Курсовая работа.

Топология гамильтоново-минимальных лагранжевых многообразий.

Автор: Т.Ю.Неретина.
Научный руководитель: Т.Е.Панов.

Механико-математический факультет МГУ

Москва, 2014 год

ТОПОЛОГИЯ ГАМИЛЬТОНОВО-МИНИМАЛЬНЫХ ЛАГРАНЖЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ.

Т.Ю.НЕРЕТИНА.

1. Введение.

Одним из основных объектов торической топологии является момент-угол многообразие $\mathscr{Z}_P$, строящееся по многограннику P. $\mathscr{Z}_P$ является пересечением квадрик в $\mathbb{C}^m$, и по его вещественному аналогу строится гамильтоново-минимальное лагранжево погружение $N \looparrowright \mathbb{C}^m$ и это погружение является вложением тогда и только тогда, когда многогранник P дельзантов([1]). В данной работе рассматривается топологический тип гамильтоново-минимальных лагранжевых многообразий N, возникающих из пересечения двух квадрик, (то есть, когда P комбинаторно эквивалентен декартову произведению двух симплексов).

2. Основные понятия и предварительные результаты

Рассмотрим пересечения квадрик в $\mathbb{C}^m$ и в $\mathbb{R}^m$:

$$\mathscr{Z} = \{z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : \sum_{k=1}^{m} \gamma_{jk}|z_k|^2 = \delta_j, \ \text{при } 1 \le j \le m-n\} \tag{2.1}$$

$$\mathscr{R} = \{u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{k=1}^{m} \gamma_{jk}u_k^2 = \delta_j, \ \text{при } 1 \le j \le m-n\} \tag{2.2}$$

$$\gamma_i = (\gamma_{1i}, \dots, \gamma_{m-n,i})^t \in \mathbb{R}^{m-n}, i = 1, \dots, m$$
$$\delta = (\delta_1, \dots, \delta_i)^t \in \mathbb{R}^{m-n}$$

Пусть векторы коэффициентов γ_i, δ удовлетворяют условиям невырожденности и рациональности:
1) $\delta \in \mathbb{R}_{\ge}\langle\gamma_1, \dots, \gamma_m\rangle$
2) если $\delta \in \mathbb{R}_{\ge}\langle\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_k}\rangle$, то $k \ge m-n$
3) векторы $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ порождают решетку $L \cong \mathbb{Z}^{m-n}$ в $\mathbb{R}^{m-n}$.

Из этих условий следует,что $\mathscr{R}$ является гладким n-мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^m$ и определена $(m-n)$-мерная подгруппа-тор в $\mathbb{T}^m$:

$$T_\Gamma = \{(e^{2\pi i\langle\gamma_1\varphi\rangle}, \dots, e^{2\pi i\langle\gamma_m\varphi\rangle}) \in \mathbb{T}^m\}$$

Пусть
$$L^* = \{\lambda^* \in \mathbb{R}^{m-n} : \langle\lambda^*, \lambda\rangle \text{ для всех } \lambda \in L\}$$

Тогда T_Γ можно представить в виде факторгруппы $\mathbb{R}^{m-n}/L^*$ и задавать его элементы векторами $\varphi \in \mathbb{R}^{m-n}$

Кроме того, определим группу

$$D_\Gamma = \frac{1}{2}L^*/L* \cong (\mathbb{Z}_2)^{m-n},$$

вкладывающуюся в T_Γ в качестве подгруппы.

Рассмотрим пересечение квадрик $\mathscr{R}$ как подмножество в пересечении эрмитовых квадрик $\mathscr{Z}$ (или в объемлющем комплексном пространстве $\mathbb{C}^m$) и «разнесём» его действием тора T_Γ, иначе говоря, рассмотрим множество T_Γ -орбит, проходящих через точки из $\mathscr{R}$. Т.е. рассмотрим отображение

$$j : \mathscr{R} \times T_\Gamma \to \mathbb{C}^m,$$

$$(u, \varphi) \to (u_1 e^{2\pi i \langle \gamma_1 \varphi \rangle}, \ldots, u_m e^{2\pi i \langle \gamma_m \varphi \rangle})$$

Его образ $j(\mathscr{R} \times T_\Gamma) \subset \mathscr{Z}$. D_Γ диагонально действует на $\mathscr{R} \times T_\Gamma$, причем это действие свободно на втором множителе, следовательно, оно свободно, и пространство орбит

$$N = \mathscr{R} \times_{D_\Gamma} T_\Gamma$$

является n-мерным многообразием.

Для каждой точки $u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathscr{R}$ определена подрешетка:

$$L_u = \mathbb{Z}\langle \gamma_k : u_k \neq 0 \rangle \in L = \mathbb{Z}\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_m \rangle$$

Как показывает следующее утверждение, множество T_Γ-орбит, проходящих через точки из $\mathscr{R}$, является погружением многообразия N.

Лемма 2.1 ([1], гл. 12)**.** *(a) Отображение $j : \mathscr{R} \times T_\Gamma \to \mathbb{C}^m$ индуцирует погружение $i : N \looparrowright \mathbb{C}^m$*

(b) Погружение i является вложением тогда и только тогда, когда $L_u = L$ для любого $u \in \mathscr{R}$.

Предложение 2.2 ([1], гл. 12)**.** *(a) Погружение многообразия N в $\mathbb{C}^m$ раскладывается в композицию $i : N \looparrowright \mathscr{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}^m$;*

(b) многообразие N является тотальным пространством расслоения над тором T^{m-n} со слоем $\mathscr{R}$;

(c) если $N \to \mathbb{C}^m$ является вложением, то многообразие N является тотальным пространством главного T^{m-n}-расслоения над n-мерным многообразием $\mathscr{R}/D_\Gamma$.

По [1, теорема 12.2], погружение полученного многообразия N, $i : N \looparrowright \mathbb{C}^m$ будет гамильтоново-минимальным лагранжевым. Далее будем рассматривать топологические свойства N.

Пример 2.3. (одна квадрика) Пусть $m - n = 1$ и многообразие $\mathscr{R}$ компактно. Тогда $\mathscr{R}$ задается одним уравнеием:

$$\gamma_1 u_1^2 + \ldots + \gamma_m u_m^2 = \delta, \tag{2.3}$$

в $\mathbb{R}^m$, где $\gamma_k \in \mathbb{R}$. И, т.к. $\mathscr{R}$ компактно, то $\mathscr{R} \cong S^{m-1}$. Тогда $N \cong S^{m-1} \times_{\mathbb{Z}_2} S^1$, где образующая $\mathbb{Z}_2$ действует стандартной инволюцией на S^1 и некоторой инволюцией τ на S^{m-1}. Топологический тип многообразия N зависит от τ:

$$N \cong \begin{cases} S^{m-1} \times S^1, \text{ если } \tau \text{ сохраняет ориентацию } S^{m-1}; \\ \mathscr{K}^m, \text{ если } \tau \text{ не сохраняет ориентацию } S^{m-1}. \end{cases},$$

Где $\mathscr{K}^m$ - m-мерная бутылка Клейна.

Предложение 2.4 ([1], гл. 12)**.** *В случае $m - n = 1$ (одна квадрика) мы получаем H-минимальное лагранжево вложение многообразия $N \cong S^{m-1} \times_{\mathbb{Z}_2} S^1$ тогда и только тогда, когда $\gamma_1 = \ldots = \gamma_m$ в (2.3). В этом случае топологический тип многообразия $N = N(m)$ зависит лишь от чётности m, а именно:*

$$N(m) \cong \begin{cases} S^{m-1} \times S^1, \text{ если } m \text{ четное;} \\ \mathscr{K}^m, \text{ если } m \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Доказательство. Так как $\mathscr{R}$ содержит точки с лишь одной ненулевой координатой, из леммы 2.1 следует, что N вкладывается в $\mathbb{C}^m$ тогда и только тогда, когда γ_i порождает ту же решётку, что и весь набор $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, для любого i. Следовательно, $\gamma_1 = \ldots = \gamma_m$, и D_Γ действует стандартной инволюцией на S^{m-1}. Эта инволюция сохраняет ориентацию, если m четно и обращает, если m нечетно. $\square$

Пример 2.5. (две квадрики) Пусть $m - n = 2$ и многообразие $\mathscr{R}$ компактно. Запишем пересечение двух квадрик в виде:

$$\begin{aligned} &\gamma_{11}u_1^2 + \ldots + \gamma_{1m}u_m^2 = c \\ &\gamma_{21}u_1^2 + \ldots + \gamma_{2m}u_m^2 = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $c > 0$, $\gamma_{1i} > 0$ для всех i.

Предложение 2.6 ([1], гл. 12)**.** *Существует число p, $0 < p < m$, такое, что $\gamma_{2i} > 0$ при $i = 1, \ldots, p$ и $\gamma_{2i} < 0$ при $i = p+1, \ldots, m$ в (2.4), возможно, после перенумерации координат $u_1, \ldots, u_m$. Соответствующее многообразие $\mathscr{R} = \mathscr{R}(p, q)$, где $q = m - p$, диффеоморфно $S^{p-1} \times S^{q-1}$.*

Элемент $\varphi \in D_\Gamma = \frac{1}{2}L^*/L* \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ действует на многообразии $\mathscr{R}(p, q)$ следующим образом:

$$(u_1, \ldots, u_m) \to (\varepsilon_1(\varphi)u_1, \ldots, \varepsilon_m(\varphi)u_m)$$

где $\varepsilon_k(\varphi) = e^{2\pi i \langle \gamma_k \varphi \rangle} = \pm$ при $1 \leq l \leq m$.

Лемма 2.7 ([1], гл. 12)**.** *Пусть группа D_Γ действует на $\mathscr{R}(p, q)$ свободно. Тогда можно выбрать образующие $\varphi_1, \varphi_2 \in D_\Gamma = \frac{1}{2}L^*/L* \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, действие которых на $\mathscr{R}(p, q)$ задаётся одной из формул ниже, возможно, после перенумерации координат:*

$$\begin{aligned} \varphi_1 :\quad (u_1, \ldots, u_m) \to\quad & (u_1, \ldots, u_k, -u_{k+1}, \ldots, -u_p, -u_{p+1}, \ldots, -u_m), \\ \varphi_2 :\quad (u_1, \ldots, u_m) \to\quad & (-u_1, \ldots, -u_k, u_{k+1}, \ldots, u_p, -u_{p+1}, \ldots, -u_m); \\ \varphi_1 :\quad (u_1, \ldots, u_m) \to\quad & (-u_1, \ldots, -u_p, u_{p+1}, \ldots, u_{p+l}, -u_{p+l+1}, \ldots, -u_m), \\ \varphi_2 :\quad (u_1, \ldots, u_m) \to\quad & (-u_1, \ldots, -u_p, -u_{p+1}, \ldots, -u_{p+l}, u_{p+l+1}, \ldots, u_m); \end{aligned}$$

Тем самым, по лемме (2.1), если D_Γ действует на $\mathscr{R}$ свободно, (например, если $i : N \to \mathbb{C}^m$ является вложением), то три параметра p, q и l (или k) полностью определяют топологический тип N. Каждое из действий группы D_Γ, описанных в этой лемме задается некоторым пересечением квадрик вида (2.4). Например, система

$$\begin{aligned} 2u_1^2 + \ldots + 2u_k^2 + u_{k+1}^2 + \ldots + u_p^2 + u_{p+1}^2 + \ldots + u_m^2 = 3 \\ u_1^2 + \ldots + u_k^2 + 2u_{k+1}^2 \ldots + 2u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_m^2 = 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

дает первое из действий из леммы (2.7). Второе действие реализуется аналогично. Перепишем (2.5) в таком виде, чтобы $L = \mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned} &u_1^2 + \ldots + u_k^2 \quad + u_{k+1}^2 + \ldots + u_p^2 \quad = 1 \\ &u_1^2 + \ldots + u_k^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + u_{p+1}^2 + \ldots + u_m^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Действие двух инволюций $\psi_1, \psi_2 \in D_\Gamma = \frac{1}{2}\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2$, соответствующих стандартным базисным векторам в $\frac{1}{2}\mathbb{Z}^2$, задаётся следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_1 :\quad (u_1, \ldots, u_m, \theta_1, \theta_2) \to\quad & (-u_1, \ldots, -u_k, -u_{k+1}, \ldots, -u_p, u_{p+1}, \ldots, u_m, \theta_1 + \pi, \theta_2), \\ \psi_2 :\quad (u_1, \ldots, u_m, , \theta_1, \theta_2) \to\quad & (-u_1, \ldots, -u_k, u_{k+1}, \ldots, u_p, -u_{p+1}, \ldots, -u_m, \theta_1, \theta_2 + \pi); , \end{aligned}$$

где θ_1, θ_2 - стандартные координаты $T_\Gamma \cong S^1 \times S^1$. Обозначим, соответствующее пересечению квадрик (2.6), многообразие N через $N_k(p,q)$. Тогда

$$N_k(p,q) \cong (S^{p-1} \times S^{q-1}) \times_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2} (S^1 \times S^1) \tag{2.7}$$

.

3. Топологический тип многоообразия $N_k(p,q)$

Лемма 3.1. *Топологический тип многообразия $N_k(p,q)$ зависит лишь от четности k.*

Доказательство. Сделаем замену координат, повернув плоскость, натянутую на e_{k+1}, e_{k+2} на угол θ_2:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{k+1} = u_{k+1}\cos\theta_2 - u_{k+2}\sin\theta_2; \\ \tilde{u}_{k+2} = u_{k+1}\sin\theta_2 + u_{k+2}\cos\theta_2 \\ \tilde{u}_i = u_i, \ i \neq k+1, k+2; \end{cases}$$

Тогда $\tilde{u}_{k+1}^2 + \tilde{u}_{k+2}^2 = u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2$ и в новых координатах уравнение (2.6) не изменится. Инволюции ψ_1 и ψ_2 будут действовать следующим образом:

$$\psi_1 : \quad (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_m, \theta_1, \theta_2) \to \quad (-\tilde{u}_1, \dots, -\tilde{u}_k, -u_{k+1}, \dots, -\tilde{u}_p, \tilde{u}_{p+1}, \dots, \tilde{u}_m, \theta_1 + \pi, \theta_2),$$
$$\psi_2 : \quad (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_m, \theta_1, \theta_2) \to \quad (-\tilde{u}_1, \dots, -\tilde{u}_k, -\tilde{u}_{k+1}, -\tilde{u}_{k+2}, \tilde{u}_{k+3} \dots, \tilde{u}_p, -\tilde{u}_{p+1}, \dots, -\tilde{u}_m, \theta_1, \theta_2 + \pi)$$

Следовательно, $N_k(p,q) \cong N_{k+2}(p,q)$. □

Предложение 3.2. *Если $p > 0$ и $q > 1$, то*

$$N_k(p,q) \cong \begin{cases} \mathscr{K}^p \times \mathscr{K}^p, \text{ если } 2 \nmid p, \ 2 \nmid q \\ \mathscr{K}^p \times S^{q-1} \times S^1, \text{ если } (2 \nmid p, \ 2 \mid q) \text{ или } (2 \mid p, \ 2 \nmid k, \ 2 \mid q) \\ S^{p-1} \times S^1 \times \mathscr{K}^q, \text{ если} (2 \mid p, \ 2 \mid k, \ 2 \nmid q) \text{ или } (2 \mid p, \ 2 \nmid k, \ q = 1) \\ S^{p-1} \times S^1 \times S^{q-1} \times S^1, \text{ если } (2 \mid p, \ 2 \mid k, \ 2 \mid q) \text{ или } (2 \mid p, \ 2 \nmid k, \ 2 \nmid q, \ q \neq 1) \end{cases},$$

где $\mathscr{K}^1$ полагаем равным S^1.

Доказательство. 1. В случае, если k - четное, то по лемме (3.1) $N_k(p,q) \cong N_0(p,q)$.

2. Если, p нечетное, k - нечетное, то $N_k(p,q) \cong N_p(p,q)$. Поэтому, достаточно рассмотреть только случай $p = k$: возьмем за образующие в D_Γ $\varphi_1 = \psi_1, \varphi_2 = (\psi_1 + \psi_2) \in D_\Gamma$. Они действуют на $\mathscr{R}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\varphi_1 : \quad (u_1, \dots, u_m) \to \quad (-u_1, \dots, -u_k, -u_{k+1}, \dots, -u_p, u_{p+1}, \dots, u_m), \\ &\varphi_2 : \quad (u_1, \dots, u_m) \to \quad (u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_p, -u_{p+1}, \dots, -u_m); \end{aligned} \tag{3.1}$$

Следовательно, $N_p(p,q) \cong N_0(p,q)$.

В двух случаях, рассмотренных выше,

$$N_k(p,q) \cong (S^{p-1} \times S^{q-1}) \times_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2} (S^1 \times S^1), \tag{3.2}$$

где действие двух инволюций на $S^{p-1} \times S^{q-1}$ задаются формулой (3.1). φ_1 не действует на S^{q-1}, а φ_2 не действует на S^{p-1}. Из этого следует, что $N_k(p,q) \cong N(p) \times N(q)$.

3. p четное, k - нечетное, q - четное. Сделаем замены координат, аналогичные замене в (3.1):

$$\begin{cases} \tilde{u}_{2i} = u_{2i}\cos\theta_1 - u_{2i+1}\sin\theta_1, i = 1, \dots, p/2 \\ \tilde{u}_{2i+1} = u_{2i}\sin\theta_1 + u_{2i+1}\cos\theta_1, i = 1, \dots, p/2 \\ \tilde{u}_{2i} = u_{2i}\cos\theta_2 - u_{2i+1}\sin\theta_2, i = p/2+1, \dots, (p+q)/2 \\ \tilde{u}_{2i+1} = u_{2i}\sin\theta_2 + u_{2i+1}\cos\theta_2, i = p/2+1, \dots, (p+q)/2 \end{cases}$$

Теперь ψ_1 будет действовать тождественно на S^{p-1}, а ψ_2 будет действовать тождественно на S^{q-2}:

$$\psi_1: \quad (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_m, \theta_1, \theta_2) \to \quad (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_k, \tilde{u}_{k+1}, \ldots, \tilde{u}_p, \tilde{u}_{p+1}, \ldots, \tilde{u}_m, \theta_1 + \pi, \theta_2),$$
$$\psi_2: \quad (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_m, \theta_1, \theta_2) \to \quad (-\tilde{u}_1, \ldots, -\tilde{u}_k, \tilde{u}_{k+1}, \ldots, \tilde{u}_p, \tilde{u}_{p+1}, \ldots, \tilde{u}_m, \theta_1, \theta_2 + \pi)$$

Следовательно, $N_k(p,q) \cong N(p) \times N(q)$.

4. И, последний случай, когда p четное, k - нечетное, q - нечетное. Заметим, что ψ_1 не действует на S^{q-1}, а на S^{p-1} действует антиподально, следовательно

$$N_k(p,q) \cong S^1 \times (S^{p-1} \times S^{q-1}) \times_{\mathbb{Z}_2} S^1)$$

Инволюция ψ_2 не обращает ориентацию $S^{p-1} \times S^1 \times S^{q-1}$, следовательно $N_k(p,q)$ ориентируемо. Т.к ψ_1 действует на S^1 свободно, то $N_k(p,q)$ является расслоением над S^1 со слоем $S^1 \times S^{p-1} \times S^{q-1}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{p+q+2} \times_{\mathbb{Z}_2} S^1 \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{R}^{p+q+2}"] & (S^1 \times S^{p-1} \times S^{q-1}) \times_{\mathbb{Z}_2} S^1) \arrow[d, "S^1 \times S^{p-1} \times S^{q-1}"] \\
S^1 \arrow[r] & S^1
\end{tikzcd}$$

Пусть $q > 1$. $(p+q+2)$-мерных расслоения над S^1 только два: тривиальное и второе неориентированное. Следовательно, расслоения над S^1 со слоем $S^1 \times S^{p-1} \times S^{q-1}$ тоже только два. Но, т.к $N_k(p,q)$ ориентируемо, то $N_k(p,q)$ является тривиальным расслоением над S^1:

$$N_k(p,q) \cong S^1 \times S^{p-1} \times S^{q-1} \times S^1$$

Если $q = 1$, то

$$N_k(p,1) \cong (S^{p-1} \times S^1 \times S^1 \times S^0)/\mathbb{Z}_2,$$

Где $\mathbb{Z}_2$ действует на S^0 свободно. Очевидно, $N_k(p,1) \cong S^{p-1} \times S^1 \times S^1$.

Из рассмотренных случаев, с учетом предложения 2.4 вытекает утверждение теоремы. □

Список литературы

[1] Т.Е.Панов. *Геометрические структуры на момент-угол-многообразиях.* Успехи мат. наук 68 (2013), вып.3, стр. 111-186;

Механико-математический факультет МГУ
E-mail address: nertata2@yandex.ru