1 Постановка задачи.

В работе вычислены биградуированные числа Бетти момент-угол-многообразий, соответствующих многогранникам Сташеффа K_{n+2} при $n \leq 5$ и многогранникам усечения произвольной размерности с произвольным числом срезаемых вершин. Биградуированные числа Бетти в примерах найдены с использованием програм– мной среды Macaulay2.

2 Биградуированные числа Бетти момент-угол-многообразий, соответствующих многогранни– кам K_{n+2}.

В дальнейшем, пусть n обозначает размерность, а m - число гиперграней (вершин) рассматриваемых простых (симплициальных) многогранников. Есть несколько способов комбинаторного определения многогранника Сташеффа K_{n+2}. Детали можно найти в [3, Lecture II]. Воспользуемся следующим утверждением:

Теорема 2.1 *(см. [3, Lecture II, Theorem 5.1]). Существует вложение*

$$J : K_{n+1} \to \mathbb{R}^{n-1}$$

с образом

$$y = (y_1, \cdots, y_{n-1}) : 0 \leq y_l \leq l \cdot (n-l), y_i - y_{i+l} \leq i \cdot l,$$

где $l = 1, \cdots, n-1, i = 1, \cdots, n-l-1.$

Обозначим

$$L_{i,l} = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : y_i - y_{i+l} \leq i \cdot l, 1 \leq l \leq n-1, 0 \leq i \leq n-l, y_0 = y_n = 0\}.$$

Тогда наше описание задачт образ многогранника K_{n+1} как пересечение $(n-1)$-мерного куба со всеми множествами $L_{i,l}$. Утверждение [3, Lecture II, Cor 6.2] сводит получение биградуированных чисел Бетти к комбинаторной задаче о нахождении числа всех пар непересекающихся диагоналей соответствующего многоугольника. В рассматриваемых ниже примерах биградуированные числа Бетти получаются на выходе программы, состоящей из следующих команд в программной среде Macaulay2:

$$kk = ZZ/32749,$$

$$ringP = kk[v_1, \cdots, v_m],$$
$$I = ideal(\cdots),$$
$$bettires(ringP^1/I).$$

В 1-ой строке мы генерируем основное поле, в 3-ей строке, в скобках, стоят мономы вида $v_i \cdot v_j$, порождающие соответствующий идеал Стенли-Райснера, команда res в последней строке строит минимальную резольвенту, а команда betti выдает мощности соответствующих минимальных базисов. Приведем результат работы описанной выше программы при $n \leq 5$. Для удобства дальнейших рассмотрений, мы будем записывать получающиеся числа как множества из $(n-1)$ вектора, элементами которых являются $\beta^{-i,2\cdot j}, i = 1, \cdots, m-n-1$, где $j - i = 1, \cdots, n-1$.При этом, разумеется, $\beta^{0,0} = \beta^{-(m-n),2\cdot m} = 0$.

примеры:

1. $n = 2, m = 5$
$$(5, 5)$$

2. $n = 3, m = 9$
$$(15, 35, 24, 3, 0)$$
$$(0, 3, 24, 35, 15)$$

3. $n = 4, m = 14$
$$(35, 140, 217, 154, 49, 7, 0, 0, 0)$$
$$(0, 28, 266, 784, 1094, 784, 266, 28, 0)$$
$$(0, 0, 0, 7, 49, 154, 217, 140, 35)$$

4. $n = 5, m = 20$
$$(70, 420, 1089, 1544, 1300, 680, 226, 44, 4, 0, 0, 0, 0, 0)$$
$$(0, 144, 1796, 8332, 20924, 32309, 32184, 20798, 8480, 2053, 264, 12, 0, 0)$$
$$(0, 0, 12, 264, 2053, 8480, 20798, 32184, 32309, 20924, 8332, 1796, 144, 0)$$
$$(0, 0, 0, 0, 0, 4, 44, 226, 680, 1300, 1544, 1089, 420, 70)$$

На основании приведенных выше примеров можно высказать следующее предположение:

Теорема 2.2 *Для многогранника Сташеффа K_{n+2}, вложенного в $\mathbb{R}^n$: при $n \geq 2$ выполняется*

$$\beta^{-i,2\cdot(n+i-1)} = 0, i = 1, \cdots, 2\cdot n - 5,$$

$$\beta^{-(2\cdot n-4),2\cdot(3\cdot n-5)} = \begin{cases} n+3, & \textit{если } n \textit{ - ччтно;} \\ \frac{n+3}{2}, & \textit{если } n \textit{ - неччтно.} \end{cases}$$

По-видимому, такого же типа "минимальные"свойства есть и у других нестоэдр–ов (стеллоэдров, пермутоэдров, циклоэдров), точно сформулировать и доказать подобные утверждения пока не удалось.

3 Биградуированные числа Бетти момент-угол-многообразий, соответствующих многогранни–кам усечения.

Дадим следующее

Определение. Назовем **многогранником усечения** $P(n,k)$ простой многогра–нник, получающийся из симплекса размерности n последовательной срезкой k вершин.

Используя введчнные выше обозначения, получим, что $k = m - n - 1$.

Двойственный к $P(n,k)$ симплициальный многогранник называется **многогран–ником пирамидальной надстройки** $Q(n,k)$. Он получается из симплекса размерности n последовательной надстройкой конусов над гипергранями. Очеви–дно, далее, что для $k = 1$ и $k = 2$ комбинаторный тип полученного многогранни–ка не зависит от того, какие именно вершины срезаются. Легко видеть, что при $k \geq 3$ это уже не так.

Пусть $Q \equiv Q(n,k)$, V - множество его вершин, и симплициальный многогран–ник $Q^{'}$ получается из Q одной надстройкой конуса с вершиной v над некоторой гипергранью σ, множество вершин которой обозначим через $V(\sigma)$. Пусть также $V^{'}$ - множество вершин $Q^{'}, W \subset V^{'}$ и K_W - полный подкомплекс на множестве вершин из W в смысле [1, стр. 44].

Исходя из формулы Хохстера (см. [1, Теорема 3.17]) зададимся следующим вопросом: что происходит с приведенными гомологиями полных подкомплексов K_W над некоторым основным полем k при переходе от Q к $Q^{'}$? Рассмотрим 4 логически возможных случая (при этом у нас всюду W есть собственное подмножество $V^{'}$)

1. $v \in W, W \cap V(\sigma) \neq \emptyset$

   Если $V(\sigma) \subset W$, то $\|K_W^{'}\| \cong \|K_{W-\{v\}}\|$. Если $W \cap V(\sigma) \neq V(\sigma)$, то мы имеем:

$$K_{W-\{v\}} \cup K_{W \cap V(\sigma) \cup \{v\}'} = K_W^{'}, K_{W-\{v\}} \cap K_{W \cap V(\sigma) \cup \{v\}'} = K_{W \cap v(\sigma)}.$$

   Но $K_{W \cap V(\sigma)}$ и $K_{W \cap V(\sigma) \cup \{v\}}^{'}$ - в этом случае, очевидно, стягиваемы. Применяя, согласно соотношениям выше, точную последовательность Майера-Вьеториса, получаем:

$$\tilde{H}_i(K_W^{'}, k) \cong \tilde{H}_i(k_{W-\{v\}}, k).$$

2. $v \in W, W \cap V(\sigma) = \emptyset$

   В этом случае ясно, что $K_W^{'} = K_{W-\{v\}} \sqcup \{v\}$. Отсюда имеем:

$$dim_k \tilde{H}_i(K_W^{'}, k) = \begin{cases} dim_k \tilde{H}_i(K_{W-\{v\}}, k) + 1, & \text{при } i = 0; \\ dim_k \tilde{H}_i(K_{W-\{v\}}, k), & \text{при } i > 0. \end{cases}$$

3. $v \notin W, V(\sigma) \subset W, W \neq V$

   Рассмотрим множество Δ^σ всех подмножеств $V(\sigma)$. Тогда границей этого множества будем называть $\delta = \Delta^\sigma - V(\sigma)$. Очевидно, в рассматриваемом случае будем иметь:

$$K_W^{'} \cup \Delta^\sigma = K_W, K_W^{'} \cap \Delta^\sigma = \delta,$$

   (уничтожается лишь сама бывшая гипергрань F.) Но ясно, что δ - симплициальная $(n-2)-$сфера, а Δ^σ - симплициальный $(n-1)-$шар. Тогда записывая точную последовательность Майера-Вьеториса и отдельно рассматривая значение $i = (n-1)$, получим:

$$dim_k \tilde{H}_i(K_W^{'}, k) = \begin{cases} dim_k \tilde{H}_i(K_W, k), & \text{при } i < (n-2); \\ dim_k \tilde{H}_i(K_W, k) + 1, & \text{при } i = (n-2). \end{cases}$$

4. $v \notin W, V(\sigma) \not\subset W$

   В этом случае, легко видеть, что $K_W^{'} \equiv K_W$. Поэтому:

$$dim_k \tilde{H}_i(K_W^{'}, k) = dim_k \tilde{H}_i(K_W, k), \forall i.$$

Сформулируем теперь наше

Основное утверждение.

При $n \geq 3$ имеют место следующие формулы для биградуированных чисел Бетти, соответствующих простым многогранникам $P(n,k)$:

$$\beta^{-i,2\cdot(i+1)} = i \cdot \binom{k+1}{i+1},$$

$$\beta^{-i,2\cdot(i+n-1)} = (k+1-i) \cdot \binom{k+1}{k+2-i},$$

$$\beta^{-i,2\cdot j} = 0, j \neq i+1, i+n-1;$$

при $n = 2$ имеют место формулы:

$$\beta^{-i,2\cdot(i+1)} = i \cdot \binom{k+1}{i+1} + (k+1-i) \cdot \binom{k+1}{k+2-i},$$

$$\beta^{-i,2\cdot j} = 0, j \neq i+1.$$

*Доказательство.*Первая формула доказана в работе [4]; вторая - очевидное ее следствие, если воспользоваться двойственностью Пуанкаре. Формулы из случая $n = 2$ - очевидны получаются из аналогичных формул для больших n из соображений размерности (например, ненулевой элемент таблички чисел Бетти - сумма двух ему соответствущих ненулевых же элементов из случая более высокой размерности). Докажем теперь оставшееся утверждения о нулевых числах Бетти, точнее:

Теорема 3.1 *Имеет место следующая формула:*

$$\tilde{H}_i(K_W, k) = 0, \forall i \neq 0, n-2, \forall \emptyset \neq W \subsetneq V.$$

Доказательство. Если $m = n+1$, то $P(n,k)$ - n-мерный симплекс, а значит, K_W - стягиваем. Предположение индукции: пусть теорема верна для всех собственных подмножеств W из V при всех $i \neq 0, n-2$ и пусть, также, W - собственное подмножество V'. Если $W = v' - \{v\} = V$, то K'_W - симплициальный $(n-1)-$шар и потому утвеждение теоремы справедливо. Если $W = \{v\}$, то утверждение так же верно. В общем же случае мы, согласно доказанному выше при рассмотрении случаев, будем иметь:

$$dim_k \tilde{H}_i(K'_W, k) = dim_k \tilde{H}_i(K_{W-\{v\}}, k) = 0;$$

Таким образом, основное утверждение доказано.

Из наших рассмотрений легко заметить, что справедливо

Следствие.

Биградуированные числа Бетти, соответствующие многограннику $P(n,k)$ и двойственному к нему многограннику $Q(n,k)$, не зависят от комбинаторного типа последних, а числа, соответствующие $j = i + 1$ не зависят, также, и от размерности объемлющего пространства.

В заключение, рассмотрим следующий интересный

Пример.

В [2, Theorem 6.3] сформулирован такой результат:

Теорема 3.2 *Пусть X - момент-угол-многообразие, соответствующее многограннику $P(n,k)$. Тогда X диффеоморфно связной сумме произведений сфер:*

$$\sharp_{j=1}^{k} j \cdot \binom{k+1}{j+1} S^{2+j} \times S^{2\cdot n+k-j-1}.$$

В полном соответствии с нашим основным утверждением, коэффициенты в этой формуле дают возможность найти полные числа Бетти для X, для чего можно использовать следующую формулу:

$$dim_k H^k(\mathcal{Z}_P) = \sum_{-i+2\cdot j=k} \beta^{-i,2\cdot j}(P).$$

Отсюда, в частности, получается:

$$b_3 = \beta^{-1,4} = \binom{k+1}{2} = \binom{m-n}{2},$$

что совпадает с результатом подстановки $k = m - n - 1, i = 1, j = 2$ в наше основное утверждение.

Список литературы

[1] В. М. Бухштабер,Т. Е. Панов.*Торические действия в топологии и комбинаторике.Издательство МЦНМО, Москва, 2004.*

[2] Frederic Bosio and Laurent Meerssman.Real quadrics in $\mathbb{C}^n$, complex manifolds and convex polytopes. Acta Math. 197 (2006), no. 1, 53-127.

[3] *V. M. Buchstaber.Lectures on Toric Topology. Lecture notes of 'Toric Topology Workshop: KAIST 2008', in Trends in Mathematics.*

[4] *Suyoung Choi and Jang Soo Kim.A combinatorial proof of a formula for betti numbers of a stacked polytope. arXiv:math.CO/0902.2444.*