ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

ДЕЙСТВИЕ ТОРА НА СВЯЗНЫХ СУММАХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ СФЕР

Выполнил студент
603 группы
Неретина Татьяна Юрьевна

____
Подпись студента

Научный руководитель:
профессор Панов Тарас Евгеньевич

____
подпись научного руководителя

Москва,
2021г.

Оглавление

1 Введение.

Момент-угол-комплекс является частным случаем следующей конструкции.

Конструкция (полиэдральное произведение). Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m] = 1, 2, \ldots, m$ и

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \{(X_1, A_1), \ldots, (X_m, A_m)\}$$

набор из m пар топологических пространств, $A_i \subset X_i$. Для каждого подмножества $I \subset [m]$ положим

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = \Big\{(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{j=1}^{m} X_j \colon\ x_j \in A_j \quad \text{для } j \notin I\Big\}$$

и определим **полиэдральное произведение** набора $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$, соответствующее симплициальному комплексу $\mathcal{K}$, как

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \Big(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \notin I} A_i\Big).$$

Здесь объединение берется внутри произведения $\prod_{j=1}^{m} X_j$. В случае, когда пары (X_i, A_i) одинаковы, т. е. $X_i = X$ и $A_i = A$ для $i = 1, \ldots, m$, используется обозначение $(X, A)^{\mathcal{K}}$ для $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}}$.

Если $(X, A) = (D^2, S^1)$, то

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}}$$

называется **момент-угол-комплексом**. Рассматриваются также **вещественные момент-угол-комплексы** $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = ([-1, 1], \{-1, 1\})^{\mathcal{K}},$$

где $[-1, 1] = D^1$ — отрезок, а $\{-1, 1\} = \partial[-1, 1]$ — пара точек. Теория момент-угол комплексов излагается в [1], [7].

Если $\mathcal{K}$ — симплициальное разбиение $(n-1)$-мерной сферы с m вершинами, то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является $(n+m)$-мерным топологическим многообразием, а $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ — n-мерным топологическим многообразием, см. [1], теоремы 4.1.4, 4.1.7. В частности, если $\mathcal{K}$ — граница m-угольника, то $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ — ориентируемое замкнутое двумерное многообразие (поверхность), а $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ — замкнутое $(m+2)$-мерное многообразие.

В дипломной работе решаются две задачи, связанные с момент-угол-комплексами многоугольников.

1) Пусть группа $\mathbb{Z}_2^n$ свободно действует на компактной поверхности рода g.

Теорема. *Род такой поверхности поверхности удовлетворяет неравенству*

$$g \geqslant 1 + 2^{n-1}(n-2),$$

причем минимум достигается на вещественном момент-угол-комплексе $(n+2)$-угольника.

Утверждение доказано в §§2-3.

2) Рассмотрим комплексный момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, связанный с границей m-угольника, $m > 3$. Мы считаем, что круг D^2 это единичный круг в $\mathbb{C}$. Тогда $(D^2)^m$ состоит из последовательностей

$$(z_1, z_2, \ldots, z_k), \qquad \text{где } |z_j| \leqslant 1.$$

Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ – подмножество в прямом произведении m копий круга D^2, являющееся объединением кусков вида

$$\Omega_j = \bigl\{|z_1| = \cdots = |z_j| = 1, |z_{j+1}| \leqslant 1, |z_{j+2}| \leqslant 1, |z_{j+3}| = \cdots = |z_m| = 1\bigr\},$$

индексы считаются по модулю m, $m+1 \equiv 1$. На этом $(m+2)$-мерном комплексе действует покоординатным умножением m-мерный тор T^m, состоящий из наборов вида

$$(e^{2\pi i \alpha_1}, \ldots, e^{2\pi i \alpha_m})$$

В этом торе есть много подторов коразмерности 2, действующих свободно. Например, при четном m мы можем взять подтор, заданный уравнениями

$$\sum \alpha_{2j} = 0, \qquad \sum \alpha_{2j+1} = 0.$$

Этот комплекс гомеоморфен связной сумме произведений сфер

$$\#_{p=3}^{m-1}\bigl(S^p \times S^{m+2-p}\bigr)^{\#(p-2)C_{m-2}^{p-1}}$$

(МакГавран, [6], см. также [1], теорема 4.6.12). Символ # обозначает связную сумму многообразий, а тот же символ в показателе степени означает, что мы берем связную сумму нескольких копий одного многообразия.

В частности, для пятиугольника получается

$$(S^3 \times S^4)^{\#5}$$

связная сумма 5 копий $S^3 \times S^4$.

Поэтому возникает вопрос, насколько обычны свободные действия больших торов на связных суммах произведений сфер. В работе доказывается следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $\mathcal{E} = (S^3 \times S^4)^{\# k}$ *связная сумма* k *копий произведений сфер* $S^3 \times S^4$. *Пусть на* $\mathcal{E}$ *свободно действует трехмерный тор* T^3. *Тогда* $k = 5$.

Утверждение доказано в §§4-5.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю Т. Е. Панову за постановку задачи, помощь и внимание.

2 Действие $\mathbb{Z}_2^m$ на момент-угол-комплексе m-угольника

Если $\mathcal{K}$ — симплициальное разбиение $(n-1)$-мерной сферы, то $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ является n-мерным многообразием с действием группы $\mathbb{Z}_2^m$ (см. [1, Теорема 4.1.7]). При этом из m коммутирующих инволюций на $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ не более чем $m-n$ действует свободно. Ниже для полноты изложения будет приведено доказательство этих фактов в случае, когда $\mathcal{K}$ — граница m-угольника. Поверхности $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$, соответствующие m-угольникам, появились под названием "regular topological skew polygedra"в работе Г. Кокстера [2] 1937г.

Предложение 2.1. *Пусть* $\mathcal{K}$ *— граница* m*-угольника. Тогда* $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ *— ориентируемая поверхность рода*

$$g = 1 - 2^{m-1} + m2^{m-3}.$$

Доказательство. Рассмотрим куб $I^m = [-1,1]^m$ со стандартной структурой кубического комплекса. Его двумерный остов состоит из граней вида

$$\{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1}, x_i, \varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_{j-1}, x_j, \varepsilon_{j+1}, \dots, \varepsilon_m)\colon x_i, x_j \in [-1,1]\},$$
$$\text{где } \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m = \pm 1.$$

Тогда по определению $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ является его подкомплексом. Действительно, $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ есть объединение двумерных граней куба следующего вида:

$$\{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \varepsilon_{i+2}, \dots, \varepsilon_m)\colon x_i, x_{i+1} \in [-1,1]\},$$
$$\text{где } \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m = \pm 1.$$

(Здесь и далее считаем индексы по модулю m, т. е. $m+1 \equiv 1$.) Таким образом, $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ есть объединение тех двумерных граней куба, в которых изменяется только пара соседних координат. В каждой одномерной грани $\{(\varepsilon_1, \dots, x_i, \dots, \varepsilon_m)\colon x_i \in [-1,1]\}$ сходятся ровно два квадрата, а именно $(x_i, x_{i+1}) \in [-1,1]^m$ и $(x_{i-1}, x_i) \in [-1,1]^m$. При этом любые два квадрата либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо пересекаются по одномерной грани (так как это верно для всего двумерного остова куба, а одномерные грани $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ составляют весь одномерный остов куба). В каждой вершине сходится ровно m квадратов. Из этого всего следует, что $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ является замкнутым двумерным многообразием.

Найдем число вершин V, ребер E и граней F. Поверхность $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ склеивается из $F = m2^{m-2}$ квадратов. Каждый квадрат имеет 4 ребра, а в каждом ребре сходятся 2 квадрата. Поэтому число ребер есть $E = 4F/2 = 2F$. Вершинами являются все вершины куба, следовательно, $V = 2^m$. Итак, эйлерова характеристика равна

$$\chi(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = V - E + F = V - 2F + F = V - F = 2^{m-2}(4-m),$$

откуда непосредственно вытекает формула для рода поверхности. □

Пример. Пусть $\mathcal{K}$ — граница треугольника. Тогда поверхность $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ является границей трехмерного куба и, следовательно, гомеоморфна сфере — поверхности рода 0.

Лемма 2.2. *Лемма. Если $\mathcal{K}$ — граница m-угольника, то на поверхности $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ свободно действует группа $\mathbb{Z}_2^{m-2}$.*

Доказательство. Мы укажем явно образующие свободно действующей подгруппы $\mathbb{Z}_2^{m-2} \subset \mathbb{Z}_2^m$. Пусть ψ_i — инволюция, переводящая x_i в $-x_i$ и оставляющая на месте все остальные координаты. Инволюции ψ_i, $i = 1, \ldots, m$, коммутируют между собой и тем самым порождают действие группы $\mathbb{Z}_2^m$. Однако это действие не свободно: стабилизатором инволюции ψ_i является множество точек с нулевой i-й координатой. Рассмотрим композицию $\psi_i \circ \psi_j$, где $|i - j| > 1$ (это соответствует диагонали в многоугольнике $\mathcal{K}$). Стабилизатором инволюции $\psi_i \circ \psi_j$ является множество точек с координатами $x_i = x_j = 0$, но таких точек в $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ нет, так как x_i, x_j не соседние координаты. Если $m = 2k$, то рассмотрим $m-2$ инволюции $\psi_1 \circ \psi_3$, $\psi_3 \circ \psi_5$, $\ldots$, $\psi_{2k-3} \circ \psi_{2k-1}$ и $\psi_2 \circ \psi_4$, $\psi_4 \circ \psi_6$, $\ldots$, $\psi_{2k-2} \circ \psi_{2k}$. Эти инволюции попарно коммутируют и порождают свободное действие группы $\mathbb{Z}_2^{m-2}$. Аналогично для нечетного $m = 2k+1$ рассмотрим $m-2$ инволюции $\psi_1 \circ \psi_3$, $\psi_3 \circ \psi_5$, $\ldots$, $\psi_{2k-3} \circ \psi_{2k-1}$, $\psi_2 \circ \psi_4$, $\psi_4 \circ \psi_6$, $\ldots$, $\psi_{2k-2} \circ \psi_{2k}$ и $\psi_1 \circ \psi_{2k} \circ \psi_{2k+1}$. □

Замечание. В случае, если m четно, каждый элемент свободно действующей группы $\mathbb{Z}_2^{m-2}$ сохраняет ориентацию на $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$, так как является композицией четного числа элементарных инволюций ψ_i. Если же m нечетно, то инволюция $\psi_1 \circ \psi_{2k} \circ \psi_{2k+1}$ меняет ориентацию поверхности $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$.

3 Верхняя оценка числа свободных коммутирующих инволюций

Теперь пусть задана произвольная двумерная замкнутая поверхность M. Рассмотрим вопрос описания максимального n, для которого группа $\mathbb{Z}_2^n$ действует свободно на M. Очевидно, что n зависит только от рода h поверхности M. (Эйлерова характеристика ориентируемой поверхности рода

h равна $2 - 2h$, а эйлерова характеристика неориентируемой поверхности рода h равна $2 - h$.) Введем функцию

$$f(h) = \max\{n\colon \mathbb{Z}_2^n \text{ действует свободно на поверхности рода } h\}.$$

Пусть $f(h) = n$. Тогда $B = M/\mathbb{Z}_2^n$ является двумерным замкнутым многообразием с эйлеровой характеристикой $\chi(B) = \chi(M)/2^n$.

Теорема 3.1. *Пусть поверхность $B = M/\mathbb{Z}_2^n$ имеет род g. Если поверхность B ориентируема, то $n \leqslant 2g$. Если B неориентируема, то $n \leqslant g$.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда поверхность B ориентируема. Ее фундаментальная группа имеет вид

$$G = \pi_1(B) = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1\rangle.$$

Фундаментальная группа $\pi_1(M) = H$ многообразия M является нормальной подгруппой группы G (так как действие $\mathbb{Z}_2^n$ свободно) и $G/H \approx \mathbb{Z}_2^n$. Следовательно, квадрат каждого смежного класса эквивалентен единице, $[a_i]^2 = [b_j]^2 = [1]$ для всех $i, j = 1, ..., g$. Кроме того, все смежные классы (элементы $G/H \approx \mathbb{Z}_2^n$) коммутируют. Так как группа G порождается элементами $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$, то факторгруппа G/H порождается смежными классами $[a_1], [b_1], \ldots, [a_g], [b_g]$. Но поскольку они коммутируют и их квадраты равны единице, то из них нельзя составить более 2^{2g} слов. Поэтому порядок группы $G/H \approx \mathbb{Z}_2^n$ не больше 2^{2g}. Следовательно, $n \leqslant 2g$.

Для неориентируемой поверхности B доказательство аналогично, за исключением случая, когда фундаментальная группа

$$G = \pi_1(B) = \langle a_1, \ldots, a_g \mid a_1^2 \ldots a_g^2 = 1\rangle$$

имеет g образующих и порядок факторгруппы G/H не больше 2^g. □

Предложение 3.2. *а) Для каждой ориентируемой поверхности B рода g и числа $n \leqslant 2g$ существует такая ориентируемая поверхность M со свободным действием группы $\mathbb{Z}_2^n$, что $B = M/\mathbb{Z}_2^n$.*

б) Для каждой неориентируемой поверхности B рода g и числа $n \leqslant g$ существует такая поверхность M со свободным действием группы $\mathbb{Z}_2^n$, что $B = M/\mathbb{Z}_2^n$.

Доказательство. Пусть поверхность B ориентируема. Рассмотрим подгруппу P в фундаментальной группе $\pi(B) = G$, порожденную квадратами всех элементов: $P = \langle g^2, g \in G\rangle$, и рассмотрим ее нормализатор $H = GPG^{-1}$. Тогда H — нормальная подгруппа и $H \neq G$, так как H содержит только элементы с четным количеством букв. Мы имеем $G/H \approx \mathbb{Z}_2^{2g}$ (это следует из того, что в факторгруппе G/H выполняются соотношения $[a_i]^2 = [b_j]^2 = [a_i b_j a_i b_j] = [1]$). Следовательно, существует регулярное накрытие, соответствующее этой подгруппе H (см. [5]). Добавим к P одну из образующих: $P_1 = \langle P, a_1\rangle$ и рассмотрим $H_1 = GP_1G^{-1}$. Тогда $_1$ тоже будет нормальной собственной подгруппой (собственной, например, потому, что в каждом ее элементе b_g встречается четное число раз), а факторгруппа есть $G/H \approx \mathbb{Z}_2^{2g-1}$. Соответствующее накрытие поверхности B регулярно и дает свободное действие группы $\mathbb{Z}_2^{2g-1}$. Продолжая этот процесс, будем добавлять к P еще образующие a_i, b_i и получать накрытия поверхности B, соответствующие свободному действию $\mathbb{Z}_2^{2g-k}$ для всех $k = 1, 2, \ldots, 2g-1$.

Для неориентированного случая рассуждения аналогичны. $\square$

Предложение 3.3. *Пусть M — ориетируемая поверхность рода g, а n – максимальное целое число, для которого существует целое число $a \leqslant 1$, удовлетворяющее условиям*

$$\chi(M_g) = a \cdot 2^n, \text{ где } n \leqslant 2 - a. \tag{1}$$

Тогда $f(g) = n$, если a четно, и $n - 1 \leqslant f(g) \leqslant n$, если a нечетно.

Доказательство. Пусть на поверхности M_g свободно действует $\mathbb{Z}_2^k$. Тогда $\chi(M_g) = a' \cdot 2^k$, где $a' = \chi(M_g/\mathbb{Z}_2^k)$ и, как следует из предложения 3.1, $k \leqslant 2 - a'$. По определению, n — максимальное значение, которое может принимать такое k. Следовательно, $f(g) \leqslant n$. Оценим $f(g)$ снизу. Для этого рассмотрим два случая:

1) a – четное. Возьмем ориентируемую поверхность B эйлеровой характеристики a рода $\frac{2-a}{2}$. Так как $n \leqslant 2\frac{2-a}{2}$, то по предложению 3.2 существует ориентируемая поверхность M, такая, что на M свободно действует $\mathbb{Z}_2^n$ и $M = B/\mathbb{Z}_2^n$. Эйлерова характеристика $\chi(M) = 2^n a = \chi(M_g)$, следовательно, M имеет род g и $f(g) \geqslant n$.

2) a – нечетное. Представив $\chi(M) = 2^{n-1}(2a)$. Возьмем ориентируемую поверхность B эйлеровой характеристики $2a$, т. е. рода $\frac{2-2a}{2}$. Мы имеем $n - 1 \leqslant 2 - 2a$, так как $n \leqslant 2 - a$ и $a \leqslant 1$. По предложению 3.2 существует ориентируемая поверхность M, такая, что на M свободно действует $\mathbb{Z}_2^{n-1}$ и $M = B/\mathbb{Z}_2^{n-1}$. Эйлерова характеристика $\chi(M) = 2^{n-1}(2a) = \chi(M_g)$, следовательно, M имеет род g и $f(g) \geqslant n - 1$. $\square$

Введем функцию $H(g)$ как обратную к функции $g(x) = 1 + (x-2)2^{x-1}$:

$$H(g) = \frac{W\left(\frac{1}{2}(g-1)\ln 2\right)}{\ln 2} + 2,$$

где W — функция Ламберта (функция, обратная к xe^x).

Теорема 3.4. *Теорема Имеет место соотношение $f(g) \leqslant H(g)$, причем равенство достигается на вещественных момент-угол-многообразиях и только на них.*

Доказательство. Подставляя $\chi(M_g) = 2 - 2g$ и $a = 2 - b$ в (1), получаем

$$g = 1 + 2^{n-1}(b-2), \text{ где } n \leqslant b,\ b \geqslant 1.$$

По предложению 3.3 для максимального n, удовлетворяющего вышеприведенному условию, верно неравенство $f(g) \leqslant n$ С другой стороны,

$$g(n) = 1 + 2^{n-1}(n-2) \leqslant 1 + 2^{n-1}(b-2) = g,$$

что эквивалентно $n \leqslant H(g)$. Следовательно, $f(g) \leqslant H(g)$.

Равенство достигается тогда и только тогда, когда род g можно представить в виде $g = 1+2^{n-1}(n-2)$. Сравнив это выражение с формулой из предложения 2.1, находим, что $M \simeq \mathcal{R}_{\mathcal{K}}$, где $\mathcal{K}$ — граница $(n+2)$-угольника. $\square$

Значения функции $f(g)$ показаны на рисунке, где пунктиром изображен график функции $H(g)$.

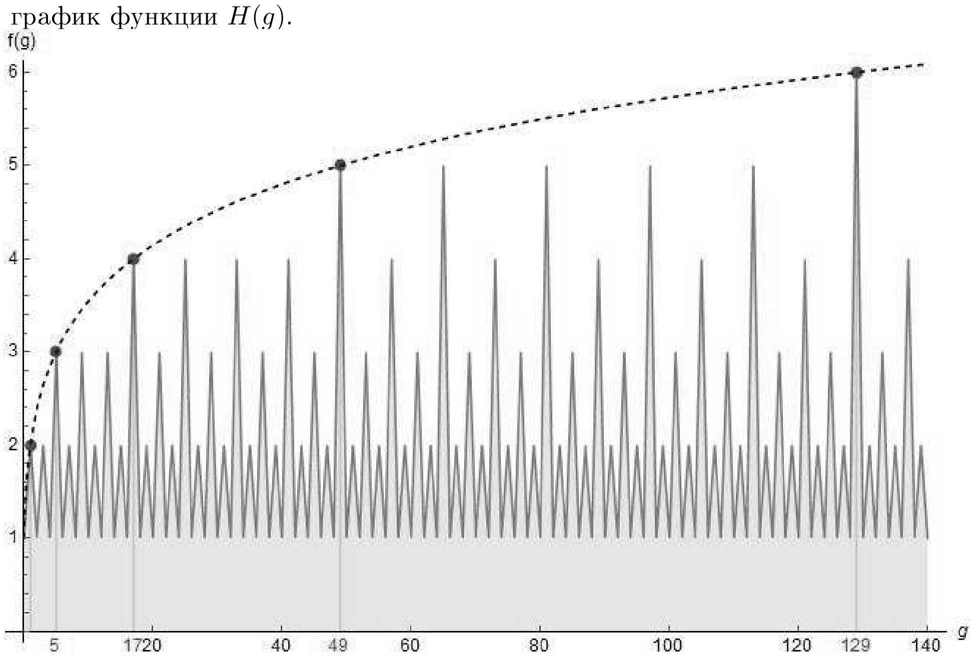


График функции $f(g)$, где g — род поверхности

4 Когомологии фактора связной суммы $(S^3 \times S^4)^{\# k}$ по действию тора

Обозначим через $\mathcal{E}$ связную сумму k копий $S^3 \times S^4$. Группы $\mathbb{Z}$-гомологий этого пространства равны

$$\begin{aligned} H_0(\mathcal{E}, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}, \\ H_3(\mathcal{E}, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}^k, \\ H_4(\mathcal{E}, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}^k, \\ H_7(\mathcal{E}, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

гомологии в размерностях 1, 2, 5, 6 – нулевые. Это следует из общего факта (см. [5], 328): пусть M_1, M_2 – компактные гладкие многообразия размерности n, то для при $1 \leqslant k \leqslant n-1$ выполнено

$$H_k(M_1 \# M_2, \mathbb{Z}) \simeq H_k(M_1, \mathbb{Z}) \oplus H_k(M_2, \mathbb{Z})$$

Так как $H_1(\mathcal{E}, \mathbb{Z}) = 0$, многообразие $\mathcal{E}$ односвязно. Поэтому мы можем применить теорему Гуревича ([4], §13), в этом случае вторая гомотопическая группа изоморфна $H_2(\mathcal{E}, \mathbb{Z})$,

$$\pi_2(\mathcal{E}) = 0.$$

Допустим, что на $\mathcal{E}$ свободно действует трехмерный тор T^3. Тогда определено фактор-многообразие

$$B = \mathcal{E}/T^3$$

Предложение 4.1. *Если на $\mathcal{E}$ действует трехмерный тор, то $\mathbb{Z}$-гомологии B равны*

$$\begin{aligned} H_0(B, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z} \\ H_1(B, \mathbb{Z}) &= 0 \\ H_2(B, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}^3 \\ H_3(B, \mathbb{Z}) &= 0 \\ H_0(B, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Группы когомологий такие же.

Доказательство. Мы имеем расслоение, тотальное пространство $\mathcal{E}$, слой изоморфен тору T^3, а база B нам неизвестна. Точная последовательность расслоения (см. [4], §8, [5], теорема 4.41) имеет вид

$$\cdots \to \pi_2(\mathcal{E}) \to \pi_2(B) \to \pi_1(T^3) \to \pi_1(\mathcal{E}) \to \pi_1(B) \to \pi_0(T^3) \to \ldots$$

У нас $\pi_2(\mathcal{E}) = 0$, $\pi_1(\mathcal{E}) = 0$, $\pi_0(T^3) = 0$. Поэтому $\pi_1(B) = 0$, а поэтому и гомологии $H_1(\mathbb{Z})$ равны нулю. Кроме того, B ориентируемо. Кроме того,

$$\pi_2(B) \simeq \pi_1(T^3) \simeq \mathbb{Z}^3$$

Поэтому по теореме Гуревича $H_2(B, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^3$.

Мы знаем H_0, H_1, H_2. Далее (см. [4], стр. 157)

$$H^k(B, \mathbb{Z}) = (\text{свободная часть } H_k(B, \mathbb{Z})) \oplus (\text{кручение } H_{k-1}(B, \mathbb{Z})) \tag{4.1}$$

Поэтому

$$H^1(B, \mathbb{Z}) = 0, \quad H^2(B, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^3$$

Так как B ориентируемо, то $H^4(B, \mathbb{Z}) = 0$ и выполнена двойственность Пуанкаре (см. [5], теорема 3.30). Поэтому

$$H^3(B, \mathbb{Z}) = H_1(B, \mathbb{Z}) = 0.$$

Но тогда по (4.1) и $H_3(B,\mathbb{Z}) = 0$. $\square$

Кроме того, мы имеем умножение в когомологиях

$$H^2(B,\mathbb{Z}) \times H^2(B,\mathbb{Z}) \to H^4(B,\mathbb{Z}),$$

то есть симметричная билинейнаф форма. По двойственности Пуанкаре она невырождена.

5 Применение спектральной последовательности.

Мы знаем когомологии $\mathcal{E}$. Попробуем параллельно вычислить их, исходя из полученных данных о когомологиях B и понятных когомологий тора T^3.

Рассмотрим когомологическую спектральную последовательность расслоения $\mathcal{E} \to B$ (см. [4], §19, [3], §21). У нас база односвязна, поэтому (см.[4], с.210) член E_2 устроен как

$$E_2^{p,q} = H^p(B, H^q(T^3)).$$

Так как у нас нет кручений, мы можем переписать это как (см. [4], стр. 237)

$$E_2^{p,q} = H^p(B, H^q(T^3,\mathbb{Z})) = H^p(B,\mathbb{Z}) \otimes H^q(T^3,\mathbb{Z}).$$

В предыдущем параграфе мы описали когомологии базы. Когомологии тора $H^*(T^3)$ - алгебра, порожденнная антикоммутирующими образующими σ_1, σ_2, σ_3 степени 1,

$$\sigma_i^2 = 0, \qquad \sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i$$

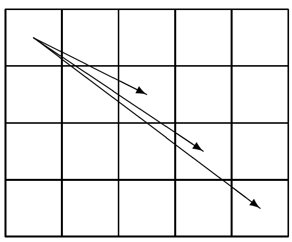
Соответственно группы гомологий тора: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^3$, $\mathbb{Z}^3$, $\mathbb{Z}$.

Поэтому группы $E_2^{p,q}$ такие

$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}^3$	0	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}^3$	0	$\mathbb{Z}^9$	0	$\mathbb{Z}^3$
$\mathbb{Z}^3$	0	$\mathbb{Z}^9$	0	$\mathbb{Z}^3$
$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}^3$	0	$\mathbb{Z}$

В левом столбце - когомологии слоя, в нижней строке - когомологии базы.

Мы применяем дифференциалы d_2, d_3, d_4 и берем получающиеся когомологии, группы во всех клетках уменьшаются. Дифференциалы бьют так



У d_3 или начало или конец стоит в нуле, поэтому $E_4 = E_3$. Единственный возможный нетривиальный дифференциал d_5 - из левой верхней клеточки в правую нижнюю.

После прореживания когомологий в члене E_6 должно остаться

H_1	0	**0**	0	$\mathbb{Z}$
0	0	G_1	0	**0**
0	0	H_2	0	**0**
$\mathbb{Z}$	0	**0**	0	G_2

где (G_2, G_1) - присоединенная фильтрация к $H^4(\mathcal{E}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^k$, (H_2, H_1) - присоединенная фильтрация к $H^3(\mathcal{E}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^k$, $\mathbb{Z}^k/G_2 \simeq G_1$, $\mathbb{Z}^k/H_2 \simeq H_1$.

Жирные нули в таблице должны появиться потому, что у $\mathcal{E}$ когомологии H^1, H^2, H^5, H^6 равны нулю. Причем они не могут появиться в результате применения d_4, а поэтому эти нули должны быть уже в E_3. Это означает, что стрелки

$$\begin{aligned} d_2 &: H^0(B, H^1(T^3, \mathbb{Z})) \to H^2(B, H^0(T^3, \mathbb{Z})) \\ d_2 &: H^2(B, H^3(T^3, \mathbb{Z})) \to H^4(B, H^2(T^3, \mathbb{Z})) \end{aligned} \tag{5.1}$$

являются изоморфизмами (в абоих случаях $\mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3$). Стрелка

$$d_2 : H^0(B, H^2(T^3, \mathbb{Z})) \to H^2(B, H^1(T^3, \mathbb{Z}))$$

является вложением $\mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^9$, а

$$d_2 : H^2(B, H^3(T^3, \mathbb{Z})) \to H^4(B, H^0(T^2, \mathbb{Z}))$$

– сюръекция $\mathbb{Z}^9 \to \mathbb{Z}^3$.

Отсюда уже видно число k слагаемых в нашей несвязной сумме $(S^3 \times S^4)^{\#k}$ не превосходит 7.

Лемма 5.1. *a) Дифференциал*

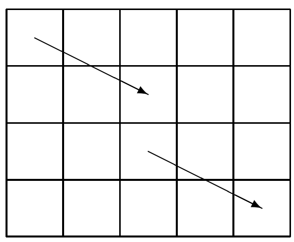
$$d_2 : H^0(B, H^3(T^3, \mathbb{Z})) \to H^2(B, H^2(T^2, \mathbb{Z}))$$

является вложением $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^9$ и $\mathbb{Z}^9/\operatorname{im} d_2 \simeq \mathbb{Z}^8$.

b) Дифференциал

$$d_2 : H^2(B, H^1(T^3, \mathbb{Z})) \to H^4(B, H^0(T^2, \mathbb{Z}))$$

из $\mathbb{Z}^9 \to \mathbb{Z}$ сюръективен.



Доказательство. У нас односвязная база, а в когомологиях базы и слоя нет кручений. Поэтому $\oplus_{p,q} E_2^{p,q}$ имеет структуру алгебры

$$H^*(B,\mathbb{Z}) \otimes H^*(T^3,\mathbb{Z}),$$

причем d_2 является дифференциалом относительно этой структуры. Эта алгебра порождена образующими σ_1, σ_2, σ_3 когомологий тора и базисом μ_1, μ_2, μ_3 в $H^2(B,\mathbb{Z})$.

Мы используем биективность дифференциала (5.1), элементы $d_2\sigma_j$ должны образовывать базис в группе $E_2^{2,0} \simeq H^2(B,\mathbb{Z})$. Поэтому мы можем положить

$$d_2\sigma_j = \mu_j.$$

Докажем утверждение a). Группа $E_2^{0,3}$ порождена одним элементом $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$, а 9-мерная группа $E_2^{2,2}$ имеет базис $\sigma_i\sigma_j\mu_k$, где $i < j$. Мы имеем

$$d_2\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \mu_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\mu_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2\mu_3 = \sigma_2\sigma_3\mu_1 - \sigma_1\sigma_3\mu_2 + \sigma_1\sigma_2\mu_3.$$

У нас получилась сумма трех базисных элементов $E_2^{2,2}$, она не равна 0 и не представима в виде $l \cdot u$, где u - другой элемент группы, а $l \geqslant 2$.

Проверим утверждение b). В группе $E_2^{2,1}$ элементы $\sigma_i\mu_k$ образуют базис. Применим дифференциал d_2 к произвольному элементу группы Мы имеем $d_2\mu_j = 0$.

$$d_2 \sum c_{ik}\sigma_i\mu_k = \sum c_{ik}\, d_2\sigma_i \cdot \mu_k = \sum c_{ik}\mu_i\mu_k.$$

В образе лежат произвольные квадратичные выражения от μ_1, μ_2, μ_3, то есть в образ попадает вся группа $H^4(B,\mathbb{Z})$. □

Закончим доказательство теоремы. Член E_3 спектральной последовательности выглядит как

0	0	0	0	$\mathbb{Z}$
0	0	$\mathbb{Z}^5$	0	0
0	0	$\mathbb{Z}^5$	0	0
$\mathbb{Z}$	0	0	0	0

а дальше спектральная последовательность стабилизируется.

То есть когомологии $\mathcal{E}$ имеют вид

$$\mathbb{Z}, 0, 0, \mathbb{Z}^5, \mathbb{Z}^5, 0, 0, \mathbb{Z}$$

и число k склеиваемых произведений сфер равно 5.

Теорема 5.2. *Пусть $\mathcal{E} = (S^3 \times S^4)^{\#k}$ связная сумма k копий произведений сфер $S^3 \times S^4$. Пусть на $\mathcal{E}$ свободно действует трехмерный тор T^3. Тогда $k = 5$.*

Список литературы

[1] Buchstaber V. M., Panov T. E. *Toric topology.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[2] Coxeter H. S. M. *Regular skew polyhedra in three and four dimensions and their topological analogues* Proc. Lond. Math. Soc., 1937. **43**, N2. 33–62.

[3] Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. *Курс гомотопической топологии* Москва, Наука, 1989.

[4] Фукс Д.Б., Фоменко А.Т., Гутенмахер В.Л. *Гомотопическая топология*, Изд-во МГУ, 1969

[5] Хатчер А., *Алгебраическая топология*, МЦНМО, 2011

[6] McGavran D. *Adjacent connected sums and torus actions.* Trans. Amer. Math. Soc. 251 (1979), 235-254.

[7] Панов Т.Е. *Геометрические структуры на момент-угол-многообразиях.* Успехи мат. наук. 2013. **68**, №3. 111–186.