МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.Ломоносова
механико-математический факультет

Действие свободных коммутирующих инволюций на поверхностях.

Выполнила: студентка 403-ой группы
Неретина Татьяна Юрьевна
Научный руководитель:
Панов Тарас Евгеньевич

Москва 2016 г.

ДЕЙСТВИЕ СВОБОДНЫХ КОММУТИРУЮЩИХ ИНВОЛЮЦИЙ НА ЗАМКНУТЫХ ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ.

Т. Ю.НЕРЕТИНА.

1. Введение.

Одним из основных объектов изучения в торической топологии является момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ с заданным на нем действием тора, строящийся по симплициальному комплексу $\mathcal{K}$, см. [2]. Наряду с момент-угол-комплексом $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ рассматривается его вещественный аналог $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$, также обладающий многими интересными свойствами. Если $\mathcal{K}$ — симплициальное разбиение $(n-1)$-мерной сферы с m вершинами, то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является $(n+m)$-мерным (замкнутым) многообразием, а $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ — n-мерным многообразием. В частности, если $\mathcal{K}$ — граница m-угольника, то $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ — ориентируемое замкнутое двумерное многообразие (поверхность). Пусть $f(M)$ — функция, которая каждой ориентированной поверхности ставит в соответствие максимально число свободных коммутирующих независимых инволюций на M (т. е. наибольшее возможное n, такое что группа $\mathbb{Z}_2^n$ действует на M свободно). В данной работе доказано, что многообразия $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ являются точками локального максимума этой функции.

2. Основные понятия и предварительные результаты

Момент-угол-комплекса является частным случаем следующей конструкции:

Конструкция 2.1 (полиэдральное произведение)**.** *Пусть* $\mathcal{K}$ симплициальный комплекс на множестве $[m] = 1, 2, \dots, m$ и

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \{(X_1, A_1), \dots, (X_m, A_m)\}$$

набор из m пар топологических пространств, $A_i \subset X_i$. Для каждого подмножества $I \subset [m]$ положим

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = \Big\{(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{j=1}^{m} X_j \colon\ x_j \in A_j \quad \text{for } j \notin I\Big\}$$

и определим **полиэдральное произведение** набора $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$, соответствующее симплициальному комплексу $\mathcal{K}$, как

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \Big(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \notin I} A_i\Big).$$

В случае когда пары (X_i, A_i) одинаковы, т.е. $X_i = X$ и $A_i = A$ для $i = 1, \dots, m$, используется обозначение $(X, A)^{\mathcal{K}}$ для $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}}$.

Если $(X, A) = (D^2, S^1)$, то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}}$ называется *момент-угол-комплексом.* Мы будем рассматривать его вещественный аналог:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = ([-1, 1], \{-1, 1\})^{\mathcal{K}},$$

где $[-1,1] = D^1$ — отрезок, а $\{-1,1\} = \partial[-1,1]$ — пара точек.
Если $\mathcal{K}$ — симплициальное разбиение $(n-1)$-мерной сферы, то $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ является n-мерным многообразием со действием группы $\mathbb{Z}_2^m$ (см. [2, Theorem 4.1.7]). При этом из m коммутирующих инволюций на $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ не более чем $m-n$ действует свободно. Ниже, для полноты изложения, будет приведено доказательство этих фактов в случае, когда $\mathcal{K}$ — граница m-угольника.

Предложение 2.2. *Пусть $\mathcal{K}$ — граница m-угольника. Тогда $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ — ориентируемая поверхность рода*

$$g = 1 - 2^{m-1} + m2^{m-3}.$$

Доказательство. Рассмотрим куб $I^m = [-1,1]^m$ со стандартной структурой кубического комплекса. Его двумерный остов состоит из граней вида

$$\{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{i-1}, x_i, \varepsilon_{i+1}, \ldots, \varepsilon_{j-1}, x_j, \varepsilon_{j+1}, \ldots, \varepsilon_m) \colon x_i, x_j \in [-1,1]\},$$
$$\text{где } \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m = \pm 1.$$

Тогда, по определению, $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ является его подкомплексом. Действительно, $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ есть объединение двумерных граней куба следующего вида:

$$\{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \varepsilon_{i+2}, \ldots, \varepsilon_m) \colon x_i, x_{i+1} \in [-1,1]\}, \text{ где } \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m = \pm 1.$$

(Здесь и далее считаем индексы по модулю m, т. е. $m+1 \equiv 1$.) Таким образом, $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ есть объединение тех двумерных граней куба, в которых изменяется только пара соседних координат. В каждой одномерной грани $\{(\varepsilon_1, \ldots, x_i, \ldots, \varepsilon_m) \colon x_i \in [-1,1]\}$ сходится ровно два квадрата, а именно $(x_i, x_{i+1}) \in [-1,1]^m$ и $(x_{i-1}, x_i) \in [-1,1]^m$. При этом любые два квадрата либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо пересекаются по одномерной грани (так как это верно для всего двумерного остова куба, а одномерные грани $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ составляют весь одномерный остов куба). В каждой вершине сходится ровно m квадратов, образуя m-гранный угол. Из этого всего следует, что $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ является замкнутым двумерным многообразием.

Найдем число вершин В, ребер Р и граней Г. Имеем: $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ склеивается из $\text{Г} = m2^{m-2}$ квадратов. Каждый квадрат имеет 4 ребра, а в каждом ребре сходится 2 квадрата. Поэтому число ребер есть $\text{Р} = 4\text{Г}/2 = 2\text{Г}$. Вершинами являются все вершины куба, следовательно $\text{В} = 2^m$. Итак, эйлерова эхарактеристика равна

$$\chi(\mathcal{R}_\mathcal{K}) = \text{В} - \text{Р} + \text{Г} = \text{В} - 2\text{Г} + \text{Г} = \text{В} - \text{Г} = 2^{m-2}(4-m), \tag{2.1}$$

откуда непосредственно вытекает формула для рода поверхности. □

Пример 2.3. Пусть $\mathcal{K}$ — граница треугольника. Тогда $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ является границей трехмерного куба и, следовательно, гомеоморфно сфере — поверхности рода 0.

Лемма 2.4. *Если $\mathcal{K}$ — граница m-угольника, то на поверхности $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ свободно действует группа $\mathbb{Z}_2^{m-2}$.*

Доказательство. Мы явно укажем образующие свободно действующей подгруппы $\mathbb{Z}_2^{m-2} \subset \mathbb{Z}_2^m$. Пусть ψ_i — инволюция, переводящая x_i в $-x_i$ и оставляющая на месте все остальные координаты. Инволюции ψ_i, $i = 1, \ldots, m$, коммутируют между собой и тем самым порождают действие группы $\mathbb{Z}_2^m$. Однако это действие не свободно: стабилизатором инволюции ψ_i является множество точек с нулевой i-ой координатой. Рассмотрим композицию $\psi_i \circ \psi_j$, где $|i-j| > 1$ (это соответствует диагонали в многоугольнике $\mathcal{K}$). Стабилизатором инволюции $\psi_i \circ \psi_j$ является множество точек с координатами $x_i = x_j = 0$, но таких точек в $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ нет, так как x_i, x_j не соседние координаты. Если $m = 2k$, то рассмотрим $m-2$ инволюции $\psi_1 \circ \psi_3$, $\psi_3 \circ \psi_5$, $\ldots$, $\psi_{2k-3} \circ \psi_{2k-1}$ и $\psi_2 \circ \psi_4$, $\psi_4 \circ \psi_6$,

$\ldots, \psi_{2k-2} \circ \psi_{2k}$. Эти инволюции не меняют ориентацию, попарно коммутируют и порождают свободное действие группы $\mathbb{Z}_2^{m-2}$. Аналогично, для нечетного $m = 2k+1$, рассмотрим $m-2$ инволюции $\psi_1 \circ \psi_3$, $\psi_3 \circ \psi_5$, $\ldots$, $\psi_{2k-3} \circ \psi_{2k-1}$, $\psi_2 \circ \psi_4$, $\psi_4 \circ \psi_6$, $\ldots$, $\psi_{2k-2} \circ \psi_{2k}$ и $\psi_1 \circ \psi_{2k} \circ \psi_{2k+1}$. □

Замечание. В случае если m четно, каждый элемент свободно действующей группы $\mathbb{Z}_2^{m-2}$ сохраняет ориентацию на $\mathcal{R}_\mathcal{K}$, так как является композицией четного числа элементарных инволюций ψ_i. Если же m нечетно, то инволюция $\psi_1 \circ \psi_{2k} \circ \psi_{2k+1}$ меняет ориентацию поверхности $\mathcal{R}_\mathcal{K}$.

Перейдем к произвольным двумерным замкнутым многообразиям и рассмотрим, в какой максимальной степени на них может действовать $\mathbb{Z}_2$. Пусть M — замкнутая двумерная ориентированная поверхность рода h и на ней действует свободно $\mathbb{Z}_2^n$. Тогда $B = M/\mathbb{Z}_2^n$ является двумерным замкнутым многообразием с эйлеровой характеристикой $\chi(B) = \chi(M)/2^n$(так как каждой клетке базы соответствует 2^n клеток накрытия). Докажем следующее утверждение:

Предложение 2.5. *Пусть $B = M/\mathbb{Z}_2^n$ имеет род g. В случае если поверхность B ориентируема, $n \leqslant 2g$. Если неориентируема, то $n \leqslant g$.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда B ориентируемое. Фундаментальная группа поверхности B является свободно-порожденной абелевой группой с $2g$ образующими.

$$G = \pi_1(B) =< a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g |\ a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 >$$

Фундаментальная группа многообразия M равная $\pi_1(M) = H$ является нормальной подгруппой(т.к. действие $\mathbb{Z}_2^n$ свободно) группы G и

$$G/H \approx \mathbb{Z}_2^n.$$

Следовательно, квадрат каждого смежного класса эквивалентен единице:

$$[a_i]^2 = [b_j]^2 = [1],$$

для всех $i, j = 1, ..., g$. Кроме того, все смежные классы коммутируют. Так как группа G порождается элементами $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$, то и все смежные классы, соответственно, порождаются смежными классами $[a_1], [b_1], \ldots, [a_g], [b_g]$. Но так как они коммутируют и их квадраты равны единице, то из них нельзя составить больше чем 2^{2g} слов. Следовательно, порядок группы $G/H \approx \mathbb{Z}_2^n$ не больше 2^{2g}. Следовательно, $n \leqslant 2g$.

Для неориентируемого многообразия доказательство аналогично, за исключением того, что у нее фундаментальная группа

$$G = \pi_1(B) = \langle a_1, \ldots, a_g |\ a_1^2 \ldots a_g^2 = 1 \rangle$$

имеет g образующих и следовательно порядок G/H должен быть не больше, чем 2^g. □

Предложение 2.6. *Для каждых n и g, удовлетворяющих условиям предложения 2.5, существует поверхность рода M со свободным действием $\mathbb{Z}_2^n$ такое, что поверхность $B = M/\mathbb{Z}_2^n$ имеет род g.*

Доказательство. Пусть B ориентируемо. Рассмотрим подгруппу $P :=< g^2, g \in G >$ в фундаментальной группе $\pi(B) = G$ и возьмем $H := GPG^{-1}$. Тогда H — нормальная подгруппа и $H \neq G$, т.к H содержит только элементы с четным количеством букв. Тогда $G/H \approx \mathbb{Z}_2^{2g}$. Следовательно, существует и регулярное накрытие, соответствующее этой подгруппе H(см. [**?**]). Добавим к P одну из порождающих: $P_1 :=< P, a_1 >$ и $H_1 := GP_1G^{-1}$. P_1 тоже будет нормальной собственной подгруппой(собственной, например потому, что в каждом элементе b_g встречается четное число раз), а факторгруппа $G/H \approx \mathbb{Z}_2^{2g-1}$. Ей тоже соответствует регулярное накрытие. И так далее, добавляя к P еще образующие a_i, b_i будем получать накрытия B для все меньших значений n. Для неориентированного случая все аналогично, но надо брать $P := [G, G]$ $\square$

3. Основные результаты

Предложение 3.1. *На вещественных момент-угол-комплексах функция $f(M_g)$ достигает нестрогого локального максимума.*

Доказательство. Если $B = M/\mathbb{Z}_2^n$ ориентируемое рода g, то его эйлерова характеристика $\chi(B) = 2 - 2g$, следовательно,

$$\chi(M) = 2^n(2-2g) \tag{3.1}$$

где $n \leqslant 2g$. Если B неориентируемое, то $\chi(B) = 2 - g$ и

$$\chi(M) = (2-g)2^n \tag{3.2}$$

где $n \leqslant g$. При $n = 2g$ получаем $M = \mathcal{R}_\mathcal{K}$, когда $\mathcal{K}$ — граница $(2g+2)$-угольника. (Действительно, при $m = 2g+2$ получаем в 2.1 и 3.1 одинаковые выражения.) В неориентированном случае, при $n = g$, многообразие M гомеоморфно $\mathcal{R}_\mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — граница $(g+2)$-угольника. Из 3.1 и 3.2 следует, что для того чтобы на многообразии M могло свободно действовать $\mathbb{Z}_2^n$ необходимо, чтобы эйлерову характеристику M можно было представить в виде:

$$\chi(M) = a \cdot 2^n, \text{где } n \leqslant 2-a,\ a \in \mathbb{Z} \tag{3.3}$$

Или, по-другому, род M должен быть равен

$$g(M) = 1 + a \cdot 2^{(n-1)}, \text{где } a \geqslant n-2,\ a \in \mathbb{Z}. \tag{3.4}$$

(Например, для четного g, $n = 1$)
Случай $n = 2-a$ соответствует нашим вещественным момент-угол-комплексам. Это — точки, в которых происходит скачок функции $f(M_g)$- поверхности с меньшим родом заведомо должны иметь меньшее n в представлении 3.4, а поверхности с большим родом не могут иметь большее n до следующей точки скачка $n + 1 = 2 - a_2$. $\square$

Введем функцию $H(g)$ как обратную к функции $g(x) = 1 + (x-2)2^{x-1}$.

$$H(g) = \frac{W\left(\frac{1}{2}(g-1)\ln 2\right)}{\ln 2} + 2$$

где W - функция Ламберта (функция, обратная xe^x). Тогда

$$f(g) = \min\{\nu_2(g-1)+1, [H(g)]\}, \tag{3.5}$$

где $\nu_p(g)$ кратность вхождения простого числа p в каноническое разложение на простые множители числа g.

Так как функция $f(g)$ зависит от того, на какую степень двойки делится $g-1$, то она не монотонна и локальных максимумов и минимумов там много. Однако соответствующая момент-угол многообразиям последовательность $\{a_n\}_1^\infty$, $a_n := 1 - (2-n) \cdot 2^{(n-1)}$ обладает тем свойством, что:

$$\begin{array}{rcl} f(g) & < & f(a_n) = n, \text{ при } g < a_n \\ f(g) & \leqslant & f(a_n), \text{ при } g < a_{n+1} \end{array}$$

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} \cong \mathop{\#}_{k=3}^{m-1} \left(S^k \times S^{m+2-k}\right)^{\#(k-2)\binom{m-2}{k-1}}.$$

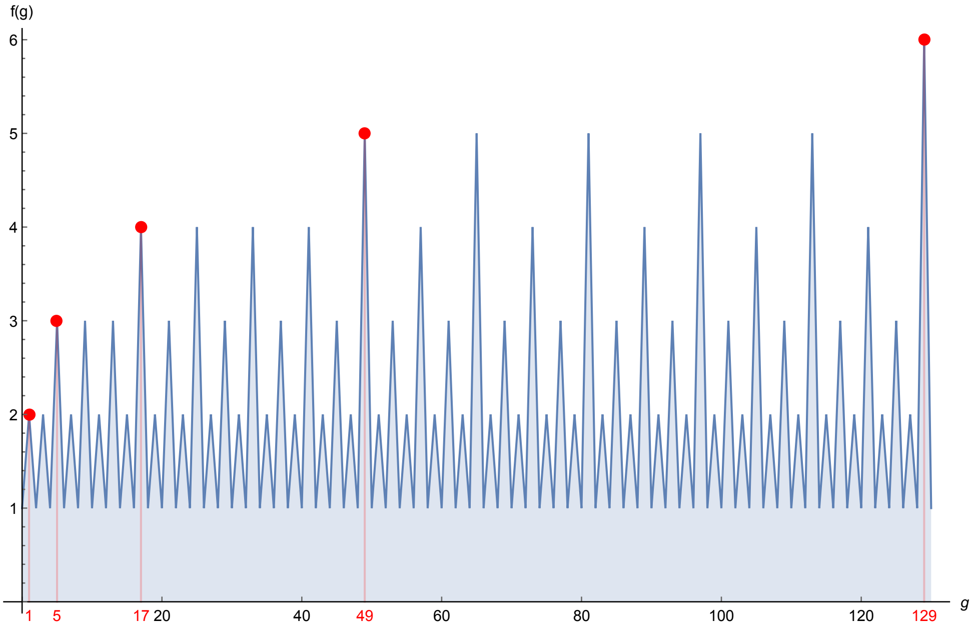

Рис. 1. График функции $f(g)$, где g — род поверхности.

Список литературы

[1] Т. Е. Панов. *Геометрические структуры на момент-угол-многообразиях*. Успехи мат. наук 68 (2013), вып. 3, стр. 111–186.

[2] V. Buchstaber, T. Panov. *Toric Topology*. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[3] А. Хатчер. *Алгебраическая топология*. МЦНМО, Москва, 2011.

Механико-математический факультет МГУ
E-mail address: `nertata2@yandex.ru`