1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ КОНСТРУКЦИИ.

Есть несколько способов комбинаторного определения многогранника Сташеффа K_n. Детали можно найти в [B, Lecture II].Воспользуемся следующим утверждением:

Теорема 1(см. [B, Lecture II, Theorem 5.1]). *Существует вложение*

$$J : K_{n+1} \to \mathbb{R}^{n-1}$$

с образом

$$y = (y_1, ..., y_{n-1}) : 0 \leq y_l \leq l \cdot (n-l), y_i - y_{i+l} \leq i \cdot l,$$

где $l = 1, ..., n-1, i = 1, ..., n-l-1$.

Обозначим

$$L_{i,l} = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : y_i - y_{i+l} \leq i \cdot l, 1 \leq l \leq n-1, 0 \leq i \leq n-l, y_0 = y_n = 0\}$$

Тогда наше описание задаёт образ многогранника K_{n+1} как пересечение $(n-1)-$мерного куба со всеми множествами $L_{i,l}$.

Зададим многогранник Сташеффа K_5 в явном виде следующим образом:

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, -x+3 \geq 0, -y+3 \geq 0, -z+3 \geq 0,$$

$$-x+y+2 \geq 0, -y-z+5 \geq 0, x+z-1 \geq 0.$$

Соответствующие гиперграни занумерем числами от 1 до 9. Заметим, что этот многогранник, с точностью до аффинного преобразования пространства, совпадает с заданным общей конструкцией, описанной выше.

В дальнейшем нам понадобится понятие кольца граней, определим его для симплициального комплекса, следуя [П, п.6]: пусть $\mathcal{K}$ - абстрактный симплициальный комплекс на множестве $[m] = 1, ..., m$.Его *кольцом граней* (или *кольцом Стенли-Риснера*) называется

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, ..., v_m]/(v_{i_1}, ..., v_{i_k}),$$

где $\{i_1, ..., i_k\}-$ не симплекс в $\mathcal{K}$. Подробнее эта конструкция описана в [БП, глава 3].

В настоящей работе описаны числа Бетти момент-угол-многообразия (см. [БП, глава 7]), соответствующего многограннику K_5, и выведены общие формулы для 3-го и 4-го чисел Бетти таких многообразий.

2. ЗАДАНИЕ МОМЕНТ-УГОЛ-МНОГООБРАЗИЯ.

Многогранник K_5 может быть задан в виде:

$$A \cdot x + b \geq 0,$$

где строки матрицы A размера 9×3 есть направляющие векторы гиперграней 1-9, а вектор-столбец b размера 9×1 есть:

$$(0, 0, 0, 3, 3, 3, 2, 5, -1)^t.$$

Пусть матрица C размера 6×9 такова, что $C \cdot A = 0$.Тогда, как известно, (см. [П, п.4]), момент-угол многообразие может быть задано

как:
$$\sum_{k=1}^{9} c_{jk} \cdot (\|z_k\|^2 - b_k) = 0, 1 \leq j \leq 6.$$

Таким образом, имеем искомое пересечение квадрик:
$$\|z_1\|^2 + \|z_4\|^2 - 3 = 0, \|z_2\|^2 + \|z_5\|^2 - 3 = 0,$$
$$\|z_3\|^2 + \|z_6\|^2 - 3 = 0, \|z_1\|^2 - \|z_2\|^2 + \|z_7\|^2 - 2 = 0,$$
$$\|z_2\|^2 + \|z_3\|^2 + \|z_8\|^2 - 5 = 0, \|z_1\|^2 + \|z_3\|^2 - \|z_9\|^2 + 1 = 0.$$

3. нахождение чисел Бетти в случае K_5.

Воспользуемся следующими утверждениями:

Теорема 1(см. [БП, Теорема 8.6]). *Для любого симплициального веера $\sum$ имеет место изоморфизм алгебр:*
$$H^*(\mathcal{Z}(\sum);\mathbb{Z}) \cong Tor^*_{\mathbb{Z}[v_1,...,v_m]}(\mathbb{Z}[\mathcal{K}_{\sum}], \mathbb{Z}) \cong H[\Lambda[u_1, ..., u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}_{\sum}], d],$$
в конце стоит алгебра когомологий дифференциальной градуированной алгебры с $degu_i = 1, degv_i = 2, du_i = v_i, dv_i = 0$, при $1 \leq i \leq m$.

В качестве следствия Теоремы 1 в [П] приводится следующая

Теорема 2(см. [П, Теорема 6.2]). *Мы имеем:*
$$H^k(\mathcal{Z}(\sum)) \cong \bigoplus_{I \subseteq [m]} \tilde{H}^{k-|I|-1}(\mathcal{K}_{\sum}(I)).$$

Все необходимые определения и свойства рассмотрены в [П]. Теперь мы можем найти искомый вектор чисел Бетти, точнее, верно следующее

Утверждение 1. *Вектор чисел Бетти момент-угол-многообразия, соответствующего многограннику Сташеффа K_5 имеет вид:*
$$(1, 0, 0, 15, 35, 24, 6, 24, 35, 15, 0, 0, 1)^t.$$

Доказательство. Из Теоремы 2 видим, что числа Бетти начинаются так: **1,0,0**. С другой стороны, в силу двойственности Пуанкаре, достато— чно вычислить следующие 4 числа, так как размерность $\mathcal{Z}_P$ равна $3 + 9 = 12$.

Из теоремы, 3-я группа когомологий имеет по 1 образующей на каждую пару вершин комплекса $\mathcal{K}_{\sum}$, не соединённых ребром.3-коциклы в соответствующей дифференциальной градуированной алгебре
$$(\Lambda[u_1, ..., u_m] \otimes \mathcal{Z}[K_{\sum}], d),$$
($u_i v_j$ имеют вид (пары ij)):
$$17, 14, 13, 28, 25, 24, 36, 38, 49, 56, 57, 69, 78, 79, 89.$$
Итак, 3-е число Бетти есть **15**.

Аналогично, вклад в 4-ую группу когомологий дадут комплексы: "3 отдельные точки" и "ребро и точка".Имеем представляющие коциклы ($u_i u_j v_k$ запишем как тройки ijk):
$$341, 371, 471, 452, 482, 452, 683, 163, 183,$$

$$124, 194, 294, 265, 275, 675, 356, 396, 596,$$

$$157, 187, 197, 587, 597, 897,$$

$$238, 278, 298, 378, 398, 798,$$

$$469, 479, 489, 679, 689,$$

так как $789+798+897$ =полный дифференциал в нашей градуированной алгебре, то в последней строке нет элемента $u_7u_8v_9$. Итак, 4-е число Бетти есть **35**.

По той же формуле, в 5-ую группу когомологий дадут вклад только 0-мерные когомологии 4-вершинных подкомплексов, так как в нашем многограннике нет поясов из 3 гиперграней. Имеем представляющие коциклы ($u_iu_ju_kv_l$ запишем как четвёрки ijkl):

$$3471, 4582, 1683, 1294, 2675, 3596,$$

$$1587, 1597, 5897, 1897,$$

$$2378, 2398, 2798, 3798,$$

$$4679, 4689, 4789, 6789,$$

$$4719 - 4791, 6759 - 6795, 2758 - 2785$$

$$3968 - 3986, 4829 - 4892, 3718 - 3781.$$

Итак, 5-е число Бетти есть **24**.

Аналогично, представляющие коциклы для группы 6-х когомологий ($u_iu_jv_kv_l$ запишем как четвёрки $ijkl$):

$$1546, 1532, 2346,$$

(ходим вокруг 3-х разрезов), а также 6-коциклы вида ($u_iu_ju_ku_lv_m$ запишем как пятёрки $ijklm$):

$$15897, 23798, 46789.$$

Итак, 6-е число Бетти есть **6**.

В силу двойственности Пуанкаре, имеем вектор чисел Бетти для многообразия $\mathcal{Z}_P$:

$$(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{15}, \mathbf{35}, \mathbf{24}, \mathbf{6}, \mathbf{24}, \mathbf{35}, \mathbf{15}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})^{\mathbf{t}}.$$

□

4. Общая формула для числа β_3.

Утверждение 2. *3-е число Бетти момент-угол-многообразия, которое соответствует многограннику Сташеффа K_n, есть*

$$C^4_{n+1}.$$

Доказательство. Из Теоремы 1 видим, что искомое число равно количеству пар непересекающихся гиперграней многогранника Сташеффа K_n. В [B, Lecture II] многогранник K_n определён с помощью многоугольника G_{n-1} с $(n+1)$ ребром. Пользуясь [B, Lecture II, Cor 6.2], получим, что число пар непересекающихся гиперганей нашего многогранника равно числу пар пересекающихся диагоналей G_{n-1}, которое, очевидно, совпадает с C^4_{n+1}. □

5. ОБЩАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ЧИСЛА β_4.

Утверждение 3. *4-ое число Бетти момент-угол-многообразия, которое соответствует многограннику Сташеффа K_n, есть:*

$$5 \cdot C_{n+2}^{6}.$$

Доказательство. Вспомним интерпретацию многогранника Сташеффа K_n, использованную нами при доказательстве предыдущего утверждения.
Всюду в дальнейшем будем рассматривать правильный $(n+1)-$угольник G, следуя [B, Lecture II]. Проведём в нём все диагонали и раскрасим их в 2 цвета: красный и чёрный. Для данной вершины многоугольника **чёрными** будут только 2 диагонали, соединяющие её с 2 ближайшими несмежными вешинами многоугольника, а **красными** - все остальные диагонали.

Точки пересечения 2-х диагоналей назовём **красными точками**. Ясно, что множество диагоналей многоугольника разбивает его на многоугольные области. Назовём **красным** треугольник разбиения, все 3 вершины которого красные (точки пересечения 3-х и более красных диагоналей дают столько красных треугольников, сколько их получится при малом шевелении разбиения таком, чтобы кратных точек не было).Очевидно,что все красные треугольники лежат в $(n+1)-$угольнике, образованном чёрными диагоналями.Будем говорить в дальнейшем, что любые 2 точки, отличные от вершин исходного могоугольника, задают **отрезок** с концами в этих точках.

Наша цель - посчитать все представляющие коциклы 4-ой группы когомологий дифференциальной градуированной алгебры, введённой выше при вычислении 3-го числа Бетти в случае K_5.Из теоремы Хохстера и соображений размерности получаем, что искомые коциклы могут лишь иметь вид $u_i u_j v_k$, где $u_i v_k$ и $u_j v_k$ суть представляющие 3-коциклы (учитывая градуировку u и v, вспомним, что дифференциал должен обращаться в 0 на наших коциклах) для 3-ей группы когомологий. Но последнее означает, как мы знаем из доказательства предыдущего утверждения, что пары диагоналей (ik) и (jk) соответствующего $(n+1)-$угольника G есть пары пересекающихся диагоналей.

Таким образом, пары (ik) и (jk) изображаются красными точками многоугольника G, лежащими на одной диагонали (k), красной или чёрной, а всякий искомый коцикл $u_i u_j v_k$ представляется отрезком. Но заметим, что 3 наших коцикла будут линейно зависимы (т.е их сумма - полный дифференциал) только если соответствующие им отрезки образуют красный треугольник.

Обозначим A - число отрезков, B - число красных треугольников разбиения G. Тогда искомое число в нашей интерпретации равно $A-B$.

Лемма. *Число красных треугольников*

$$B = C_{n+1}^{6}.$$

Доказательство. Поскольку красные треугольники есть в разбиении G, то $n \geq 5$. В этом случае каждая красная диагональ делит многоугольник на 2, причём каждый из них имеет не менее 2 вершин, не лежащих на стороне деления.Отсюда и из аксиом плоской геометрии вытекает, что взяв 3 пары (т.е 6 произвольных вершин) многоугольника G, их можно соединить красными диагоналями (и в этом случае, очевидно, единственным образом!) так, что любые 2 из 3-х диагоналей пересекутся, т.е мы будем иметь красный треугольник.Но существует ровно C_{n+1}^6 способов выбрать в $(n+1)-$угольнике 6 вершин.Лемма доказана. □

.

Найдём теперь число A.Для этого докажем 3 вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Имеют место формулы (S_n-сумма n-ых степеней первых $(k-1)$ натуральных чисел.):*

$$S_1 = \frac{k \cdot (k-1)}{2},$$

$$S_2 = \frac{k \cdot (k-1) \cdot (2 \cdot k - 1)}{6},$$

$$S_3 = \frac{k^2 \cdot (k-1)^2}{4},$$

$$S_4 = \frac{k \cdot (k-1) \cdot (2 \cdot k - 1) \cdot (3 \cdot k^2 - 3 \cdot k - 1)}{30}.$$

Доказательство. Принцип полной математической индукции.Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть $n = 2 \cdot k$ и $(n+1)-$число сторон многоугольника G. Тогда имеет место формула:*

$$A = \frac{(n+1)}{2} \cdot \sum_{l=1}^{k-1} (4 \cdot l^2 \cdot k^2 - 2 \cdot k \cdot (2 \cdot l^3 + 2 \cdot l^2 + l) + (l^4 + 2 \cdot l^3 + 2 \cdot l^2 + l)).$$

Доказательство. Будем предполагать, что малой деформацией красных диагоналей мы добились того, что кратных точек в нашем многоугольнике нет. Поскольку многоугольник G-правильный, то достаточно фиксировать одну **начальную** вершину и рассмотреть лишь отрезки, лежащие на исходящих из неё диагоналях.Более того, из осевой симметрии многоугольника G относительно оси, проходящей через начальную вершину ясно, что достаточно найти число отрезков на диагоналях, лежащих в одной из двух полуплоскостей относительно оси. Фиксируем такую полуплоскость.

Введём порядок на рассматриваемых диагоналях, а именно: будем говорить, что диагонали возрастают от чёрной до оси.Аналогично, порядок на вершинах G, попавших в нашу полуплоскость, введём так, что вершины будут возрастать от начальной и до лежащей на наибольшей диагонали.Заметим, что если на диагонали находится m точек, то число отрезков на ней есть $\frac{m \cdot (m-1)}{2}$.Поэтому для доказательства леммы достаточно выяснить, как меняется число точек на диагоналях при возрастании от чёрной до оси.

Очевидно, что на каждой чёрной диагонали ровно $(n-2)$ точки, и потому чёрные диагонали многоугольника G дают вклад

$$\frac{(n+1)\cdot 2}{2}\cdot\frac{(n-2)\cdot(n-3)}{2}$$

в искомую сумму.Докажем, что при возрастании диагоналей, числа точек на них увеличиваются на $(n-2),(n-4),(n-6),(n-8),\ldots$ и так далее до числа 2.Тогда, записав соответствующую сумму отрезков на них и сгруппировав члены, получим искомую формулу.

Назовём **вкладом данной вершины в данную диагональ** число точек пересечения данной диагонали со всеми диагоналями, исходящими из данной вершины. Выше мы получили, что вклад наименьшей вершины в чёрную диагональ равен $(n-2)$. Очевидно, что её же вклад в следующую по порядку диагональ на 1 меньше, в следующую - на 2 меньше и т.д.В силу центральной симметричности многоугольника G, вклад следующей по величине вершины в соседнюю с чёрной диагональ на 1 меньше вклада наименьшей в чёрную диагональ; её же вклад в 3-ю диагональ на 1 меньше вклада предыдущей вершины в предыдущую диагональ и т.д.Отсюда немедленно следует, что число точек при возрастании диагоналей к оси увеличивается так, как указано выше, ибо вклады вершин в данную диагональ складываются. Итак, лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Пусть* $n=2\cdot k+1$ *и* $(n+1)-$ *число сторон многоугольника* G. *Тогда имеет место формула:*

$$A=\frac{(n+1)}{2}\cdot\sum_{l=1}^{k-1}(4\cdot l^2\cdot k^2-2\cdot k\cdot(2\cdot l^3+l)+(l^4+l^2))+\frac{(n+1)}{4}\cdot k^2\cdot(k^2-1).$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 2, роль оси будет играть максимальная (разделяющая многоугольник на два) красная диагональ; при возрастании диагоналей от чёрной к максимальной число точек на диагонали будет увеличиваться от $(n-2)$ на $(n-4),(n-6),(n-8),\ldots$ и так далее, до 1 (ибо n - нечётно). Отсюда суммируя по всем диагоналям G и группируя члены, имеем искомую формулу. Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Число A отрезков разбиения равно:*

$$\frac{(n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)^2}{120},$$

где $(n+1)$ - число сторон многоугольника G.

Доказательство. Воспользовавшись леммой 1, подставим значения сумм m-ых степеней первых $(k-1)$ натуральных чисел в формулы из леммы 2 и леммы 3 и выразим всё через n. Лемма 4 доказана. □

.

Теперь, вычитая B из A, используя лемму и лемму 4, после очевидных преобразований получим искомую формулу для 4-го числа Бетти. Утверждение доказано. □

Список литературы

[БП] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Торические действия в топологии и комбинаторике.* Издательство МЦНМО, Москва, 2004.

[П] Т. Е. Панов. *Торические множества типа Кемпфа-Несс.* Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова, т. 263(2008), стр. 159-172.

[B] V. M. Buchstaber.Lectures on Toric Topology.lecture notes of 'Toric Topology Workshop: KAIST 2008', in *Trends in Mathematics*