МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет
Кафедра высшей геометрии и топологии

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

Влияние геометрических свойств вееров на структуру торических многообразий

Выполнил: Пуртов Д. С., группа 505

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Панов Т. Е.

Москва, 2013

ВВЕДЕНИЕ

Эта работа посвящена изучению свойств торических многообразий, а именно некоторых нюансов их построения. Комплексное алгебраическое многообразие V является торическим, если оно содержит алгебраический тор $(\mathbb{C}^{\times})^n$ в качестве открытого по-Зарисскому подмножества таким образом, что естественное действие $(\mathbb{C}^{\times})^n$ на себе продолжается на все V. Торические многообразия описываются комбинаторно-геометрическими объектами — рациональными веерами (подробно эти конструкции описываются в [**1**, ch. 5]). Далее все веера будем считать рациональными. Мы покажем, что для того, чтобы построить многообразие, важны не только комбинаторные, но и геометрические свойства веера, а именно будет доказана следующая

Гипотеза 1. *Пусть имеются $a_1, \dots, a_m \in N$, где N — целочисленная решетка ранга n, а также симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на $[m]$. Пусть*

1) *$\{a_i,\, i \in I\}$ линейно независимы $\forall I \in \mathcal{K}$. Обозначим конусы, соответствующие I, через σ_I.*
2) *$\exists\, I, J \in \mathcal{K}$ такие, что конусы σ_I и σ_J пересекаются не по грани, а имеют общую внутреннюю точку (Примечание. Здесь и далее "внутренняя точка" не является внутренней в обычном смысле (см. рис. 1). Так мы называем "плохую" точку, принадлежащую пересечению конусов, но при этом не лежащую в общей грани, вдоль которой производится склейка).*

*Назовем эту конструкцию **сломанным** веером. Тогда построенный по нему объект не будет хаусдорфовым, т.е. не будет являться алгебраическим многообразием.*

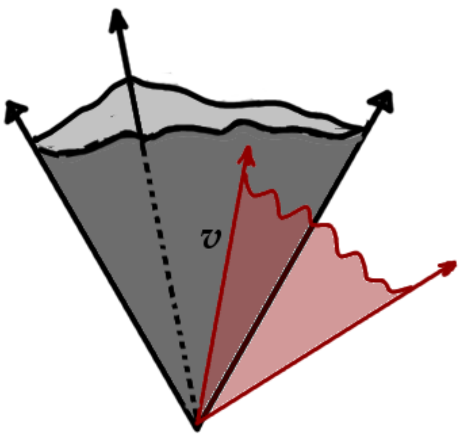

Рис. 1. Сломанный веер. Вектор v лежит на границе конусов, но для нас он внутренний, потому как он "ломает" веер.

Пример 1. *Пусть $m = 2$, $n = 1$. Рассмотрим $\mathcal{K} = \{\bullet\,, \bullet\}$, $a_1 = a_2 = (1)$. Имеем 2 конуса σ_1 и σ_2, а $\tau = \{0\}$ — их общая грань. Очевидно, что*

$A_{\sigma_1} = A_{\sigma_2} = \mathbb{C}[\,t\,]$, $A_\tau = \mathbb{C}[\,t, t^{-1}\,]$. Таким образом, склеивая $V_{\sigma_1} \cong \mathbb{C}$ и $V_{\sigma_2} \cong \mathbb{C}$ вдоль $V_\tau \cong \mathbb{C}^\times$, получаем $\mathbb{C}$ с двумя нулями, где и нарушается хаусдорфовость. Однако, взяв $a_2 = (-1)$, мы починим наш сломанный веер. Тогда $A_{\sigma_2} = \mathbb{C}[\,t^{-1}\,]$, и результатом склейки V_{σ_1} с V_{σ_2} будет $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю Тарасу Евгеньевичу Панову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

1. СВЯЗЬ МЕЖДУ ВЕЕРАМИ И ТОРИЧЕСКИМИ МНОГООБРАЗИЯМИ

Итак, наша цель — показать, что при сопоставлении вееру торического многообразия действительно важно взаимное расположение конусов, а именно любые 2 конуса должны пересекаться только по общей грани. Доказательство этого факта будет проведено двумя способами. Действовать мы будем от противного, то есть стартовать со сломанного веера и доказывать нехаусдорфовость получаемого из него объекта.

Будем доказывать следующий эквивалентный гипотезе 1 факт:

Теорема 1.1. *Пусть 2 конуса σ_1 и σ_2 имеют общую грань τ, а также общую внутреннюю точку. Тогда после склеивания многообразий V_{σ_1} и V_{σ_2} вдоль V_τ полученный объект будет нехаусдорфовым.*

Доказательство. Рассмотри двойственные к σ_1 и σ_2 конуса: σ_1^* и σ_2^*. Они лежат в n-мерном $N^*_{\mathbb{R}}$. Посмотрим на соответствующие полугруппы. Пусть S_{σ_1} порождается набором из k_1 точек, лежащих в N^*: $(\lambda_1^1, \ldots, \lambda_1^n), \ldots, (\lambda_{k_1}^1, \ldots, \lambda_{k_1}^n)$, а S_{σ_2} — точками $(\mu_1^1, \ldots, \mu_1^n), \ldots, (\mu_{k_2}^1, \ldots, \mu_{k_2}^n)$. Тогда соответствующие алгебры функций имеют вид:

$$A_{\sigma_1} = \mathbb{C}[\,x_1^{\lambda_1^1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_1^n}, \ldots, x_1^{\lambda_{k_1}^1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_{k_1}^n}\,]$$
$$A_{\sigma_2} = \mathbb{C}[\,x_1^{\mu_1^1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\mu_1^n}, \ldots, x_1^{\mu_{k_2}^1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\mu_{k_2}^n}\,]$$

Пусть $v = (v^1, \ldots, v^n)$ — общая внутренняя точка конусов. Заметим, что по определению двойственного конуса $\forall \lambda \in \sigma_1^*$ выполнено $\langle \lambda, v \rangle \geqslant 0$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \lambda_i^1 v^1 + \ldots + \lambda_i^n v^n \geqslant 0, &\quad i \in \{1, \ldots, k_1\} \\ \mu_i^1 v^1 + \ldots + \mu_i^n v^n \geqslant 0, &\quad i \in \{1, \ldots, k_2\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Положим теперь $x_i = \left(\dfrac{1}{s}\right)^{v^i}$, $s \in \mathbb{N}$ и рассмотрим последовательности $t_{\sigma_1}(s) \in V_{\sigma_1}$ и $t_{\sigma_2}(s) \in V_{\sigma_2}$:

$$t_{\sigma_1}(s) = \Big((\frac{1}{s})^{v^1\lambda_1^1} \cdot \ldots \cdot (\frac{1}{s})^{v^n\lambda_1^n}, \ldots, (\frac{1}{s})^{v^1\lambda_{k_1}^1} \cdot \ldots \cdot (\frac{1}{s})^{v^n\lambda_{k_1}^n} \Big) =$$
$$= \Big((\frac{1}{s})^{v^1\lambda_1^1+\ldots+v^n\lambda_1^n}, \ldots, (\frac{1}{s})^{v^1\lambda_{k_1}^1+\ldots+v^n\lambda_{k_1}^n} \Big)$$
$$t_{\sigma_2}(s) = \Big((\frac{1}{s})^{v^1\mu_1^1} \cdot \ldots \cdot (\frac{1}{s})^{v^n\mu_1^n}, \ldots, (\frac{1}{s})^{v^1\mu_{k_2}^1} \cdot \ldots \cdot (\frac{1}{s})^{v^n\mu_{k_2}^n} \Big) =$$
$$= \Big((\frac{1}{s})^{v^1\mu_1^1+\ldots+v^n\mu_1^n}, \ldots, (\frac{1}{s})^{v^1\mu_{k_2}^1+\ldots+v^n\mu_{k_2}^n} \Big)$$

В силу (1.1) обе последовательности, очевидно, сходятся в своих многообразиях к точкам t_1 и t_2 соответственно, а на V_τ совпадают и образуют последовательность $t(s)$. Покажем, что $t(s)$ не имеет предела в V_τ.

Рассмотрим конус τ. Очевидно, его размерность меньше n. Из этого следует, что τ^* не является строго выпуклым, т.е. содержит прямую. Это, в свою очередь, означает, что S_τ содержит 2 противоположных образующих: $(\phi^1, \ldots, \phi^n)$ и $(-\phi^1, \ldots, -\phi^n)$. Причем, поскольку v не лежит в пространстве, натянутом на конус τ, имеем $v^1\phi^1 + \ldots + v^n\phi^n \neq 0$. Тогда одна из 2ух координат точки $t(s)$, $(\frac{1}{s})^{v^1\phi^1+\ldots+v^n\phi^n}$ или $(\frac{1}{s})^{-(v^1\phi^1+\ldots+v^n\phi^n)}$, будет расходиться при $s \to \infty$. Следовательно, $t(s)$ расходится в V_τ.

Таким образом, в получившемся в результате склейки пространстве мы нашли 2 различные точки t_1 и t_2, являющиеся пределом одной и той же последовательности $t(s)$, а значит, нехаусдорфовость доказана.

Теперь докажем этот же факт средствами алгебраической геометрии. Будем доказывать неотделимость полученного объекта, так как отделимость равносильна хаусдорфовости в обычной топологии.

Определение 1. *Алгебраическое многообразие X называется отделимым, если и только если $\Delta(X) \subset X \times X$ замкнуто в топологии Зарисского.*

Лемма 1.2. *Рассмотрим многообразия U и V, $U \subset V$. Тогда U замкнуто в $V \Leftrightarrow \mathbb{C}[\,V\,] \longrightarrow \mathbb{C}[\,U\,]$ сюрьективно.*

Доказательство. Замкнутость U равносильна следующему утверждению: U является множеством нулей системы функций на V, то есть U — пространство нулей некоторого идеала I в $\mathbb{C}[\,V\,]$. Это, в свою очередь, равносильно тому, что $\mathbb{C}[\,V\,] \longrightarrow \mathbb{C}[\,U\,]$ есть факторизация по I, то есть является сюрьекцией. □

Таким образом, для опровержения хаусдорфовости построенного пространства нам достаточно показать незамкнутость вложения $V_\tau \longrightarrow V_{\sigma_1} \times V_{\sigma_2}$. А это, по лемме, равносильно тому, что $A_{\sigma_1} \otimes A_{\sigma_2} \longrightarrow A_\tau$ несюрьективно, что мы сейчас и докажем.

Заметим, что несюрьективность $A_{\sigma_1} \otimes A_{\sigma_2} \longrightarrow A_\tau$, очевидно, равносильна несюрьективности $S_{\sigma_1} \oplus S_{\sigma_2} \longrightarrow S_\tau$. Таким образом, достаточно доказать, что, объединив порождающие элементы полугрупп S_{σ_1} и S_{σ_2}, мы не сможем породить S_τ.

Рассмотрим v — общую внутреннюю точку конусов. Проведем в $N_\mathbb{R}$ через 0 гиперплоскость, перпендикулярную v. Она разделит точки решетки N

на 2 полугруппы: $N_+ = \{u \in N,\ \langle u, v\rangle \geqslant 0\}$ и $N_- = \{u \in N,\ \langle u, v\rangle < 0\}$. Очевидно, что S_{σ_1} и S_{σ_2} лежат в N_+, а значит, $N_- \cap (S_{\sigma_1} \oplus S_{\sigma_2}) = \varnothing$. Посмотрим теперь на элементы полугруппы S_τ. Она содержит в том числе все точки u, попавшие в ортогональное дополнение к пространству W_τ, натянутому на τ. Но $v \notin W_\tau$, откуда следует, что $W_\tau^\perp \cap N_- \neq \varnothing$. Значит, $S_\tau \cap N_- \neq \varnothing$, т.е. S_τ не порождается полугруппами S_{σ_1} и S_{σ_2}.

□

2. ВЕЩЕСТВЕННАЯ КОНСТРУКЦИЯ

В [**1**, ch. 5] указан еще один способ строить торическое многообразие по вееру Σ, дающий тот же результат, что и склейка конусов вдоль общих граней.

Определим группу $G = G(\Sigma)$:

$$G = \Big\{(z_1, \ldots, z_m) \in (\mathbb{C}^\times)^m : \prod_{i=1}^{m} z_i^{\langle \mathbf{u}, \mathbf{a}_i\rangle} = 1 \text{ для всех } \mathbf{u} \in N^*\Big\}.$$

Теперь рассмотрим конус $\sigma \in \Sigma$, пусть его ребра порождены набором из k векторов $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$. Положим $g(\sigma) = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset [m] = \{1, \ldots, m\}$ и рассмотрим моном $z^{\hat\sigma} = \prod_{j \notin g(\sigma)} z_j$. Введем аффинное многообразие

$$Z(\Sigma) = \big\{z \in \mathbb{C}^m : z^{\hat\sigma} = 0 \text{ для всех } \sigma \in \Sigma\big\}$$

и его дополнение $U(\Sigma) = \mathbb{C}^m \setminus Z(\Sigma)$, которое является квазиаффинным многообразием. У него есть покрытие

$$U(\Sigma) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U(\sigma)$$

аффинными многообразиями

$$\begin{aligned} U(\sigma) &= \big\{z \in \mathbb{C}^m : z^{\hat\sigma} \neq 0\big\} = \\ &= \big\{z \in \mathbb{C}^m : z_j \neq 0 \text{ для } j \notin g(\sigma)\big\} = (\mathbb{C}, \mathbb{C}^\times)^{g(\sigma)}. \end{aligned}$$

Группа G действует на $U(\Sigma)$, так как $G \subset \mathbb{C}^m$ и $U(\Sigma) \subset \mathbb{C}^m$ инвариантно относительно покоординатного действия $(\mathbb{C}^\times)^m$ на $\mathbb{C}^m$.

Теорема 2.1. *Пусть веер Σ является симплициальным, и его конуса размерности 1 порождают $N_\mathbb{R}$. Тогда $V_\Sigma \cong U(\Sigma)/G$*

Мы не будем здесь приводить доказательство этого факта, его можно найти в [**1**, ch. 5]. Из доказанного ранее следует, что для сломанного веера $\Sigma_{\text{сл}}$ фактор $U(\Sigma_{\text{сл}})/G$ не является хаусдорфовым пространством.

Теперь рассмотрим вещественную конструкцию, заменив группу G на R:

$$R = \Big\{(t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m_> : \prod_{i=1}^{m} t_i^{\langle \mathbf{u}, \mathbf{a}_i\rangle} = 1 \text{ для всех } \mathbf{u} \in N^*\Big\}.$$

Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} A &: \mathbb{R}^m \longrightarrow (\mathbb{R}^m/\mathrm{Lie}R) \cong N_\mathbb{R} \\ A &: e_i \ \ \longrightarrow \ a_i \end{aligned}$$

Имеет место следующий аналог теоремы 1.1. для вещественного случая:

Теорема 2.2. *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m]$. Пусть при отображении A набор a_i вместе с $\mathcal{K}$ не образуют веер. Тогда $U(\mathcal{K})/R$ не является хаусдорфовым.*

Доказательство проводится аналогично комплексному случаю.

Список литературы

[1] В.М. Бухштабер, Т.Е. Панов. *Торические действия в топологии и комбинаторике.* Издательство МЦНМО, Москва, 2004, 272 стр.

[2] W. Fulton, *Introduction to toric varieties.* Princeton university press, Princeton, New Jersey, 1993.

[3] Igor R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry. 2. Schemes and complex manifolds.* Second edition. Translated from the 1988 Russian edition by Miles Reid. Springer-Verlag, Berlin, 1994.