МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

Дипломная работа:

БИГРАДУИРОВАННЫЕ ЧИСЛА БЕТТИ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЫХ МНОГОГРАННИКОВ

студента 503 группы
Лимонченко Ивана Юрьевича

Научный руководитель:
проф. Панов Тарас Евгеньевич

Москва
2011

1. Введение

Биградуированные числа Бетти $\beta^{-i,2j}(P)$ простого многогранника P — это размерности биградуированных компонент Tor-групп его кольца граней $\mathbf{k}[P]$. Числа $\beta^{-i,2j}(P)$ отражают комбинаторную структуру P, а также, топологическую структуру соответствующего момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$ и поэтому находят многочисленные приложения в комбинаторной коммутативной алгебре и торической топологии. В работе вычисляются некоторые биградуированные числа Бетти типа $\beta^{-i,2(i+1)}$ для ассоциэдров и даётся приложение вычисления биградуированных чисел Бетти для многогранников усечения к исследованию топологии их момент-угол многообразий. Эти две серии простых многогранников доставляют, предположительно, минимум и максимум значений $\beta^{-i,2j}(P)$ среди всех простых многогранников P с фиксированными размерностью и числом гиперграней.

Структура дипломной работы такова.

В Разделе 2 даны вычисления для многогранников Сташефа, известных ещё как ассоциэдры.

В Разделе 3 мы вычисляем биградуированные числа Бетти для многогранников усечения (получающихся из симплексов последовательным срезанием вершин) полностью. Это вычисление было впервые проделано в [10] с помощью похожей, но несколько отличающейся от нашей техники; комбинаторное доказательство частичного результата в этом направлении было получено в [4]. Наконец, мы применяем наши вычисления к известному описанию с точностью до диффеоморфизма многообразий $\mathcal{Z}_P$ для многогранников усечения, см. [1].

Автор благодарен своему научному руководителю Т.Е.Панову за продолжительные обсуждения и полезные советы, столь необходимые во время выполнения этой работы.

2. Основные понятия

Мы рассматриваем *простые выпуклые n-мерные многогранники* P в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$. Такой многогранник P может быть задан как пересечение m полупространств:

$$P = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle + b_i \geqslant 0 \quad \text{для } i = 1, \ldots, m \}, \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$. Мы предполагаем, что гиперграни, определяемые равенствами $\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle + b_i = 0$, находятся в общем положении, т.е. не более n из них имеют пересечением точку. Будем, также, считать, что в (2.1) нет лишних условий, т.е. ни одно неравенство не может быть вычеркнуто в (2.1) без изменения P. Тогда P имеет в точности m *гиперграней*, которые даются формулами

$$F_i = \{ \boldsymbol{x} \in P \colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle + b_i = 0 \}, \quad \text{для } i = 1, \ldots, m.$$

Пусть A_P есть $m \times n$ матрица векторов-строк $\boldsymbol{a}_i$, и пусть $\boldsymbol{b}_P$ есть вектор-столбец скаляров $b_i \in \mathbb{R}$. Тогда мы можем рассматривать (2.1) как

$$P = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon A_P \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_P \geqslant \boldsymbol{0} \},$$

и будем иметь аффинное отображение

$$i_P \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad i_P(\boldsymbol{x}) = A_P \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_P.$$

С его помощью P вкладывается в

$$\mathbb{R}^m_{\geqslant} = \{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \colon y_i \geqslant 0 \quad \text{для } i = 1, \ldots, m \}.$$

Следующая конструкция (см. [3, Конструкция 7.8]) позволяет определить пространство $\mathcal{Z}_P$ из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_P & \xrightarrow{i_Z} & \mathbb{C}^m \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \mu \\ P & \xrightarrow{i_P} & \mathbb{R}^m_{\geqslant} \end{array} \tag{2.2}$$

где $\mu(z_1, \ldots, z_m) = (|z_1|^2, \ldots, |z_m|^2)$. Последнее отображение можно представить себе, как орбитное отображение покоординатного действия стандартного тора

$$\mathbb{T}^m = \{ \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^m \colon |z_i| = 1 \quad \text{для } i = 1, \ldots, m \}$$

на $\mathbb{C}^m$. Таким образом, $\mathbb{T}^m$ действует на $\mathcal{Z}_P$ с пространством орбит P, и i_Z есть $\mathbb{T}^m$-эквивариантное вложение.

В силу [3, Лемма 7.2], $\mathcal{Z}_P$ является гладким многообразием размерности $m+n$, называемым *момент-угол многообразием*, соответствующим многограннику P.

Обозначим через K_P границу ∂P^* двойственного симплициального многогранника. Она является симплициальным комплексом на множестве $[m]=\{1,\ldots,m\}$, симплексы которого суть такие $\{i_1,\ldots,i_k\}\subset[m]$, что $F_{i_1}\cap\ldots\cap F_{i_k}\neq\varnothing$ в P.

Пусть $\mathbf{k}$ — основное поле, $\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]$ есть градуированная полиномиальная алгебра от m переменных, $\deg(v_i)=2$, и пусть $\Lambda[u_1,\ldots,u_m]$ — внешняя алгебра, $\deg(u_i)=1$. *Кольцом граней* (или *кольцом Стенли–Райснера*) симплициального комплекса K на множестве $[m]$ называется фактор-кольцо

$$\mathbf{k}[K]=\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]/\mathcal{I}_K,$$

где $\mathcal{I}_K$ есть идеал, порождённый мономами $v_{i_1}\cdots v_{i_k}$, свободными от квадратов, причём $\{i_1,\ldots,i_k\}$ не является симплексом в K. Мы будем называть $\mathcal{I}_K$ *идеалом Стенли–Райснера* симплициального комплекса K.

Заметим, что $\mathbf{k}[K]$ оказывается модулем над $\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]$ благодаря отображению канонической проекции. Размерности биградуированных компонент Tor-групп,

$$\beta\bigl(\mathbf{k}[K]\bigr)^{-i,2j}=\dim_{\mathbf{k}}\operatorname{Tor}^{-i,2j}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}\bigl(\mathbf{k}[K],\mathbf{k}\bigr),\quad 0\leqslant i,j\leqslant m.$$

называются *биградуированными числами Бетти* кольца граней $\mathbf{k}[K]$, см. [8] и [3, §3.3]. Эти числа являются важными инвариантами комбинаторной структуры K. Обозначим, для удобства,

$$\beta^{-i,2j}(P)=\beta^{-i,2j}(K_P).$$

Tor-группы и биградуированные числа Бетти допускают топологическую интерпретацию благодаря следующему результату о когомологиях $\mathcal{Z}_P$:

Теорема 2.1 ([3, Теорема 8.6] или [6, Theorem 4.7])**.** *Алгебра когомологий момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$ изоморфна следующим алгебрам:*

$$\begin{aligned}H^*(\mathcal{Z}_P;\mathbf{k})&\cong\operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbf{k}[K_P],\mathbf{k})\\&\cong H\bigl[\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbf{k}[K_P],d\bigr],\end{aligned}$$

где последняя алгебра есть алгебра когомологий дифференциальной биградуированной алгебры, причём биградуировка и дифференциал определяются как

$$\operatorname{bideg} u_i = (-1,2),\ \operatorname{bideg} v_i = (0,2);\quad du_i = v_i,\ dv_i = 0.$$

Таким образом, алгебра когомологий $\mathcal{Z}_P$ допускает биградуировку, и топологические числа Бетти $b^q(\mathcal{Z}_P) = \dim_k H^q(\mathcal{Z}_P;\mathbf{k})$ удовлетворяют

$$b^q(\mathcal{Z}_P) = \sum_{-i+2j=q} \beta^{-i,2j}(P). \tag{2.3}$$

Двойственность Пуанкаре в когомологиях $\mathcal{Z}_P$ уважает биградуировку:

Теорема 2.2 ([3, Теорема 8.18])**.** *Имеет место следующая формула:*

$$\beta^{-i,2j}(P) = \beta^{-(m-n)+i,2(m-j)}(P).$$

В дальнейшем, мы опускаем поле коэффициентов $\mathbf{k}$ в записи групп (ко)гомологий. Для подмножества $I \subset [m]$ мы обозначаем через K_I соответствующий *полный подкомплекс* симплициального комплекса K (ограничение K на I). Следующий классический результат может быть получен в качестве следствия Теоремы 2.1:

Теорема 2.3 (Хохстер, см. [3, След. 8.8])**.** *Имеет место изоморфизм:*

$$\beta^{-i,2j}(\mathcal{Z}_P) = \sum_{J\subset[m],|J|=j} \dim \widetilde{H}^{j-i-1}(K_J).$$

Введём, также, следующее подмножество границы P:

$$P_I = \bigcup_{i\in I} F_i \subset P. \tag{2.4}$$

Заметим, что если $K = K_P$, то K_I является деформационным ретрактом P_I для всякого множества I. Следующий факт непосредственно следует из Теоремы 2.3.

Следствие 2.4. *Имеем:*

$$\beta^{-i,2(i+1)}(P) = \sum_{I\subset[m],|I|=i+1} \big(cc(P_I) - 1\big),$$

где через $cc(P_I)$ обозначено число связных компонент множества P_I.

3. Многогранники Сташефа

Многогранники Сташефа, также известные как *ассоциэдры*, были введены как комбинаторные объекты в работе Сташефа по высшей ассоциативности [9]. Различные выпуклые реализации многогранников Сташефа были найдены Милнором и другими, см. [2].

Мы обозначаем n-мерный многогранник Сташефа через As^n. Тогда i-мерные грани As^n $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ взаимно-однозначно соответствуют множествам из $n-i$ попарно не пересекающихся диагоналей в $(n+3)$-угольнике G_{n+3} (мы считаем здесь, что диагонали, исходящие из одной вершины, не пересекаются). Грань H содержится в грани H' тогда и только тогда, когда множество диагоналей, соответствующее H, содержит множество диагоналей, соответствующее H'.

Так, вершины As^n соответствуют полным триангуляциям G_{n+3} диагоналями, а гиперграни As^n соответствуют диагоналям G_{n+3}. Таким образом, мы отождествляем множество диагоналей G_{n+3} с множеством гиперграней $\{F_1, \dots, F_m\}$ многогранника As^n и отождествляем оба этих множества с $[m]$, когда это удобно. Нам понадобится выпуклая реализация As^n из [2, Lecture II, Th. 5.1]:

Теорема 3.1. *Многогранник As^n может быть представлен как пересечение параллелепипеда*

$$\left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon 0 \leqslant y_j \leqslant j(n+1-j) \quad \text{для} \;\; 1 \leqslant j \leqslant n\right\}$$

с полупространствами

$$\left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon y_j - y_k + (j-k)k \geqslant 0\right\}$$

для $1 \leqslant k < j \leqslant n$.

Предложение 3.2. *Имеем:*

$$b^3(\mathcal{Z}_{As^n}) = \beta^{-1,4}(As^n) = \binom{n+3}{4}.$$

Доказательство. Число $\beta^{-1,4}(P)$ равно количеству мономов $v_i v_j$ в идеале Стенли–Райснера многогранника P, см. [3, §3.3], а также, количеству пар непересекающихся гиперграней P. В случае $P = As^n$, последнее равно количеству пар пересекающихся диагоналей $(n+3)$-угольника G_{n+3}, см. [2, Lecture II, Cor 6.2]. Остаётся заметить, что для каждой четвёрки вершин многоугольника G_{n+3} существует в точности одна пара пересекающихся диагоналей, концами которых будут эти 4 вершины. $\square$

Замечание. Вычисление, проведённое выше, может быть проделано, также, при помощи общей формулы $\beta^{-1,4}(P) = \binom{f_0}{2} - f_1$, см. [3, Лемма 8.13], где f_i есть число $(n-i-1)$-граней многогранника P. Числа f_i для As^n хорошо известны, см. [2, Lecture II].

В дальнейшем, мы предполагаем, что никакие 3 диагонали многоугольника G_{n+3} не проходят через одну точку, что может быть достигнуто малым шевелением его вершин. Выберем и фиксируем циклический порядок на вершинах G_{n+3} так, что 2 последовательные вершины соединены ребром многоугольника. Будем называть диагонали G_{n+3}, соединяющие i-ую и $(i+2)$-ую вершины (modulo $n+3$) для $i = 1, \ldots, n+3$ *короткими*; остальные диагонали — *длинными*.

Назовём точки пересечения диагоналей, находящиеся внутри G_{n+3}, *отмеченными точками*, а всякий отрезок диагонали, соединяющий 2 отмеченные точки, лежащие на этой диагонали, назовём *отмеченным отрезком*. Наконец, будем называть *отмеченным треугольником* треугольник, вершинами которого являются 3 отмеченных точки, а сторонами — 3 отмеченных отрезка.

Теорема 3.3. *Имеем:*

$$b^4(\mathcal{Z}_{As^n}) = \beta^{-2,6}(As^n) = 5\binom{n+4}{6}$$

Доказательство. Нам нужно найти число порождающих 4-ой группы когомологий $H\big[\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbf{k}[K_P], d\big]$, см. Теорему 2.1 (заметим, что здесь $m = \frac{(n+3)n}{2}$ — число диагоналей G_{n+3}). Эта группа порождена когомологическими классами коциклов вида $u_i u_j v_k$, где все 3 индекса попарно различны, и $u_i v_k$, $u_j v_k$ суть 3-коциклы. Эти 3-коциклы соответствуют парам $\{i, k\}$ и $\{j, k\}$ пересекающихся диагоналей многоугольника G_{n+3}, а также, паре отмеченных точек, лежащих на k-ой диагонали. Таким образом, всякий коцикл $u_i u_j v_k$ представляется отмеченным отрезком. Равенство $d(u_i u_j u_k) = u_i u_j v_k - u_i v_j u_k + v_i u_j u_k$ показывает, что когомологические классы, представленные коциклами, стоящими в его правой части, являются линейно зависимыми. Каждое такое равенство взаимно-однозначно соответствует отмеченному треугольнику.

Таким образом, мы получили, что $\beta^{-2,6}(As^n) = S_{n+3} - T_{n+3}$, где S_{n+3} есть число отмеченных отрезков, а T_{n+3} есть число отмеченных треугольников внутри G_{n+3}. Эти два числа находятся при помощи следующих трёх лемм.

Лемма 3.4. *Число отмеченных треугольников внутри G_{n+3} есть*

$$T_{n+3} = \binom{n+3}{6}$$

Доказательство. Заметим, что для 6-угольника существует ровно один отмеченный треугольник (см. Рис. 1); таким образом, всякие 6 вершин многоугольника G_{n+3} дают нам ровно один отмеченный треугольник. $\square$

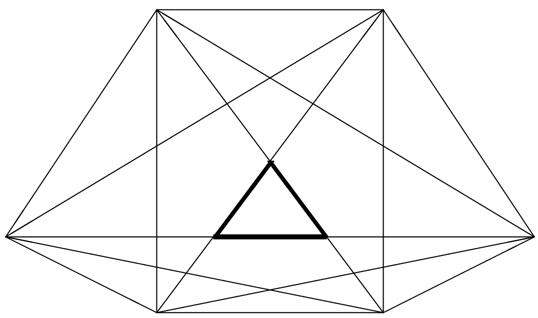

Рис. 1

Пусть d есть диагональ G_{n+3}; обозначим через $p(d)$ число отмеченных точек, лежащих на d. Определим *длину* диагонали d как наименьшее из двух чисел, равных количеству вершин G_{n+3}, лежащих в одной из двух открытых полуплоскостей, определяемых диагональю d, соответственно. Таким образом, короткие диагонали имеют длину 1, и все диагонали имеют длины $\leqslant \frac{n+1}{2}$. Будем называть диагонали максимальной длины *максимальными.* Очевидно, что $p(d)$ зависит только от длины диагонали d, поэтому мы обозначим через $p(j)$ число отмеченных точек на диагонали длины j.

Лемма 3.5. *Если $n = 2k - 1$ — нечётное число, то*

$$S_{n+3} = \frac{n+3}{2} \sum_{l=1}^{k-1} \Big(4l^2k^2 - 2k(2l^3 + l) \Big) + \frac{n+3}{4} k^2(k^2 - 1).$$

Если $n = 2k - 2$ — чётное число, то

$$S_{n+3} = \frac{n+3}{2} \sum_{l=1}^{k-1} \Big(4l^2k^2 - 2k(2l^3 + 2l^2 + l) + (l^4 + 2l^3 + 2l^2 + l) \Big).$$

Доказательство. Предположим, сначала, что $n = 2k - 1$. Тогда:

$$\begin{aligned} S_{n+3} &= \sum_d \frac{p(d)(p(d)-1)}{2} = \\ &= (n+3) \left(\sum_{j=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{p(j)(p(j)-1)}{2} \right) - \left(\frac{n+3}{2} \right) \frac{p(\frac{n+1}{2})(p(\frac{n+1}{2}) - 1)}{2}, \end{aligned}$$

поскольку число отмеченных отрезков на максимальных диагоналях посчитано в сумме дважды.

Обозначим через v $(n+3)$-ю (для определённости) вершину многоугольника G_{n+3} и занумеруем диагонали, исходящие из v, их длинами. Будем обозначать через $c(i,j)$ суммарное число точек пересечения j-ой диагонали, исходящей из v, с диагоналями, исходящими из i-ой вершины для $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant \frac{n+1}{2}$. Положим,также, $c(i,j) = 0$ при $i > j$. Тогда будем иметь:

$$p(j) = \sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} c(i,j), \tag{3.1}$$

Для того, чтобы вычислить $c(i,j)$, заметим, что:

$$\begin{aligned} &c(1,1) = n; \\ &c(i, j-1) = c(i,j) + 1 \quad \text{для } 1 \leqslant i < j \leqslant \frac{n+1}{2}; \\ &c(i+1, j+1) = c(i,j) - 1 \quad \text{для } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant \frac{n-1}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что:

(3.2) $c(i,j) = c(1, j-i+1) - (i-1) = c(1,1) - (j-i) - (i-1) = n - j + 1,$

при $i \leqslant j$. Заметим, что $c(i,j)$ не зависит от i. Подставляя это в (3.1), а затем, подставляя результирующее выражение для $p(j)$ в сумму для S_{n+3} выше, мы получаем требуемую формулу в этом случае.

Случай $n = 2k-2$ рассматривается аналогично. Единственное различие заключается в том, что теперь из каждой вершины исходят две максимальные диагонали G_{n+3}, так что вычитание в сумме для S_{n+3} не требуется. $\square$

Лемма 3.6. *Число отмеченных отрезков внутри G_{n+3} есть*

$$S_{n+3} = (n+3)\binom{n+3}{5}.$$

Доказательство. Это может быть получено из Леммы 3.5 суммированием, если использовать известные формулы для сумм Σ_n n-ых степеней первых $(k-1)$ натуральных чисел:

$$\Sigma_1 = \frac{k(k-1)}{2}, \qquad \Sigma_2 = \frac{k(k-1)(2k-1)}{6},$$
$$\Sigma_3 = \frac{k^2(k-1)^2}{4}, \qquad \Sigma_4 = \frac{k(k-1)(2k-1)(3k^2-3k-1)}{30}.$$

$\square$

Теперь утверждение Теоремы 3.3 следует из результатов Леммы 3.5 и Леммы 3.6. $\square$

Отметим следующий важный для дальнейшего факт (см. [2, Lecture II, Cor. 6.2]):

Предложение 3.7. *Две гиперграни F_1 и F_2 многогранника As^n не пересекаются тогда и только тогда, когда соответствующие диагонали d_1 и d_2 многоугольника G_{n+3} пересекаются (в отмеченной точке).*

Лемма 3.8. *Число отмеченных точек на максимальной диагонали многоугольника G_{n+3} равно*

$$q = q(n) = \begin{cases} \frac{n(n+2)}{4}, & \text{если } n \text{ чётно;} \\ \frac{(n+1)^2}{4}, & \text{если } n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Доказательство. В случае $n = 2$ утверждение очевидно. Если n нечётно, полагая $j = \frac{n+1}{2}$ в (3.1) и используя (3.2), получим

$$p(j) = \sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} c\Big(i, \frac{n+1}{2}\Big) = \frac{(n+1)^2}{4}.$$

Если n чётно, то максимальная диагональ имеет длину $j = \frac{n}{2}$. Легко видеть, что в этом случае $p(j) = \sum_{i=1}^{n/2} c(i,j)$ вместо (3.1), а соотношение (3.2) сохраняется. Поэтому,

$$p(j) = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} c\Big(i, \frac{n}{2}\Big) = \frac{n(n+2)}{4}.$$

□

Теорема 3.9. *Пусть $P = As^n$ есть n-мерный ассоциэдр, $n \geqslant 3$. Биградуированные числа Бетти многогранника P удовлетворяют соотношениям*

$$\beta^{-q,2(q+1)}(P) = \begin{cases} n+3, & \text{если } n \text{ чётно;} \\ \frac{n+3}{2}, & \text{если } n \text{ нечётно;} \end{cases}$$

$$\beta^{-i,2(i+1)}(P) = 0 \quad \text{для } i \geqslant q+1,$$

где $q = q(n)$ определено в Лемме 3.8.

Доказательство. Будем доказывать теорему индукцией по n. База индукции $n = 3$ проверяется непосредственным вычислением, см. таблички биградуированных чисел Бетти ниже. По Следствию 2.4, для того, чтобы вычислить $\beta^{-i,2(i+1)}(P)$, мы должны найти все подмножества $I \subset [m]$, $|I| = i+1$, для которых соответствующие P_I имеют более одной связной компоненты. В случае $i = q$, мы докажем, что $cc(P_I) \leqslant 2$ для $|I| = q+1$, и опишем явно все I, для которых $cc(P_I) = 2$. В случае $i > q$, мы докажем, что $cc(P_I) = 1$ для $|I| = i + 1$. Эти утверждения будут доказаны как отдельные леммы; переход индукции будет следовать из них в конце рассуждения.

Будем нумеровать вершины G_{n+3} целыми числами от 1 до $n+3$. Тогда всякая диагональ d соответствует упорядоченной по возрастанию паре (i, j) целых чисел таких, что $i < j - 1$. Нам будет удобно рассматривать диагональ, соответствующую паре (i, j), как целочисленный отрезок $[i, j]$ внутри отрезка $[1, n+3]$ на вещественной прямой. Тогда Предложение 3.7 может быть переформулировано следующим образом:

Предложение 3.10. *Гиперграни F_1 и F_2 многогранника $P = As^n$ не пересекаются тогда и только тогда, когда соответствующие отрезки $[i_1, j_1]$ и $[i_2, j_2]$ перекрываются, т.е*

$$F_1 \cap F_2 = \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad i_1 < i_2 < j_1 < j_2 \quad \text{или} \quad i_2 < i_1 < j_2 < j_1.$$

Пусть I есть множество диагоналей многоугольника G_{n+3} (или целочисленных отрезков на $[1, n+3]$), а P_I — соответствующее множество (2.4). Мы будем писать $I = I_1 \sqcup I_2$, как только P_I имеет в точности две связные компоненты, соответствующие I_1 и I_2. Обозначим, также, через $e(I)$ множество концов отрезков из набора I; это есть подмножество целых чисел от 1 до $n + 3$.

Предложение 3.11. *Если $I = I_1 \sqcup I_2$, то подмножества $e(I_1)$ и $e(I_2)$ не пересекаются.*

Доказательство. Непосредственное следствие Предложения 3.10. $\square$

Для данного целого числа $m \in [1, n+3]$ и набора отрезков I, обозначим через $c_I(m)$ число отрезков из I, исходящих из m (эквивалентно, число диагоналей из I, исходящих из вершины m). Тогда $0 \leqslant c_I(m) \leqslant n$.

Предложение 3.12. *Если $I = I_1 \sqcup I_2$, то существует m такое, что $c_I(m) \leqslant \frac{n+1}{2}$.*

Доказательство. Предположим противное. Выберем целые точки $m_1 \in e(I_1)$ и $m_2 \in e(I_2)$. Поскольку $c_I(m_1) > \frac{n+1}{2}$, $c_I(m_2) > \frac{n+1}{2}$ и $e(I_1)$, $e(I_2)$ не пересекаются по предыдущему предложению, мы получаем, что общее число элементов в множестве $e(I)$ больше, чем $2 + \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} = n + 3$. Противоречие. $\square$

Лемма 3.13. *Имеем $cc(P_I) \leqslant 2$ при $|I| > l(n) = \frac{n(n+2)}{4}$.*

Доказательство. Докажем эту лемму индукцией по n.

Положим $n = 3$ и докажем наше утверждение от противного, т.е предположим, что существует множество $I = I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3 \sqcup \ldots$ диагоналей G_6, $|I| \geqslant 4$, такое, что $cc(P_I) \geqslant 3$. Поскольку многоугольник G_6 имеет лишь 3 максимальных диагонали, найдётся короткая диагональ $d \in I$; пусть $d \in I_1$. Так как $cc(P_I) \geqslant 3$, любые диагонали $e \in I_2$ и $f \in I_3$ пересекают d. Поэтому, e и f исходят из общей вершины A многоугольника G_6. Мы получили противоречие с тем, что $e(I_2)$ и $e(I_3)$ не пересекаются (см. Предложение 3.11).

Пусть теперь $n > 3$ и предположим, что существует множество $I = I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3 \sqcup \ldots$ диагоналей G_{n+3}, $|I| > \frac{n(n+2)}{4}$, такое, что $cc(P_I) \geqslant 3$.

Если найдётся целая точка $m \in [1, n+3]$ такая, что $c_I(m) = 0$, то мы можем считать, что m есть первая вершина и рассматривать I как множество диагоналей G_{n+2} (отрезок $[2, n+3]$ не может принадлежать I, поскольку иначе $cc(P_I) = 1$). Так как $l(n) > l(n-1)$, применение предположения индукции завершает доказательство леммы в этом случае.

Пусть $c_I(m) \geqslant 1$ для всякой целой точки $m \in [1, n+3]$. Тогда рассуждение, аналогичное приведённому в доказательстве Предложения 3.12, показывает, что существует точка m такая, что $c_I(m) \leqslant \frac{n}{3}$. Рассмотрим 2 случая:

1. Найдётся точка $m_0 \in e(I_k)$, для некоторого $1 \leqslant k \leqslant cc(P_I)$, с минимальным значением $c_I(m) \leqslant \frac{n}{3}$, такая, что $|I_k| > c_I(m_0)$.

Можно считать, что одна из таких m_0 является первой вершиной. Выбрасывая из I все отрезки, исходящие из 1, мы получаем новое множество $\tilde{I}$ отрезков внутри $[2, n+3]$ (отрезок $[2, n+3]$ не может принадлежать I, т.к иначе $cc(P_I) \leqslant 2$). Имеем:

$$|\tilde{I}| = |I| - c_I(1) > \frac{n(n+2)}{4} - \frac{n}{3} > \frac{(n-1)(n+1)}{4} = l(n-1).$$

По предположению индукции, $2 \geqslant cc(P_{\tilde{I}}) \geqslant cc(P_I) \geqslant 3$. Противоречие.

2. Для всякой вершины m_0 с минимальной величиной $c_I(m) \geqslant 1$ имеем $|I_k| = c_I(m_0)$, где $m_0 \in e(I_k)$.

Снова мы можем считать, что одна из таких m_0 является первой вершиной $1 \in I_k$. Тогда $c_I(1) = 1$, т.к иначе найдётся $\geqslant 2$ целых точек m внутри $[2, n+3]$, которые принадлежат $e(I_k)$ и имеют $c_I(m) = 1$ (напомним, что $|I_k| = c_I(m_0)$).

Без потери общности рассуждения можно считать, что $k = 1$. Тогда

$$|I| = 1 + |I_2| + |I_3| + \ldots \leqslant 1 + (1 + q(n-1)) \leqslant 2 + \frac{n^2}{4} \leqslant \frac{n(n+2)}{4}.$$

Первое из неравенств выше имеет место, т.к $\tilde{I} = I_2 \sqcup I_3 \sqcup \ldots$ есть набор диагоналей G_{n+2} (отрезок $[2, n+3]$ не может принадлежать I, поскольку $cc(P_I) \geqslant 3$), и мы можем применить к набору $\tilde{I}$ предположение индукции в доказательстве основной Теоремы 3.9, что даёт нам $|\tilde{I}| \leqslant 1 + q(n-1)$. Получили противоречие с предположением $|I| > \frac{n(n+2)}{4}$. $\square$

Лемма 3.14. *Пусть* $I = I_1 \sqcup I_2$, $|I| \geqslant q+1$, $|I_1| \geqslant 2$ *и* $|I_2| \geqslant 2$. *Тогда найдётся другой набор* I' *такой, что* $I' = I'_1 \sqcup I'_2$, $|I'_1| = 1$ *и* $|I'| > |I|$.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по n. Случаи $n = 3, 4, 5$ проверяются непосредственным вычислением (см. таблички в конце этого раздела).

Изменяя, если необходимо, нумерацию вершин G_{n+3}, мы можем считать, что первая вершина имеет минимальное значение $c_I(m)$. Тогда $c_I(1) \leqslant \frac{n+1}{2}$ по Предложению 3.12. Без потери общности можем считать, что $1 \notin e(I_1)$.

Докажем, что отрезок $[2, n+3]$ не принадлежит I. В самом деле, в противном случае $c_I(1) > 0$ (иначе $cc(P_I) = 1$), $1 \in e(I_2)$, $[2, n+3] \in I_1$. Если $c_I(1) \geqslant 2$, то найдётся целая точка $m \in e(I_2)$ внутри $[2, n+3]$ такая, что $c_I(m) = 1 < c_I(1)$, что противоречит выбору первой вершины. Тогда $c_I(1) = 1$ и $[2, n+3] \in I_1$ дают нам $|I_2| = c_I(1) = 1$, что противоречит предположению $|I_2| \geqslant 2$ в утверждении леммы.

Выбрасывая из I все отрезки, исходящие из 1, мы получим новый набор $\tilde{I}$ целочисленных отрезков внутри $[2, n+3]$. Заметим, что

$$|\tilde{I}| = |I| - c_I(1) \geqslant |I| - \left[\tfrac{n+1}{2}\right]. \tag{3.3}$$

Мы хотим применить предположение индукции к набору $\tilde{I}$ целочисленных отрезков внутри $[2, n+3]$, рассматриваемых как диагонали $(n+2)$-угольника G_{n+2}. Чтобы сделать это, мы должны проверить предположения леммы для набора $\tilde{I}$.

Во-первых, мы утверждаем, что $\tilde{I} = \tilde{I}_1 \sqcup \tilde{I}_2$, т.е $P_{\tilde{I}}$ имеет в точности две связные компоненты. В самом деле, это множество, очевидно, имеет не менее двух компонент, и число компонент не может быть больше двух по Лемме 3.13, поскольку

$$|\tilde{I}| \geqslant |I| - \frac{n+1}{2} \geqslant q + 1 - \frac{n+1}{2} > \frac{(n+1)^2}{4} - \frac{n+1}{2} = l(n-1).$$

Во-вторых, $|\tilde{I}_1| = |I_1| \geqslant 2$ и $|I_2| \geqslant |\tilde{I}_2| \geqslant 1$. Если $|\tilde{I}_2| = 1$, то мы имеем либо $c_I(1) = 1$, либо $c_I(1) = 2$. (В самом деле, если $c_I(1) = 0$, то $|I_2| = |\tilde{I}_2| = 1$, что противоречит предположениям леммы, а $c_I(1)$ не может быть больше 2, т.к иначе $c_I(1)$ не является минимальным.) Таким образом, $|I_2| \leqslant 3$. Мы, также, имеем $|I_1| = |\tilde{I}_1| \leqslant p(d)$, где $d \in \tilde{I}_2 = \{d\}$, т.к d пересекает всякую диагональ из I_1. В силу Леммы 3.8, $p(d) \leqslant q(n-1) \leqslant \frac{n^2}{4}$. Поэтому,

$$|I| = |I_1| + |I_2| \leqslant p(d) + 3 \leqslant \frac{n^2}{4} + 3 \leqslant \frac{(n+1)^2}{4} < q(n) + 1 \leqslant |I|$$

при $n \geqslant 6$. Противоречие. Итак, $|\widetilde{I_2}| \geqslant 2$.

Осталось проверить, что $|\tilde{I}| \geqslant q(n-1) + 1$. Если n нечётно, то

$$|\tilde{I}| \geqslant |I| - \frac{n+1}{2} \geqslant \frac{(n+1)^2}{4} + 1 - \frac{n+1}{2} = \frac{(n-1)(n+1)}{4} + 1 = q(n-1) + 1.$$

Если n чётно, то

$$|\tilde{I}| \geqslant |I| - \frac{n}{2} \geqslant \frac{n(n+2)}{4} + 1 - \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4} + 1 = q(n-1) + 1.$$

Теперь, применяя предположение индукции к набору $\tilde{I}$, находим новый набор целочисленных отрезков $\tilde{J}$ внутри $[2, n+3]$ с $|\tilde{J}| > |\tilde{I}|$ и $|\tilde{J}_1| = 1$. Тогда $\tilde{J}_1 = \{d\}$, где d есть диагональ многоугольника G_{n+2}. Таким образом, $|\tilde{J}| = |\tilde{J}_1| + |\tilde{J}_2| \leqslant 1 + p(d)$. Имеем $p(d) \leqslant q(n-1)$, и равенство имеет место тогда и только тогда, когда $d = d_{max}$ есть максимальная диагональ в G_{n+2}. Поэтому, мы можем заменить $\tilde{J}$ набором $J' = J_1' \sqcup J_2'$, где $J_1' = \{d_{max}\}$ и J_2' есть множество всех диагоналей G_{n+2}, которые пересекают d_{max} в её отмеченных точках. Действительно, мы имеем

$$|J'| = 1 + q(n-1) \geqslant 1 + p(d) \geqslant |\tilde{J}| > |\tilde{I}|. \tag{3.4}$$

Выбирая в качестве d_{max} в G_{n+2} диагональ, соответствующую отрезку $[2,k]$, где $k = \left[\frac{n+7}{2}\right]$, мы замечаем, что она является, также, и максимальной диагональю для G_{n+3}. Теперь положим $I_1' = \{d_{max}\}$ и берём в качестве I_2' объединение J_2' и всех диагоналей, исходящих из 1 и пересекающих d_{max}. Поскольку число внутренних целых точек на d_{max} есть $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, мы получаем из (3.4) и (3.3)

$$|I'| = 1 + |I_2'| = 1 + |J_2'| + \left[\tfrac{n+1}{2}\right] = |J'| + \left[\tfrac{n+1}{2}\right] > |\tilde{I}| + \left[\tfrac{n+1}{2}\right] \geqslant |I|,$$

что завершает переход индукции. □

Лемма 3.15. *Пусть $cc(P_I) = 2$, $I = I_1 \sqcup I_2$ и $|I| \geqslant q+1$. Тогда либо $|I_1| = 1$, либо $|I_2| = 1$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е $|I_1| \geqslant 2$ и $|I_2| \geqslant 2$. По Лемме 3.14, мы можем найти другой набор $I' = I_1' \sqcup I_2'$ такой, что $|I_1'| = 1$ и $|I'| > |I| \geqslant q+1$. С другой стороны, $|I_1'| = 1$ даёт $I_1' = \{d\}$ и $|I'| \leqslant 1 + p(d) \leqslant 1 + q$. Противоречие. □

Лемма 3.16. *Пусть $cc(P_I) = 2$, $I = I_1 \sqcup I_2$ и $|I| = q+1$. Тогда I_1 состоит из одной максимальной диагонали d_{max}, а I_2 состоит из всех диагоналей G_{n+3}, пересекающих d_{max}.*

Доказательство. Согласно Лемме 3.15, мы можем считать, что I_1 состоит из одной диагонали d. Тогда

$$1 + q = |I| = |I_1| + |I_2| \leqslant 1 + p(d) \leqslant 1 + q,$$

что даёт нам $p(d) = q$ и $|I_2| = p(d)$. □

Лемма 3.17. *Пусть $|I| > q+1$. Тогда $cc(P_I) = 1$.*

Доказательство. Имеем $|I| > q + 1 > l(n)$. Поэтому, $cc(P_I) \leqslant 2$, в силу Леммы 3.13. Предположим, что $cc(P_I) = 2$ и $I = I_1 \sqcup I_2$. Тогда $|I_1| = 1$, по Лемме 3.15, т.е $I_1 = \{d\}$ и $|I| \leqslant 1 + p(d) \leqslant 1 + q$. Но это противоречит предположению $|I| > q+1$. □

Теперь мы можем закончить переход индукции в доказательстве Теоремы 3.9. В силу Следствия 2.4 и Леммы 3.16, мы получаем, что число $\beta^{-q,2(q+1)}(P)$ равно количеству максимальных диагоналей многоугольника G_{n+3}. Последнее равно $n+3$, если n чётно, и $\frac{n+3}{2}$, если n нечётно. Тот факт, что $\beta^{-i,2(i+1)}(P)$ равно нулю при $i \geqslant q+1$, вытекает из Следствия 2.4 и Леммы 3.17. $\square$

Приведём, также, результаты вычисления биградуированных чисел Бетти для ассоциэдров As^n при $n \leqslant 5$, полученные с использованием компьютерной программы *Macaulay 2*, см. [5].

Таблички ниже имеют $n-1$ строк и $m-n-1$ столбцов. Число, стоящее на пересечении k-ой строки и l-го столбца равно $\beta^{-l,2(l+k)}(As^n)$, где $1 \leqslant l \leqslant m-n-1$ и $2 \leqslant l+k \leqslant m-2$. Остальные биградуированные числа Бетти равны нулю, за исключением $\beta^{0,0}(As^n) = \beta^{-(m-n),2m}(As^n) = 1$, см. [3, Ch.8]. Биградуированные числа Бетти, которые даются Теоремой 3.9, отмечены жирным шрифтом.

1. $n = 2$, $m = 5$.

5	5

2. $n = 3$, $m = 9$.

15	35	24	**3**	**0**
0	**3**	24	35	15

3. $n = 4$, $m = 14$.

35	140	217	154	49	**7**	**0**	**0**	**0**
0	28	266	784	1094	784	266	28	0
0	**0**	**0**	**7**	49	154	217	140	35

4. $n = 5$, $m = 20$.

70	420	1089	1544	1300	680	226	44	**4**	**0**	**0**
0	144	1796	8332	20924	32309	32184	20798	8480	2053	264
0	0	12	264	2053	8480	20798	32184	32309	20924	8332
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**4**	44	226	680	1300	1544

.

Топология момент-угол многообразий $\mathcal{Z}_P$, соответствующих ассоциэдрам, пока ещё слабо изучена даже для 3-мерных многогранников P. В последнем случае, кольцо когомологий $H^*(\mathcal{Z}_P)$ обладает нетривиальными тройными произведениями Масси, согласно результату Баскакова (см. [3,

§8.4] или [6, §5.3]), откуда вытекает, что многообразие $\mathcal{Z}_P$ не является *формальным* в смысле рациональной теории гомотопий.

4. Многогранники усечения

Пусть P — простой n-мерный многогранник, и $v \in P$ — его вершина. Выберем гипергрань H такую, что H отделяет v от остальных вершин и v принадлежит положительному полупространству $H_{\geqslant}$, определяемому H. Тогда $P \cap H_{\geqslant}$ будет n-мерным симплексом, а $P \cap H_{\leqslant}$ — простым многогранником, который мы назовём *усечением* P. В том случае, если выбор срезаемой вершины ясен из контекста или неважен, мы будем использовать обозначение $vc(P)$. Мы, также, будем обозначать через $vc^k(P)$ многогранник, получающийся из P последовательным усечением, применённым k раз.

В качестве примера описанной выше процедуры рассмотрим многогранник $vc^k(\Delta^n)$, где Δ^n есть n-мерный симплекс, $n \geqslant 2$. Будем называть $vc^k(\Delta^n)$ *многогранником усечения*; у него, очевидно, $m = n + k + 1$ гиперграней. Заметим, что комбинаторный тип $vc^k(\Delta^n)$ зависит от выбора срезаемых вершин при $k \geqslant 3$, однако это обстоятельство не отразится на наших обозначениях.

Рассмотрим, также, симплициальный многогранник Q, двойственный к $vc^k(\Delta^n)$. Он известен под названием *многогранника пирамидальной надстройки* и получается из Δ^n последовательным добавлением пирамид над гипергранями.

Числа Бетти для многогранников усечения были вычислены в [10], но градуировка, использованная там, отлична от нашей. Мы формулируем этот результат ниже и даём его доказательство с несколько отличающейся от [10] аргументацией, используя нашу 'топологическую' градуировку и обозначения.

Теорема 4.1. *Пусть* $P = vc^k(\Delta^n)$ *— многогранник усечения. Тогда для* $n \geqslant 3$ *биградуированные числа Бетти даются следующими формулами:*

$$\beta^{-i,2(i+1)}(P) = i\binom{k+1}{i+1},$$
$$\beta^{-i,2(i+n-1)}(P) = (k+1-i)\binom{k+1}{k+2-i},$$
$$\beta^{-i,2j}(P) = 0, \quad \text{для } i+1 < j < i+n-1.$$

Остальные биградуированные числа Бетти — нулевые, кроме

$$\beta^{0,0}(P) = \beta^{-(m-n),2m}(P) = 1.$$

Замечание. Первая из формул выше была доказана в работе [4] комбинаторно.

Доказательство. Начнём с анализа поведения биградуированных чисел Бетти при одном усечении. Пусть P — произвольный простой многогранник и $P' = vc(P)$. Обозначим через Q и Q' двойственные симплициальные многогранники, соответственно, а через K и K' — их граничные симплициальные комплексы. Тогда Q' получается с помощью добавления пирамиды с вершиной v над гипергранью F многогранника Q. Мы, также, введём обозначения V, V' и $V(F)$ для множества вершин Q, Q' и F, соответственно, так что $V' = V \cup v$.

Доказательство первой формулы основано на следующей лемме:

Лемма 4.2. *Пусть* P *— простой* n*-мерный многогранник с* m *гипергранями, и* $P' = vc(P)$*. Тогда:*

$$\beta^{-i,2(i+1)}(P') = \binom{m-n}{i} + \beta^{-(i-1),2i}(P) + \beta^{-i,2(i+1)}(P).$$

Доказательство. Применяя Теорему 2.3 при $j = i+1$, мы получаем:

$$\beta^{-i,2(i+1)}(P') = \sum_{W\subset V',\,|W|=i+1} \dim \widetilde{H}_0(K'_W)$$

$$= \sum_{W\subset V',\,v\in W,\,|W|=i+1} \dim \widetilde{H}_0(K'_W) \tag{4.1}$$

$$+ \sum_{W\subset V',\,v\notin W,\,|W|=i+1} \dim \widetilde{H}_0(K'_W). \tag{4.2}$$

Сумма (4.2) равна $\beta^{-i,2(i+1)}(P)$ по той же Теореме 2.3.

Для суммы (4.1) получим: во множестве W имеется i 'старых' вершин и одна 'новая' v. Поэтому, число связных компонент K'_W (на единицу большее размерности $\widetilde{H}_0(K'_W)$) либо остаётся тем же (если $W\cap F\neq\varnothing$), либо увеличивается на 1 (если $W\cap F=\emptyset$, и, в этом случае, новая связная компонента есть новая вершина v). Количество подмножеств W последнего типа равно числу способов выбрать i вершин из $m-n$ 'старых' вершин, не лежащих в F. Сумма (4.1), таким образом, даётся формулой

$$\sum_{W\subset V,|W|=i} \dim \widetilde{H}_0(K_W) + \binom{m-n}{i} = \beta^{-(i-1),2i}(P) + \binom{m-n}{i},$$

в которой мы снова использовали Теорему 2.3. □

Теперь первая из формул Теоремы 4.1 следует по индукции по числу усечений, если использовать тот факт, что, очевидно, $\beta^{-i,2(i+1)}(\Delta^n) = 0$ для всех i и Лемму 4.2.

Вторая формула в утверждении основной теоремы вытекает из биградуированной двойственности Пуанкаре, см. Теорему 2.2.

Доказательство третьей формулы основывается на следующей лемме:

Лемма 4.3. *Пусть P — многогранник усечения, K — симплициальный комплекс двойственного симплициального многогранника, V — множество вершин K, и W — непустое, собственное подмножество V. Тогда:*

$$\widetilde{H}_i(K_W) = 0 \quad \textit{для } i\neq 0, n-2.$$

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по числу $m = |V|$ вершин комплекса K. Если $m = n+1$, то P — n-мерный симплекс, и K_W является стягиваемым для всякого непустого, собственного подмножества $W \subset V$.

Для того, чтобы сделать шаг индукции, рассмотрим $V' = V \cup v$, и $V(F)$ — то же, что и в начале доказательства основной Теоремы 4.1. Предположим, что утверждение доказано для V, и пусть W — непустое, собственное подмножество V'.

Рассмотрим следующие 5 возможных случаев.

Case 1: $v \in W,\ W \cap V(F) \neq \varnothing$.

Если $V(F) \subset W$, то K'_W подразбиение $K_{W-\{v\}}$.

Если же $W \cap V(F) \neq V(F)$, то имеем:

$$K'_W = K_{W-\{v\}} \cup K'_{W \cap V(F) \cup \{v\}}, \quad K_{W-\{v\}} \cap K'_{W \cap V(F) \cup \{v\}} = K_{W \cap V(F)},$$

а тогда и $K_{W \cap V(F)}$, и $K'_{W \cap V(F) \cup \{v\}}$ являются, очевидно, стягиваемыми. С помощью точной последовательности Майера–Вьеториса, получаем:

$$\widetilde{H}_i(K'_W) \cong \widetilde{H}_i(K_{W-\{v\}}).$$

Case 2: $v \in W,\ W \cap V(F) = \varnothing$.

В этом случае, легко видеть, что: $K'_W = K_{W-\{v\}} \sqcup \{v\}$. Отсюда имеем:

$$\widetilde{H}_i(K'_W) \cong \begin{cases} \widetilde{H}_i(K_{W-\{v\}}) \oplus \mathbf{k}, & \text{при } i = 0; \\ \widetilde{H}_i(K_{W-\{v\}}), & \text{при } i > 0. \end{cases}$$

Case 3: $W = V' - \{v\} = V$.

В этом случае, K'_W — симплициальный $(n-1)$-диск и, потому, стягиваем.

Case 4: $v \notin W,\ V(F) \subset W,\ W \neq V$.

Мы имеем:

$$K_W = K'_W \cup F, \quad K'_W \cap F = \partial F,$$

где ∂F обозначает границу гиперграни F. Поскольку, очевидно, ∂F есть симплициальная $(n-2)$-сфера, а F есть симплициальный $(n-1)$-диск, точная последовательность Майера–Вьеториса даёт:

$$\widetilde{H}_i(K'_W) \cong \begin{cases} \widetilde{H}_i(K_W), & \text{при } i < n-2; \\ \widetilde{H}_i(K_W) \oplus \mathbf{k}, & \text{при } i = n-2. \end{cases}$$

Case 5: $v \notin W$, $V(F) \not\subset W$. В этом случае, мы получаем сразу, что $K'_W \cong K_W$.

Итак, во всех рассмотренных случаях, мы получили:

$$\widetilde{H}_i(K'_W) \cong \widetilde{H}_i(K_{W-\{v\}}) = 0 \quad \text{для } 0 < i < n-2,$$

чем и заканчивается доказательство нашей леммы по принципу математической индукции. □

Теперь третья из формул Теоремы 4.1 следует из Теоремы 2.3 и Леммы 4.3.

Последнее утверждение Теоремы 4.1 следует из [3, След. 8.19]. □

Для полноты изложения мы включили в этот раздел вычисление биградуированных чисел Бетти в случае $n = 2$, т.е., когда P есть многоугольник.

Предложение 4.4. *Если $P = vc^k(\Delta^2)$ есть $(k+3)$-угольник, то*

$$\beta^{-i,2(i+1)}(P) = i\binom{k+1}{i+1} + (k+1-i)\binom{k+1}{k+2-i},$$
$$\beta^{0,0}(P) = \beta^{-(k+1),2(k+3)}(P) = 1,$$
$$\beta^{-i,2j}(P) = 0, \quad \text{иначе.}$$

Доказательство. Это вычисление было проделано в [3, Пример 8.21]. Результат может быть получен, также, из рассмотрения точной последовательности Майера–Вьеториса, как в доказательстве Теоремы 4.1. □

Следствие 4.5. *Биградуированные числа Бетти многогранников усечения $P = vc^k(\Delta^n)$ зависят только от их размерности и числа гиперграней P и не зависят от комбинаторного типа P. Более того, числа $\beta^{-i,2(i+1)}$ не зависят и от размерности n.*

Топологический тип соответствующих момент-угол многообразий $\mathcal{Z}_P$ описывается следующим образом:

Теорема 4.6 (см.[1, Theorem 6.3]). *Пусть $P = vc^k(\Delta^n)$ есть многогранник усечения. Тогда соответствующее момент-угол многообразие $\mathcal{Z}_P$ диффеоморфно связной сумме произведений сфер:*

$$\mathop{\#}_{j=1}^{k}\left(S^{j+2}\times S^{2n+k-j-1}\right)^{\# j\binom{k+1}{j+1}},$$

где через $X^{\# k}$ обозначена связная сумма k копий X.

Легко видеть, что числа Бетти связной суммы, см. выше, согласованы с биградуированными числами Бетти многогранника P, см. (2.3).

Список литературы

[1] Frédéric Bosio and Laurent Meersseman. *Real quadrics in $\mathbb{C}^n$, complex manifolds and convex polytopes.* Acta Math. **197** (2006), no. 1, 53–127.

[2] Victor M. Buchstaber. *Lectures on toric topology.* In *Proceedings of Toric Topology Workshop KAIST 2008.* Trends in Math. **10**, no. 1. Information Center for Mathematical Sciences, KAIST, 2008, pp. 1–64.

[3] В. М. Бухштабер и Т. Е. Панов. *Торические действия в топологии и комбинаторике.* МЦНМО, Москва, 2004, 272 стр.

[4] Suyoung Choi and Jang Soo Kim. *A combinatorial proof of a formula for Betti numbers of a stacked polytope.* Electron. J. Combin. **17** (2010), no. 1, Research Paper 9, 8 pp.; arXiv:math.CO/0902.2444.

[5] *Macaulay 2.* A software system devoted to supporting research in algebraic geometry and commutative algebra. Available at `http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/`

[6] Taras Panov. *Cohomology of face rings, and torus actions*, in "Surveys in Contemporary Mathematics". London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. **347**, Cambridge, U.K., 2008, pp. 165–201; arXiv:math.AT/0506526.

[7] Taras Panov. *Moment–angle manifolds and complexes.* In *Proceedings of Toric Topology Workshop KAIST 2010.* Trends in Math. **12**, no. 1. Information Center for Mathematical Sciences, KAIST, 2010, pp. 43–69.

[8] Richard P. Stanley. *Combinatorics and Commutative Algebra*, second edition. Progr. in Math. **41**. Birkhäuser, Boston, 1996.

[9] James D. Stasheff. *Homotopy associativity of H-spaces. I.* Transactions Amer. Math. Soc. **108** (1963), 275–292.

[10] Naoki Terai and Takayuki Hibi. *Computation of Betti numbers of monomial ideals associated with stacked polytopes.* Manuscripta Math., 92(4): 447–453, 1997.