ДЕЙСТВИЕ СВОБОДНЫХ КОММУТИРУЮЩИХ ИНВОЛЮЦИЙ НА ЗАМКНУТЫХ ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ.

Т. Ю.НЕРЕТИНА.

1. Введение.

Одним из основных объектов изучения в торической топологии является момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ с заданным на нем действием тора, строящийся по симплициальному комплексу $\mathcal{K}$, см. [2]. Наряду с момент-угол-комплексом $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ рассматривается его вещественный аналог $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$, также обладающий многими интересными свойствами. Если $\mathcal{K}$ — симплициальное разбиение $(n-1)$-мерной сферы с m вершинами, то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является $(n+m)$-мерным (замкнутым) многообразием, а $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ — n-мерным многообразием. В частности, если $\mathcal{K}$ — граница m-угольника, то $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ — ориентируемое замкнутое двумерное многообразие (поверхность). Пусть $f(M)$ — функция, которая каждой ориентированной поверхности ставит в соответствие максимально число свободных коммутирующих независимых инволюций на M (т. е. наибольшее возможное n, такое что группа $\mathbb{Z}_2^n$ действует на M свободно). В данной работе доказано, что многообразия $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ являются точками локального максимума этой функции.

2. Основные понятия и предварительные результаты

Момент-угол-комплекс является частным случаем следующей конструкции:

Конструкция 2.1 (полиэдральное произведение)**.** *Пусть* $\mathcal{K}$ симплициальный комплекс на множестве $[m] = 1, 2, \ldots, m$ и

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \{(X_1, A_1), \ldots, (X_m, A_m)\}$$

набор из m пар топологических пространств, $A_i \subset X_i$. Для каждого подмножества $I \subset [m]$ положим

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = \big\{(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{j=1}^{m} X_j \colon\ x_j \in A_j \quad \text{for } j \notin I\big\}$$

и определим **полиэдральное произведение** набора $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$, соответствующее симплициальному комплексу $\mathcal{K}$, как

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \Big(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \notin I} A_i\Big).$$

В случае когда пары (X_i, A_i) одинаковы, т.е. $X_i = X$ и $A_i = A$ для $i = 1, \ldots, m$, используется обозначение $(X, A)^{\mathcal{K}}$ для $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}}$.

Если $(X, A) = (D^2, S^1)$, то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}}$ называется *момент-угол-комплексом.* Мы будем рассматривать его вещественный аналог:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = ([-1, 1], \{-1, 1\})^{\mathcal{K}},$$

где $[-1, 1] = D^1$ — отрезок, а $\{-1, 1\} = \partial[-1, 1]$ — пара точек.
Если $\mathcal{K}$ — симплициальное разбиение $(n-1)$-мерной сферы, то $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ является n-мерным многообразием со действием группы $\mathbb{Z}_2^m$ (см. [2, Theorem 4.1.7]). При

этом из m коммутирующих инволюций на $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ не более чем $m-n$ действует свободно. Ниже, для полноты изложения, будет приведено доказательство этих фактов в случае, когда $\mathcal{K}$ — граница m-угольника.

Предложение 2.2. *Пусть $\mathcal{K}$ — граница m-угольника. Тогда $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ — ориентируемая поверхность рода*

$$g = 1 - 2^{m-1} + m2^{m-3}.$$

Доказательство. Рассмотрим куб $I^m = [-1,1]^m$ со стандартной структурой кубического комплекса. Его двумерный остов состоит из граней вида

$$\{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1}, x_i, \varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_{j-1}, x_j, \varepsilon_{j+1}, \dots, \varepsilon_m) \colon x_i, x_j \in [-1,1]\}, \quad \text{где } \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m = \pm 1.$$

Тогда, по определению, $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ является его подкомплексом. Действительно, $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ есть объединение двумерных граней куба следующего вида:

$$\{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \varepsilon_{i+2}, \dots, \varepsilon_m) \colon x_i, x_{i+1} \in [-1,1]\}, \text{ где } \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m = \pm 1.$$

(Здесь и далее считаем индексы по модулю m, т. е. $m+1 \equiv 1$.) Таким образом, $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ есть объединение тех двумерных граней куба, в которых изменяется только пара соседних координат. В каждой одномерной грани $\{(\varepsilon_1, \dots, x_i, \dots, \varepsilon_m) \colon x_i \in [-1,1]\}$ сходится ровно два квадрата, а именно $(x_i, x_{i+1}) \in [-1,1]^m$ и $(x_{i-1}, x_i) \in [-1,1]^m$. При этом любые два квадрата либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо пересекаются по одномерной грани (так как это верно для всего двумерного остова куба, а одномерные грани $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ составляют весь одномерный остов куба). В каждой вершине сходится ровно m квадратов, образуя m-гранный угол. Из этого всего следует, что $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ является замкнутым двумерным многообразием.

Найдем число вершин В, ребер Р и граней Г. Имеем: $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ склеивается из $\Gamma = m2^{m-2}$ квадратов. Каждый квадрат имеет 4 ребра, а в каждом ребре сходится 2 квадрата. Поэтому число ребер есть $\text{Р} = 4\Gamma/2 = 2\Gamma$. Вершинами являются все вершины куба, следовательно $\text{В} = 2^m$. Итак, эйлерова эхарактеристика равна

$$\chi(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = \text{В} - \text{Р} + \Gamma = \text{В} - 2\Gamma + \Gamma = \text{В} - \Gamma = 2^{m-2}(4-m), \tag{2.1}$$

откуда непосредственно вытекает формула для рода поверхности. □

Пример 2.3. Пусть $\mathcal{K}$ — граница треугольника. Тогда $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ является границей трехмерного куба и, следовательно, гомеоморфно сфере — поверхности рода 0.

Лемма 2.4. *Если $\mathcal{K}$ — граница m-угольника, то на поверхности $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ свободно действует группа $\mathbb{Z}_2^{m-2}$.*

Доказательство. Мы явно укажем образующие свободно действующей подгруппы $\mathbb{Z}_2^{m-2} \subset \mathbb{Z}_2^m$. Пусть ψ_i — инволюция, переводящая x_i в $-x_i$ и оставляющая на месте все остальные координаты. Инволюции ψ_i, $i = 1, \dots, m$, коммутируют между собой и тем самым порождают действие группы $\mathbb{Z}_2^m$. Однако это действие не свободно: стабилизатором инволюции ψ_i является множество точек с нулевой i-ой координатой. Рассмотрим композицию $\psi_i \circ \psi_j$, где $|i-j| > 1$ (это соответствует диагонали в многоугольнике $\mathcal{K}$). Стабилизатором инволюции $\psi_i \circ \psi_j$ является множество точек с координатами $x_i = x_j = 0$, но таких точек в $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ нет, так как x_i, x_j не соседние координаты. Если $m = 2k$, то рассмотрим $m-2$ инволюции $\psi_1 \circ \psi_3$, $\psi_3 \circ \psi_5$, …, $\psi_{2k-3} \circ \psi_{2k-1}$ и $\psi_2 \circ \psi_4$, $\psi_4 \circ \psi_6$, …, $\psi_{2k-2} \circ \psi_{2k}$. Эти инволюции не меняют ориентацию, попарно коммутируют и порождают свободное действие группы $\mathbb{Z}_2^{m-2}$. Аналогично, для нечетного $m = 2k+1$, рассмотрим $m-2$ инволюции $\psi_1 \circ \psi_3$, $\psi_3 \circ \psi_5$, …, $\psi_{2k-3} \circ \psi_{2k-1}$, $\psi_2 \circ \psi_4$, $\psi_4 \circ \psi_6$, …, $\psi_{2k-2} \circ \psi_{2k}$ и $\psi_1 \circ \psi_{2k} \circ \psi_{2k+1}$. □

Замечание. В случае если m четно, каждый элемент свободно действующей группы $\mathbb{Z}_2^{m-2}$ сохраняет ориентацию на $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$, так как является композицией четного числа элементарных инволюций ψ_i. Если же m нечетно, то инволюция $\psi_1 \circ \psi_{2k} \circ \psi_{2k+1}$ меняет ориентацию поверхности $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$.

Теперь пусть задана произвольная двумерная замкнутая поверхность M. Рассмотрим вопрос об описании максимального n для которого группа $\mathbb{Z}_2^n$ действует свободно на M. Очевидно, что n зависит только от рода h поверхности M. Введем функцию

$$f(h) = \max\{n\colon \mathbb{Z}_2^n \text{ действует свободно на поверхности рода } h\}.$$

Пусть $f(h) = n$. Тогда $B = M/\mathbb{Z}_2^n$ является двумерным замкнутым многообразием с эйлеровой характеристикой $\chi(B) = \chi(M)/2^n$, 2^n.

Предложение 2.5. *Пусть поверхность $B = M/\mathbb{Z}_2^n$ имеет род g. Если поверхность B ориентируема, то $n \leqslant 2g$. Если B неориентируема, то $n \leqslant g$.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда B ориентируема. Фундаментальная группа поверхности B имеет вид:

$$G = \pi_1(B) = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle.$$

Фундаментальная группа $\pi_1(M) = H$ многообразия M является нормальной подгруппой группы G (так как действие $\mathbb{Z}_2^n$ свободно) и

$$G/H \approx \mathbb{Z}_2^n.$$

Следовательно, квадрат каждого смежного класса эквивалентен единице:

$$[a_i]^2 = [b_j]^2 = [1],$$

для всех $i, j = 1, ..., g$. Кроме того, все смежные классы (элементы $G/H \approx \mathbb{Z}_2^n$) коммутируют. Так как группа G порождается элементами $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$, то факторгруппа G/H порождается смежными классами $[a_1], [b_1], \ldots, [a_g], [b_g]$. Но так как они коммутируют и их квадраты равны единице, то из них нельзя составить больше чем 2^{2g} слов. Поэтому, порядок группы $G/H \approx \mathbb{Z}_2^n$ не больше 2^{2g}. Следовательно, $n \leqslant 2g$.

Для неориентируемой поверхности B доказательство аналогично, за исключением того, что фундаментальная группа

$$G = \pi_1(B) = \langle a_1, \ldots, a_g | \ a_1^2 \ldots a_g^2 = 1 \rangle$$

имеет g образующих и порядок факторгруппы G/H не больше 2^g. □

Предложение 2.6.

а) *Для каждой ориентируемой поверхности B рода g и числа $n \leqslant 2g$ существует такая ориентированная поверхность M со свободным действием группы $\mathbb{Z}_2^n$, что $B = M/\mathbb{Z}_2^n$.*

б) *Для каждой неориентируемой поверхности B рода g и числа $n \leqslant g$ существует такая поверхность M со свободным действием группы $\mathbb{Z}_2^n$, что $B = M/\mathbb{Z}_2^n$.*

Доказательство. Пусть B ориентируема. Рассмотрим подгруппу P в фундаментальной группе $\pi(B) = G$, порожденную квадратами всех элементов:

$$P =< g^2, g \in G >$$

и рассмотрим ее нормализатор $H = GPG^{-1}$. Тогда H — нормальная подгруппа и $H \neq G$, так как H содержит только элементы с четным количеством букв. Мы имеем: $G/H \approx \mathbb{Z}_2^{2g}$ (это следует из того что в факторгруппе G/H имеются соотношения $[a_i]^2 = [b_j]^2 = [a_i b_j a_i b_j] = [1]$). Следовательно, существует регулярное накрытие, соответствующее этой подгруппе H (см. [3]). Добавим к P

одну из образующих: $P_1 = \langle P, a_1 \rangle$ и рассмотрим $H_1 = GP_1G^{-1}$. Тогда P_1 тоже будет нормальной собственной подгруппой (собственной, например потому, что в каждом ее элементе b_g встречается четное число раз), а факторгруппа есть $G/H \approx \mathbb{Z}_2^{2g-1}$. Ей также соответствует регулярное накрытие. И так далее, добавляя к P еще образующие a_i, b_i будем получать накрытия поверхностей B для все меньших значений n.

Для неориентированного случая рассуждения аналогичны. □

3. Основные результаты

Предложение 3.1. *Пусть n - максимальное целое число, такое что*

$$\chi(M_g) = a \cdot 2^n, \text{где } n \leqslant 2 - a,\ a \in \mathbb{Z} \tag{3.1}$$

Тогда $f(g) = n$, если a четно и $n - 1 \leqslant f(g) \leqslant n$, если a нечетно.

Доказательство. Пусть на M_g свободно действует $\mathbb{Z}_2^k$. Тогда $\chi(M_g) = 2^k\, \chi(M_g/\, \mathbb{Z}_2^k)$ и, как следует из 2.5, $k \leqslant 2 - \chi(M_g/\mathbb{Z}_2^k)$. Следовательно, $f(g) \leqslant n$. Оценим $f(g)$ снизу. Для этого рассмотрим два случая:

1. a - четное. Возьмем ориентированную поверхность B рода $\frac{2-a}{2}$ Так как $n < 2\frac{2-a}{2}$, то по предложению 2.6 существует ориентированное многообразие M такое, что на M свободно действует $\mathbb{Z}_2^n$ и $M = B/\mathbb{Z}_2^n$. Эйлерова характеристика $\chi(M) = 2^n a = \chi(M_g)$, следовательно M имеет род g и $f(g) \geqslant n$
2. a - нечетное. Представив $\chi(M) = 2^{n-1}(2a)$, сводим задачу к предыдущему случаю и получаем $f(g) \geqslant n - 1$.

□

Введем функцию $H(g)$ как обратную к функции $\mathbf{g}(x) = 1 + (x-2)2^{x-1}$.

$$H(g) = \frac{W\left(\frac{1}{2}(g-1)\ln 2\right)}{\ln 2} + 2$$

где W - функция Ламберта (функция, обратная xe^x). Тогда

Теорема 3.2. *$f(g) \leqslant H(g)$, причем равенство достигается на момент-угол многообразиях и только на них.*

Доказательство. Действительно, из 3.1 следует что

$$g = 1 + 2^{n-1}(a-2), \text{где } n \leqslant a,\ a \in \mathbb{Z}$$

Следовательно, $f(g) \leqslant n \leqslant \mathbf{g}^{-1}(x)$. Равенство достигается, тогда и только тогда, когда род g можно представить в виде $g = 1 + 2^{n-1}(n-2)$. Сравнив это выражение с 2.2, находим что $M \simeq \mathcal{R}_\mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — граница $(2g+2)$-угольника □

Список литературы

[1] Т. Е. Панов. *Геометрические структуры на момент-угол-многообразиях.* Успехи мат. наук 68 (2013), вып. 3, стр. 111–186.
[2] V. Buchstaber, T. Panov. *Toric Topology.* Mathematical Surveys and Monographs, vol. 204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
[3] А. Хатчер. *Алгебраическая топология.* МЦНМО, Москва, 2011.

Механико-математический факультет МГУ
E-mail address: nertata2@yandex.ru

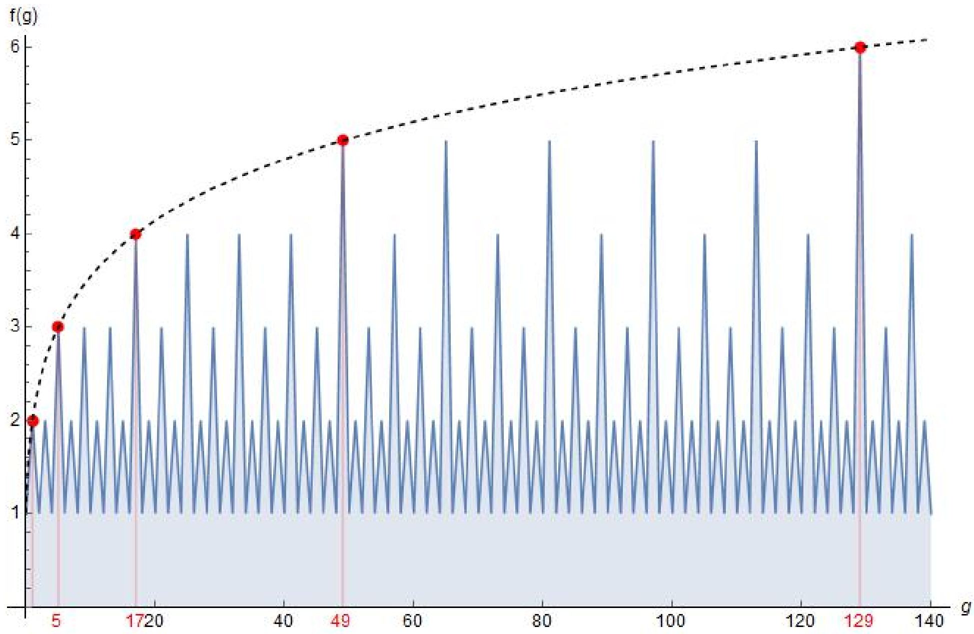

Рис. 1. График функции $f(g)$, где g — род поверхности.