γ имеет вид

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь в качестве Ψ можно взять отображение с матрицей

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix}.$$

Вычислим подходящую матрицу M.

Из условия $\Gamma M = 0$ получаем систему

$$\begin{cases} \mu_{11}(1+i) + \mu_{21} + \mu_{31} + i\mu_{41} & = 0 \\ \mu_{21} + \mu_{51} + i\mu_{61} & = 0 \\ \mu_{12}(1+i) + \mu_{22} + \mu_{32} + i\mu_{42} & = 0 \\ \mu_{22} + \mu_{52} + i\mu_{62} & = 0 \end{cases}$$

Также ее решение M должно удовлетворять уравнению $\Gamma M^T \neq 0$, т.е.

$$\begin{pmatrix} \mu_{11} + \mu_{21} + \mu_{31} & \mu_{12} + \mu_{22} + \mu_{32} \\ \mu_{11} + \mu_{41} & \mu_{12} + \mu_{42} \\ \mu_{21} + \mu_{51} & \mu_{22} + \mu_{52} \\ \mu_{61} & \mu_{62} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Этим условиям удовлетворяет, например, такая матрица M:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ i & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

То есть, $d\xi_1 = v_3 + iv_4, d\xi_2 = v_5$ (вершина v_6 — «призрачная»).

Теорема 7. *Группы когомологий Дольбо $H^{p,q}_{\bar\partial}(\mathscr{Z}_K)$ момент-угол многообразия, соответствующего пятиугольнику, приведены в следующей таблице:*

4	0	0	0	0	$\mathbb{C}$
3	0	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^6$	$\mathbb{C}^3$	$\mathbb{C}^2$
2	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^2$	$\mathbb{C}^8$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
1	$\mathbb{C}^2$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^4$	$\mathbb{C}$	0
0	$\mathbb{C}$	0	0	0	0
q/p	0	1	2	3	4

Доказательство. В первую очередь заметим, что элементы v_i, η_j, ξ_k имеют градуировки соответственно $(1,1), (0,1), (1,0)$.

$H^{0,0} = Ker(d : A^{0,0} \to A^{0,1})/Im(d : A^{0,-1} \to A^{0,0}) = \mathbb{C}/0 = \mathbb{C}$, т.к. $A^{0,0}$ содержит в себе только единицу.

$H^{1,0} = Ker(d : A^{1,0} \to A^{1,1})/Im(d : A^{1,-1} \to A^{1,0})$. Алгебра $A^{1,0}$ содержит элементы вида $\xi_i, i = 1, 2$. $d\xi_1 = v_3 + iv_4, d\xi_2 = v_5$ — линейно независимы, следовательно, в ядре ничего не лежит. $H^{1,0} = 0/0 = 0$.

$H^{0,1} = Ker(d : A^{0,1} \to A^{0,2})/Im(d : A^{0,0} \to A^{0,1})$. Алгебра $A^{0,1}$ содержит линейные комбинации элементов вида $\eta_i, i = 1, 2$, дифференциал от которых равен нулю. Поэтому $H^{0,1} = \mathbb{C}^2/0 = \mathbb{C}^2$.

$H^{2,0} = Ker(d : A^{2,0} \to A^{2,1})/Im(d : A^{2,-1} \to A^{2,0})$. Алгебра $A^{2,0}$ содержит элементы вида $\xi_1\xi_2$. $d(\xi_1\xi_2) = d\xi_1\xi_2 - d\xi_2\xi_1 = \xi_2(v_3 + iv_4) - \xi_1 v_5 \neq 0$. Поэтому ядро пусто. Образ также пуст, значит, $H^{2,0} = 0$.

$H^{1,1} = Ker(d : A^{1,1} \to A^{1,2})/Im(d : A^{1,0} \to A^{1,1})$. Алгебра $A^{1,1}$ содержит элементы вида $\xi_i\eta_j \xrightarrow{d} d\xi_i\eta_j \neq 0$ и $v_i \xrightarrow{d} 0, i = 1, \ldots, 3$. Поэтому размерность ядра 3. $A^{1,0}$ содержит $\xi_1 \xrightarrow{d} v_3 + iv_4, \xi_2 \xrightarrow{d} v_5$. Размерность образа 2. $H^{1,1} = \mathbb{C}^3/\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}$.

$H^{0,2} = Ker(d : A^{0,2} \to A^{0,3})/Im(d : A^{0,1} \to A^{0,2})$. Алгебра $A^{0,2}$ содержит элементы вида $\eta_1\eta_2 \xrightarrow{d} 0$, т.е. размерность ядра 2. $A^{0,1}$ содержит $\eta_i \xrightarrow{d} 0$, т.е. образ нулевой. $H^{0,2} = \mathbb{C}^2/0 = \mathbb{C}^2$.

$H^{3,0} = Ker(d : A^{3,0} \to A^{3,1})/Im(d : A^{3,-1} \to A^{3,0})$. Алгебра $A^{3,0}$ не содержит ненулевых элементов. Элементы вида $\xi_i\xi_j^2 = 0$, как элементы внешней алгебры, из-за антикоммутативности умножения в ней. $H^{3,0} = 0$.

$H^{2,1} = Ker(d : A^{2,1} \to A^{2,2})/Im(d : A^{2,0} \to A^{2,1})$. Алгебра $A^{2,1}$ содержит элементы вида $\xi_i v_j \xrightarrow{d} d\xi_i v_j$. Элементов из неё может быть 6 линейно независимых. Покажем, что размерность ядра 5, явно выписав коциклы. Будем искать коциклы в следующем виде:

$$(av_3 + bv_4 + cv_5)\xi_2, (a'v_3 + b'v_4 + c'v_5)\xi_1.$$

После несложных вычислений (приравнивания дифференциала от этих выражений к нулю) получаем, что конкретнее они имеют вид

$$\langle (av_3 + bv_4 + av_5)\xi_2, (cv_3 + dv_4 + (i-1)(c-d)\xi_1 \rangle.$$

Поскольку имеется 4 независимых параметра, размерность этой линейной оболочки равна 4. Кроме того, один коцикл, другого вида, содержится в образе: при отображении из $A^{2,0}$ имеем $\xi_1\xi_2 \xrightarrow{d}$

$d\xi_1 xi_2 - d\xi_2\xi_1$. Также в $A^{2,1}$ есть одномерное подпространство с не-коциклами: например, $\xi_2 v_5 \xrightarrow{d} v_5^2 \neq 0$. Поэтому размерность ядра $4+1=5$, образа — 1, и $H^{2,1} = \mathbb{C}^5/\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}^4$.

$H^{1,2} = Ker(d : A^{1,2} \to A^{1,3}/Im(d : A^{1,1} \to A^{1,2})$. Алгебра $A^{1,2}$ содержит элементы вида $v_i\eta_j \xrightarrow{d} 0$ и $\xi_i\eta_1\eta_2 \xrightarrow{d} d\xi_i\eta_1\eta_2 \neq 0$. Т.о. размерность ядра 6. $A^{1,1}$ содержит $v_i \xrightarrow{d} 0$ и $\xi_i\eta_j \xrightarrow{d} d\xi_i\eta_j \neq 0$. Размерность образа 4. $H^{1,2} = \mathbb{C}^6/\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2$.

$H^{0,3} = Ker(d : A^{0,3} \to A^{0,4})/Im(d : A^{0,2} \to A^{0,3}) = 0/0 = 0$.

$H^{4,0} = Ker(d : A^{4,0} \to A^{4,1})/Im(d : A^{4,-1} \to A^{4,0}) = 0/0 = 0$, т.к. $A^{4,0} = A^{4,-1} = 0$.

$H^{3,1} = Ker(d : A^{3,1} \to A^{3,2})/Im(d : A^{3,0} \to A^{3,1}$. $A^{3,1}$ содержит элементы вида $\xi_1\xi_2 v_i$. Таких в ядре 1. Это можно увидеть, если выписать матрицу отображений

$$u_1\xi_1\xi_2 \to \alpha_{11}\xi_1 u_3^2 + \alpha_{21}\xi_2 u_3^2 u_2\xi_1\xi_2 \to \alpha_{12}\xi_1 u_3^2 + \alpha_{22}\xi_2 u_3^2 u_3\xi_1\xi_2 \to \alpha_{13}\xi_1 u_3^2 + \alpha_{23}\xi_2 u_3^2,$$

где

$$u_1 = v_1 + v_5, u_2 = v_4, u_3 = v_5 :$$
$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & (i-1) & -1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ранг данной матрицы, очевидно, равен 2, в ноль переводится один элемент $A^{3,1}$. Размерность же образа, по которому мы факторизуем, 0, поскольку в $A^{3,1}$ ничего нет. $H^{3,1} = \mathbb{C}/0 = \mathbb{C}$.

$H^{2,2} = Ker(d : A^{2,2} \to A^{2,3})/Im(d : A^{2,1} \to A^{2,2})$. $A^{2,2}$ содержит ненулевые элементы вида $v_iv_j \in Kerd$, $\xi_iv_j\eta_k$, $\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2 \notin Kerd$. Элементов первого вида всего 1 линейно независимых (это легко понять, учитывая пункт 2.2, в котором показано, что алгебра, построенная на v_i, эквивалентна алгебре на элементах $u_i, i = 1, 2, 3$, в которой все произведения $u_iu_j = 0, i \neq j$, а u_i^2 равны друг другу с точностью до знака). Элементов второго вида 6×2 линейно независимых. Из них 5×2 линейно независимых находятся в ядре (вычисления аналогичны таковым для элементов вида ξ_iv_j из пункта про $H^{2,1}$). $A^{2,1}$ содержит ненулевые элементы вида $v_i\xi_j$ и $\xi_1\xi_2\eta_i$. Линейные комбинации элементов первого вида переводятся в суммы вида $d\xi_1(\Sigma v_i)d\xi_2(\Sigma v_j)d\xi_1 = \Sigma v_iv_j$. Таких линейно независимых всего 1. Элементов второго вида два, и они оба переводятся под действием d в различные ненулевые элементы. В итоге $H^{2,2} = \mathbb{C}^{1+10}/\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^8$.

$H^{1,3} = Ker(d : A^{1,3} \to A^{1,4})/Im(d : A^{1,2} \to A^{1,3})$. $A^{1,3}$ содержит $v_i\eta_1\eta_2 \xrightarrow{d} 0$. Таких 3 линейно независимых. $A^{1,2}$ содержит $v_i\eta_j \xrightarrow{d} 0$ и $\xi_i\eta_1\eta_2 \xrightarrow{d} d\xi_i\eta_1\eta_2$ - таких 2 в образе. $H^{1,3} = \mathbb{C}^3/\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}$.

$H^{0,4} = Ker(d : A^{0,4} \to A^{0,5})/Im(d : A^{0,3} \to A^{0,4}) = 0/0 = 0$.

$H^{4,1} = Ker(d : A^{4,1} \to A^{4,2})/Im(d : A^{4,0} \to A^{4,2}) = 0/0 = 0$.

$H^{3,2} = Ker(d : A^{3,2} \to A^{3,3})/Im(d : A^{3,1} \to A^{3,2})$. $A^{3,2}$ содержит $\xi_iv_jv_k \xrightarrow{d} 0$ и $\xi_1\xi_2v_i\eta_j \xrightarrow{d} (d\xi_1\xi_2 - d\xi_2\xi_1)v_i\eta_j$. Размерность ядра 2. $A^{3,1}$ содержит $\xi_1\xi_2v_i$. Размерность образа таких элементов при отображении d равна 1. $H^{3,2} = \mathbb{C}^2/\mathbb{C} = \mathbb{C}$.

$H^{2,3} = Ker(d : A^{2,3} \to A^{2,4})/Im(d : A^{2,2} \to A^{2,3})$. $A^{2,3}$ содержит $v_iv_j\eta_k \xrightarrow{d} 0$ - размерность линейной оболочки таких элементов 2. Также эта алгебра содержит $\xi_iv_j\eta_1\eta_2 \xrightarrow{d} d\xi_iv_j\eta_1\eta_2$. Таких в ядре 5 (см. вычисления для $H^{2,1}$ с элементами $d\xi_iv_j$). $A^{3,1}$ содержит $\xi_1\xi_2v_i \xrightarrow{d} (d\xi_1\xi_2 - d\xi_2\xi_1)v_i \neq 0$. Этот образ имеет размерность 1. В итоге $H^{2,3} = \mathbb{C}^{5+2}/\mathbb{C} = \mathbb{C}^6$.

$H^{1,4} = Ker(d : A^{1,4} \to A^{1,5})/Im(d : A^{1,3} \to A^{1,4}) = 0/0 = 0$.

$H^{4,2} = Ker(d : A^{4,2} \to A^{4,3})/Im(d : A^{4,1} \to A^{4,2})$. $A^{4,2}$ содержит $\xi_1\xi_2v_iv_j \xrightarrow{d} (d\xi_1\xi_2 - d\xi_2\xi_1)v_iv_j = 0$ — размерность ядра 1. $A^{4,1}$ содержит только нулевые элементы по соображениям размерности. Поэтому $H^{4,2} = \mathbb{C}/0 = \mathbb{C}$.

$H^{3,3} = Ker(d : A^{3,3} \to A^{3,4})/Im(d : A^{3,2} \to A^{3,3})$. $A^{3,3}$ содержит $\xi_1\xi_2v_i\eta_1\eta_2 \xrightarrow{d} (d\xi_1\xi_2 - d\xi_2\xi_1)v_i\eta_1\eta_2$ — таких 1 нулевых (см.рассуждения для $H^{3,1}$ с рангом матрицы); $\xi_iv_jv_k\eta_l \xrightarrow{d} 0$. Таких 4. Т.е. размерность ядра $4+1=5$. $A^{3,2}$ содержит $\xi_1\xi_2v_i\eta_j \xrightarrow{d} (d\xi_1\xi_2 - d\xi_2\xi_1)v_i\eta_j$ — таких 1 нулевых и 2 ненулевых по тем же соображениям; $\xi_iv_jv_k \xrightarrow{d} 0$. Т.о. размерность образа 2. $H^{3,3} = \mathbb{C}^5/\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^3$.

$H^{2,4} = Ker(d : A^{2,4} \to A^{2,5})/Im(d : A^{2,3} \to A^{2,4})$. $A^{2,4}$ содержит $v_iv_j\eta_1\eta_2 \xrightarrow{d} 0$. Размерность ядра 1. $A^{2,3}$ содержит $v_iv_j\eta_k \xrightarrow{d} 0$ и $\xi_iv_j\eta_1\eta_2 \xrightarrow{d} v_jd\xi_i\eta_1\eta_2$. Размерность образа 1. $H^{2,4} = \mathbb{C}^1/\mathbb{C}^1 = 0$.

$H^{4,3} = Ker(d : A^{4,3} \to A^{4,4})/Im(d : A^{4,2} \to A^{4,3})$. Алгебра $A^{4,3}$ содержит $\xi_1\xi_2v_iv_j\eta_k \xrightarrow{d} (d\xi_1\xi_2 - d\xi_2\xi_1)v_iv_j\eta_k = 0$ — таких 2 различных, ядро имеет размерность 2. $A^{4,2}$ содержит $\xi_1\xi_2v_iv_j \xrightarrow{d} 0$, образ нулевой. $H^{4,3} = \mathbb{C}^2/0 = \mathbb{C}^2$.

$H^{3,4} = Ker(d : A^{3,4} \to A^{3,5})/Im(d : A^{3,3} \to A^{3,4})$. Алгебра $A^{3,4}$ содержит элементы вида $\xi_i v_j v_k \eta_1 \eta_2 \xrightarrow{d} 0$. Таких элементов 2 линейно независимых, размерность ядра 2. $A^{3,3}$ содержит $\xi_i v_j v_k \eta_l \xrightarrow{d} d\xi_i v_j v_k \eta_l = 0$, $\xi_1 \xi_2 v_i \eta_1 \eta_2 \xrightarrow{d} (d\xi_1 \xi_2 - \xi_1 d\xi_2) v_i \eta_1 \eta_2$ — таких 2 ненулевых, размерность образа 2. $H^{3,4} = \mathbb{C}^2/\mathbb{C}^2 = 0$.

$H^{4,4} = Ker(d : A^{4,4} \to A^{4,5})/Im(d : A^{4,3} \to A^{4,4})$. Алгебра $A^{4,4}$ содержит элементы, кратные $\xi_1 \xi_2 v_i v_j \eta_1 \eta_2 \xrightarrow{d} (d\xi_1 xi_2 + \xi_1 d\xi_2) v_i v_j \eta_1 \eta_2 = 0$. Т.о. размерность ядра 1. Алгебра $A^{4,3}$ содержит элементы вида $\xi_1 \xi_2 v_i v_j \eta_i \xrightarrow{d} 0$ — образ нулевой. Т.е. $H^{4,4} = \mathbb{C}$

□

Спектральная последовательность Фрёлихера для многообразия, соответствующего пятиугольнику. Известны две классические спектральные последовательности для когомологий Дольбо — Бореля и Фрёлихера. Спектральная последовательность Бореля голоморфного расслоения $E \to B$ с компактным кэлеровым слоем F, у которой $E_2 = H_{\bar\partial}(B) \otimes H_{\bar\partial}(F)$, сходится к $H_{\bar\partial}(E)$. В случае $E = \mathscr{Z}_{\mathcal{K}}, B = V_\Sigma, F = \mathbb{T}^l$, мы получаем описание когомологий Дольбо $H_{\bar\partial}(\mathscr{Z}_{\mathcal{K}})$, данное в теореме 5. Спектральная последовательность Фрёлихера имеет в качестве члена E_1 когомологии Дольбо комплексного многообразия M и сходится к когомологиям де Рама M.

Теорема 8. (Следствие 6.7.5. в [**1**])

(a) Спектральная последовательность Бореля голоморфного главного расслоения $\mathscr{Z}_{\mathcal{K}} \to V_\Sigma$ вырождается в члене E_3, т.е. $E_3 = E_\infty$.

(b) Спектральная последовательность Фрёлихера $\mathscr{Z}_{\mathcal{K}}$ вырождается в члене E_2.

Суммы размерностей по диагоналям таблицы (в направлениях $(0,i)-(i,0)$) равны $1, 2, 2, 6, 10, 7, 3, 2, 1$. С другой стороны, топологически наше многообразие $\mathscr{Z}_{\mathcal{K}}$ представляет собой $(S^3 \times S^4)^{\#5} \times S^1$. Отсюда, используя формулу Кюннета, мы получаем, что размерности групп когомологий де Рама многообразия $\mathscr{Z}_{\mathcal{K}}$ даются последовательностью $1, 1, 0, 5, 10, 5, 0, 1, 1$. Мы видим, что размерности групп когомологий де Рама не превосходят размерностей соответствующих групп когомологий Дольбо в соответствии с теоремой 8(b).

Список литературы

1. Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. Toric Topology

2. Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. Algebraic topology of manifolds defined by simple polyhedra. Uspehi Mat.nauk 53 (1998), no.3, 195-196

3. Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. Torus actions and the combinatorics of polytopes. Trudi Mat. Inst. Steklova 225 (1999), 96-131

4. А.Т.Фоменко, Д.Б.Фукс, Курс гомотопической топологии, Наука, 1989

5. Suyoung Choi , Mikiya Masuda , Dong , Youp Suh. Topological classification of generalized Bott towers. Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), no.2, 1097-1112.