Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова

Механико - математический факультет, 3 курс.
Кафедра Высшей Геометрии и Топологии

Струментов Максим Андреевич

Курсовая работа

Момент-угол-многообразия и связные суммы произведений сфер.

Научный руководитель - Тарас Евгеньевич Панов

Москва
2017 г.

1. Введение.

1.1. Постановка задачи. Описание явного вида момент-угол-многообразий является сложным вопросом. Определение, задающее естественным образом возникающие в различных разделах топологии пространства, скрывает за собой сложно устроенный объект. Нахождение гомотопического типа момент-угол-комплекса и классификация многообразия с точностью до гомео- /диффеоморфизма требует соответствующей техники.

Мотивировка для нахождения явного вида заключается в следующем — определить момент-угол-комплекс для многогранника с простой комбинаторной структурой, затем совершить некоторые операции, такие как срезка вершин, ребер, или граней, и проследить за перестройкой многообразия при этих операциях.

В работе будут представлены вычисления момент-угол-комплексов для многогранников с простейшей комбинаторной структурой, описание явной перестройки многообразий при срезке вершины у многогранника для вещественных момент-угол-комплексов $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$, описание перестройки для некоторых комплексных момент-угол-комплексов $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, и связь этих операций со связными суммами произведений сфер.

1.2. Основные определения.

Определение 1. Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m]$. Тогда комплексное момент-угол-многообразие $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ — это подпространство в единичном полидиске

$$\mathbb{D}^m = \{(z_1, ..., z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_i|^2 \leqslant 1, i = 1, ..., m\},$$

определяемое следующим образом:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\prod_{i \in I} D^2 \times \prod_{i \notin I} S^1)$$

Наряду с этим, $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ входит в следующую коммутативную диаграмму, где $cc(\mathcal{K})$ — подкомплекс куба $\mathbb{I}^m$, соответствующий $\mathcal{K}$ (см. BP, 4.1).

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} & \longrightarrow & \mathbb{D}^m \\ {\scriptstyle\rho}\big\downarrow & & {\scriptstyle\mu}\big\downarrow \\ cc(\mathcal{K}) & \longrightarrow & \mathbb{I}^m \end{array}$$

$$\mu : (z_1, ..., z_m) \mapsto (|z_1|, ..., |z_m|)$$

Определение 2. Пусть задан простой многоранник P в пространстве $\mathbb{R}^n$. A — матрица, по строкам которой записаны a_i — направляющие вектора гиперграней, b — вектор свободных членов.

$$P = P(A, b) = x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i x + b_i \geqslant 0 \rangle, i = 1, ..., m$$

Матрица $\Gamma = \{\gamma_{i,j}\}_{j=1,...,m}^{i=1,...,m-n}$ - матрица линейных зависимостей строк матрицы A. Тогда комплексное момент-угол-многообразие $\mathcal{Z}_{A,b}$ — это многообразие, задаваемое следующей системой эрмитовых квадрик в $\mathbb{C}^m$:

$$\mathcal{Z}_{A,b} = \{z \in \mathbb{C}^m : \sum_{k=1}^{m} \gamma_{i,k} |z_k|^2 = \sum_{k=1}^{m} \gamma_{i,k} b_k\}$$

Таким образом, $\mathcal{Z}_{A,b}$ является пространством, замыкающим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_{A,b} & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \\ {\scriptstyle\rho}\Big\downarrow & & {\scriptstyle\mu}\Big\downarrow \\ P & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geqslant} \end{array}$$

$$\mu : (z_1, ..., z_m) \mapsto (|z_1|, ..., |z_m|)$$

Предложение 1 (см. BP, Th. 6.2.4.)**.** *Если $\mathcal{K}$ - симплициальный комплекс, соответствующий границе двойственного к P многогранника, то $\mathcal{Z}_{A,b} \cong \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.*

Аналогичные определения и предложение верны и для вещественных момент-угол-комплексов. Приведем категорное определение момент-угол-комплекса для вещественного случая.

Определение 3. Вещественное момент-угол-многообразие $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ это подпространство в кубе

$$\mathbb{I}^m = \{(x_1, ...x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i^2 \leqslant 1, i = 1, ..., m\},$$

где $\mathcal{K}$ симплициальный комплекс на $[m]$, определяемый следующим образом:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\prod_{i \in I} D^1 \times \prod_{i \notin I} S^0)$$

Формально, в вещественном случае мы строим вложение границы двойственного многогранника в куб, затем производим некоторое количество отражений. Поэтому, вообще говоря, мы получаем объект, который не является гладким многообразием. Поэтому необходима операция сглаживания углов у куба.

Определение 4. Связные суммы многообразий.
1. Пусть M - многообразие, возможно с краем, размерности d. Тогда через M_{-k} обозначим многообразие $M \backslash \bigsqcup_1^k D^d$, т.е. M, из которого вырезано k непересекающихся открытых дисков.
2. Связная сумма многообразий. Пусть M, N - многообразия, возможно с краем, размерности d. Тогда

$$M \# N = M_{-1} \bigcup_{S^{d-1}} N_{-1}.$$

3. Связная сумма вдоль границы. Пусть M, N - многообразия с краем, размерности d. Вырежем из M и N полудиски D^d_-, выходящие на границу. Тогда

$$M \amalg N = M \backslash D^d_- \bigcup_{S^{d-1}_-} N \backslash D^d_-.$$

Для работы в гладкой категории необходимо сгладить место склейки.

Предложение 2 (см. BP, Th. 4.1.4., Th. 4.1.7.)**.** *Пусть P - простой многогранник размерности n с m гипергранями. Тогда $\mathcal{Z}_P$ - многообразие размерности $m + n, \mathcal{R}_P$ - многообразие размерности n.*

Пример 1. Здесь и далее через P_k будем обозначать k-угольник.
1. Вещественный момент-угол-комплекс для треугольника.
$\mathcal{R}_{P_3} = (D^1 \times D^1 \times S^0) \bigcup (D^1 \times S^0 \times D^1) \bigcup (S^1 \times D^1 \times D^1) = \partial(D^1 \times D^1 \times D^1) \cong S^2$
2. Если $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2$ то $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = \mathcal{R}_{\mathcal{K}_1} \times \mathcal{R}_{\mathcal{K}_2}$ и $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1} \times \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2}$, (см. BP, Pr. 4.1.3.), отсюда следует, что:

$$\mathcal{R}_{P_4} = \mathcal{R}_{pt \bigsqcup pt} \times \mathcal{R}_{pt \bigsqcup pt} = S^1 \times S^1,\ \mathcal{Z}_{P_4} = \mathcal{Z}_{pt \bigsqcup pt} \times \mathcal{Z}_{pt \bigsqcup pt} = S^3 \times S^3.$$

2. Вещественный случай.

Определение 5. Для начала введем несколько обозначений.
1. Будем говорить, что многообразие M размерности d имеет вид связной суммы произведений сфер, если

$$M \cong \#_{j=1}^{p}(S^{i_1} \times ... \times S^{i_s}), (i_r = i_r(j), s = s(j)),\ \text{причем}\ i_1 + ... + i_s = d.$$

2. Рассмотрим простой многогранник P, размерности n. Рассмотрим достаточно маленькую сферу S_{ε}^{n-1} с центром в вершине V. Она высекает на n ребрах, смежных с V, n точек. Проведем гипергрань h, проходящую через эти точки. Добавив это неравенство (т.ч. V лежит в отрицательном полупространстве относительно гиперплоскости) к системе, обозначим $\widetilde{P}$ — многогранник, задаваемый дополненной системой неравенств. Операцию перехода от многогранника P к многограннику $\widetilde{P}$ назовем операцией срезки вершины V.
Ясно, что $P = \widetilde{P} \bigcup\limits_{\Delta^{n-1}} \Delta^n$.
3. Напомним, что у имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_{A,b} & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \\ {\scriptstyle\rho}\downarrow & & {\scriptstyle\mu}\downarrow \\ P & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geqslant} \end{array}$$

$$\mu : (z_1, ..., z_m) \mapsto (|z_1|, ..., |z_m|)$$

Если $\mathcal{R}_P$ — момент-угол-многообразие, соответствующее P, то через $\widetilde{\mathcal{R}_P}$ обозначим $\mathcal{R}_P \backslash \rho^{-1}(\Delta^n)$, где $\rho^{-1}(\Delta^n)$ - прообраз срезаннго симплекса.

Лемма 1. $\mathcal{R}_{\widetilde{P}} = \partial(\widetilde{\mathcal{R}_P} \times D^1)$

► Из определения момент-угол-комплекса следует, что на грань размерности $n-r$ эффективно действует тор размернсти $m-r$. В частности, на соответствующую гипергрань F_i нетривиально действует соответствующий множитель:

$$S_1^0 \times ... \times \hat{S_i^0} \times ... \times S_m^0.$$

Более подробно эта конструкция описана в [BP. 4.1].
Таким образом, при добавлении новой гиперграни, на все пространство, кроме пробраза h, будет эффективно действовать новая S^0, которая соответствует h. Таким образом произойдет склейка двух копий многообразия по $\rho^{-1}(\partial\Delta^{n-1})$, что и описывает формула $\partial(\widetilde{\mathcal{R}_P} \times D^1)$. ■

Лемма 2. *Для произвольного простого многогранника P имеем:* $\rho^{-1}(\Delta^n) = D^n \times (S^0)^{m-n}$.

► Вершина V имеет прообраз, равный $(S^0)^{m-n} - 2^{m-n}$ точек, по соображению, которое используется в доказательстве леммы 1.
Поскольку мы взяли достаточно маленький симплекс, то его прообраз будет в точности D^n по аналогичным причинам. Итого — каждой точке прообраза V будет соответствовать шар D^n.
■

Лемма 3. *Для замкнутого, компактного многообразия $M : dim(M) = n$ имеем:* $\partial(M_{-k} \times D^1) = M \# M \# (k-1)(S^1 \times S^{n-1})$

► Для начала заметим, что по правилу Лейбница

$$\partial(M_{-k} \times D^1) = M_{-k} \cup M_{-k} \cup k(D^1 \times S^{n-1}).$$

Выделим одну из k трубок $D^1 \times S^{n-1}$. Тогда про остальные можно считать, что граница этой трубки, состоящая из двух сфер S^{n-1}, лежит в некотором выделенном диске в $M \# M$. Каждый такой объект (трубка, приклеенная к диску) диффеоморфен $(S^1 \times S^{n-1})_{-1}$, из чего получаем требуемую формулу. ■

Теорема 1. *Пусть P — простой многогранник размерности n с m гипергранями. Тогда после срезки вершины имеем:*

$$\mathcal{R}_{\widetilde{P}} = \mathcal{R}_P \# \mathcal{R}_P \# (2^{m-n} - 1)(S^1 \times S^{n-1})$$

► По леммам 1 – 3, имеем

$$\mathcal{R}_{\widetilde{P}} = \partial(\widetilde{\mathcal{R}_P} \times D^1) = \partial(\mathcal{R}_{P_{-2^{m-n}}} \times D^1) = \mathcal{R}_P \# \mathcal{R}_P \# (2^{m-n} - 1)(S^1 \times S^{n-1}),$$

что и требовалось. ■

Следствие 1. *Если для некоторого многогранника вещественный момент-угол-комплекс имел вид связной суммы произведений сфер, то для любого числа примененных к нему операций срезок вершин соответствующее вещественное момент-угол-многообразие также будет иметь вид связной суммы произведений сфер.*
Кроме того, не увеличится число сфер в наибольшем по мощности связном слагаемом.

Следствие 2. *Для многоугольников имеем:*

$$\mathcal{R}_{P_n} = \#(1 + 2^{n-3}(n-4))(S^1 \times S^1).$$

► Из теоремы 1 имеем: $\mathcal{R}_{P_{n+1}} = \mathcal{R}_{P_n} \# \mathcal{R}_{P_n} \# (2^{n-2} - 1)(S^1 \times S^1)$.
Отсюда имеем рекуррентную формулу на число произведений сфер в связной сумме: $K_{n+1} = 2K_n + 2^{n-2} - 1, K_4 = 1$; Непосредственная проверка показывает, что формула из формулировки является решением. В силу единственности решения данного рекуррентного уравнения получаем требуемое. ■

3. Комплексный случай.

В данном разделе мы будем пользоваться обозначениями, которые аналогичны введеным ранее.

Лемма 4. $\mathcal{Z}_{\widetilde{P}} = \partial(\widetilde{\mathcal{Z}_P} \times D^2)$

► Доказательство аналогично доказательству леммы 1, при этом повышается размерность у диска и сферы. ■

Лемма 5. *Для произвольного простого многогранника P имеем: $\rho^{-1}(\Delta^n) = D^{2n} \times (S^1)^{m-n}$.*

► Вершина имеет прообраз равный $(S^1)^{m-n}$, из описания действия тора. Поскольку мы взяли достаточно маленький симплекс, то его прообраз является полидиском D^{2n}. ■

Лемма 6. *Если M — замкнутое многообразие, N - многообразие с краем, то*

$$\partial((M\#N) \times D^2) \cong \partial(M_{-1} \times D^2)\#\partial(N \times D^2);$$

► Докажем, что в указанных ограничениях на M и N имеет место диффеоморфизм

$$M\#N \cong M_{-1} \amalg N.$$

Рассмотрим $S^{n-1} \times D^1$ — трубку, реализующую связную сумму. Рассмотрим $S^{n-1} \times \{1/2\}$. Сделаем разрез от $\partial(N)$ до этой сферы, и сгладим это преобразование. Далее, разрезание по оставшемуся куску указанной ранее сферы даст нам требуемое равенство.
Кроме того заметим, что для многообразий с границей:

$$(M \amalg N) \times D^k) = (M \times D^k) \amalg (N \times D^k)$$

Отсюда получаем, что

$$\partial((M\#N) \times D^2) = \partial((M_{-1} \amalg N) \times D^2) =$$

$$= \partial((M_{-1} \times D^2) \amalg (N \times D^2)) = \partial(M_{-1} \times D^2)\#\partial(N \times D^2),$$

что и требовалось доказать. ■

Лемма 7 (см. GdM, Th. A2.3.). *Пусть имеется вложение $(S^1)^k$ в S^n, где $2k < n$. Положим*

$$\mathcal{A} = (S^n \backslash (S^1)^k \times D^{n-k}).$$

Тогда

$$\mathcal{A} \times D^1 \cong \coprod_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (S^{n-j-1} \times D^{j+2}),$$

$$\partial(\mathcal{A} \times D^2) \cong \#_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (S^{n-j-1} \times S^{j+2}).$$

Теорема 2 (GdM). *Пусть P - простой многогранник размерности n с m гипергранями. Тогда, при условии $n < 3m$, после срезки вершины имеем:*

$$\mathcal{Z}_{\widetilde{P}} = \partial((\mathcal{Z}_P)_{-1} \times D^2)\#_{j=1}^{m-n} \binom{m-n}{j} (S^{m+n-j-1} \times S^{j+2})).$$

► Поместим образ утолщенного тора,

$$\rho^{-1}(\Delta^n) = D^{2n} \times (S^1)^{m-n},$$

описанного в лемме 5, в диск D^{m+n} — можно сделать, в силу односвязности момент-угол-многообразия. [BP, Pr. 4.3.5.]
Тогда имеем следующую связную сумму:

$$\widetilde{\mathcal{Z}_P} = \mathcal{Z}_P \# \mathcal{A},$$

где $\mathcal{A}$ - описано в лемме 6.
Далее, по леммам 4, 5, 7 имеем слудующие равенства:

$$\mathcal{Z}_{\widetilde{P}} = \partial((\mathcal{Z}_P \# \mathcal{A}) \times D^2) = \partial(\mathcal{Z}_{P\,-1} \times D^2) \# \partial(\mathcal{A} \times D^2) =$$

$$= \partial(\mathcal{Z}_{P\,-1} \times D^2) \#_{j=1}^{m-n} \binom{m-n}{j} (S^{m+n-j-1} \times S^{j+2}),$$

что и требовалось. ■

Лемма 8 (Fico's lemma. см. GdM, Le.1)**.** *Имеют место следующие диффеоморфизмы.*
1. Если M и N связные многообразия, то

$$\partial((M \# N)_{-1} \times D^2) \cong \partial(M_{-1} \times D^2) \# \partial(N_{-1} \times D^2).$$

2. S^p, S^q — сферы соответствующей размерности, тогда:

$$\partial((S^p \times S^q)_{-1} \times D^2) \cong (S^{p+1} \times S^q) \# (S^p \times S^{q+1}).$$

Пример 2. Момент-угол-комплекс пятиугольника.
По теореме 2 и лемме 2.5 имеем явный вид для $\mathcal{Z}_{P_5}$:

$$\mathcal{Z}_{P_5} = \partial((S^3 \times S^3)_{-1} \times D^2) \# 2(S^4 \times S^3) \# 1(S^3 \times S^4) = \#5(S^3 \times S^4).$$

Пример 3. Поскольку $5 < 3{\times}2 = 6$, то теорема 2 позволяет посчитать момент-угол-комплекс для шестиугольника.

$$\mathcal{Z}_{P_6} = \partial((5(S^3 \times S^4)_{-1}) \times D^2) \# 3(S^5 \times S^3) \# 3(S^4 \times S^4) \# 1(S^3 \times S^5) =$$

$$= 5((S^3 \times S^5) \# (S^4 \times S^4)) \# 3(S^5 \times S^3) \# 3(S^4 \times S^4) \# 1(S^3 \times S^5) =$$

$$= 9(S^3 \times S^5) \# 8(S^4 \times S^4).$$

4. О когомологиях.

Будем работать с момент-угол-многообразиями, имеющими вид связной суммы произведений сфер. Ответим на следующий вопрос — когда срезка вершины не выводит нас за пределы этого класса.

Определение 6. Будем называть M-ядром многообразие вида $\partial(M_{-1} \times D^2)$, где M — многообразие без края.

Теорема 3. *Пусть P - простой многогранник размерности n с m гипергранями. Тогда, при условии $n < 3m$, если момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_P$ имел вид связной суммы произведений сфер, то $\mathcal{Z}_{\widetilde{P}}$ — имеет вид связной суммы произведения сфер тогда и только тогда, когда количество сфер-множителей в каждом связном слагаемом $\mathcal{Z}_P$ не превосходит двух.*

▶ **Достаточность.** Если момент-угол-многообразие имеет требуемый вид, тогда по лемме 8 нужно проверить только для связных слагаемых. Для них все верно по лемме Фико, если это связное слагаемое, состоящее из двух сфер, и очевидному тождеству $M\#S^n \cong M$ для одной сферы.

Необходимость. Пусть момент-угол-комплекс имел вид связной суммы произведения сфер, в которое входит слагаемое, в котором множителей больше двух. Необходимо доказать, что новое после срезки вершины момент-угол-многообразие не имеет требуемый вид.

Разобьем доказательство на шаги.

Шаг 1. Сначала сведем доказательство к доказательству для одного слагаемого, имеющего вид произведения сфер.

По теореме 2:

$$\mathcal{Z}_{\widetilde{P}} = \partial((\mathcal{Z}_P)_{-1} \times D^2)\#_{j=1}^{m-n}\binom{m-n}{j}(S^{m+n-j-1} \times S^{j+2})).$$

Добавка к связной сумме некоторого количества произведений сфер не выводит нас за пределы класса. Кроме того появляется $\mathcal{Z}_P$-ядро, как связное слагаемое.

По лемме 8:

$$\partial((M\#N)_{-1} \times D^2) \cong \partial(M_{-1} \times D^2)\#\partial(N_{-1} \times D^2),$$

по предположению $\mathcal{Z}_P$ — имело вид связной суммы, значи, для доказательства непредставимости разложения в связную сумму сфер достаточно доказать непредставимость для одного связного слагаемого.

Рассмотрим $S^{p_1} \times ... \times S^{p_k}$-ядро. Докажем что оно непредставимо в виде связной суммы произведений сфер. Так как мы предположили противное, $k \geqslant 3$. Здесь и далее $p_1 + ... + p_k = n$.

Шаг 2. Описание кольца когомологий $S^{p_1} \times ... \times S^{p_k}$-ядра.

Рассмотрим

$$\partial((S^{p_1} \times ... \times S^{p_k})_{-1} \times D^2) \cong (S^{p_1} \times ... \times S^{p_k})_{-1} \times S^1 \bigcup S^{p_1+...+p_k-1} \times D^2.$$

Кольцо когомологий будет иметь по одной образующей, порожденной клеткой, соответствующей произведению вида

$$\{S^{p_{i_1}} \times ... \times S^{p_{i_s}}, p_{i_1} \leq ... \leq p_{i_s}\}, \text{при } i_r \in \{1, p_1, ..., p_k\},$$

за исключением двух.

Не будет класса, порожденного S^1, поскольку в вроизведение $(S^{p_1}\times...\times S^{p_k})_{-1}\times S^1$ вклеивается $S^{p_1+...+p_k-1} \times D^2$. Также будет отсутствовать порождающая, соответствующая произведению

$$S^{p_1} \times ... \times S^{p_k},$$

поскольку имеет место гомотопическая эквивалентность:

$$(S^{p_1} \times ... \times S^{p_k})_{-1} = sk^n(S^{p_1} \times ... \times S^{p_k})_{-1} \simeq sk^{n-1}(S^{p_1} \times ... \times S^{p_k}).$$

Значит, из отсутствия клеток размерности n и гомотопической инвариантности когомологий следует их тривиальность в размерности n.

Умножение устроено как умножение в клетках, то есть два элемента имеют нетривиальное произведение тогда и только тогда, когда множество сфер, породившее соответствующие им клетки не пересекаются.

Шаг 3. Кольцо когомологий связной суммы произведения сфер.

Для связной суммы $M\#N$, где M, N - связные суммы произведений сфер, выполнено:

$$H^i(M\#N) = H^i(M) \oplus H^i(N), i \in \{1, ..., n-1\},$$
$$H^i(M\#N) = \mathbb{Z}, i \in \{0, n\}.$$

Это следует из когомологической последовательности Майера-Виеториса

$$... \longrightarrow H^i(M\#N) \longrightarrow H^i(M_{-1}) \oplus H^i(N_{-1}) \longrightarrow H^i(S^{n-1}) \longrightarrow H^{i-1}(M\#N) \longrightarrow ...$$

Для произведения сфер:

$$H^i(S^{p_1} \times ... \times S^{p_k}) \cong \mathbb{Z}^{\#\{p_{i_1} \leq ... \leq p_{i_s} : p_{i_1} + ... + p_{i_s} = i\}}$$

— из изоморфизма в когомологиях для $\times$-умножения (см П-2, Теор. 6.9.).
Нетривиальные произведения получаются только из образующих, сферы которых которых лежат в одном связном слагаемом.
Шаг 4. Попытаемя подобрать связную сумму сфер с необходимым кольцом когомологий.
Допустим что $(S^{p_1} \times ... \times S^{p_k})$-ядро раскладывается в связную сумму необходимого вида.
Рассмотрим идеал $\mathcal{I}$ в кольце когомологий ядра, образованный всеми нефакторизуемыми порождающими. Эти образующие — $\{e^{p_1}, ..., e^{p_k}, se^{p_1}, ..., se^{p_k}\}$. Аналогично определим идеал $\mathcal{J}$ — для связной суммы произведения сфер, которая, по предположению является разложением $S^{p_1} \times ... \times S^{p_k}$-ядра. Заметим что для нашего ядра

$$\mathcal{I}^{k+1}/\mathcal{I}^k = 0, \, \mathcal{I}^k/\mathcal{I}^{k-1} \neq 0$$

Из устройства колец когомологий видно, что для наличия изоморфизма необходимо, чтобы в связной сумме присутствовало слагаемое, в котором есть произведение ровно k сфер. Поскольку, если у максимального по числу сфер слагаемого их меньше, чем k, то $\mathcal{J}^k/\mathcal{J}^{k-1} = 0$. Если больше, то $\mathcal{J}^{k+1}/\mathcal{J}^k \neq 0$.
Из соображений размерности мы должны взять в качестве сфер-множителей этого слагаемого сферы, которые будут соотвестствовать следующему набору образующих в $\mathcal{I}$:

$$\{e^{p_1}, ..., e^{\hat{p}_j}, ..., e^{p_k}, se^{p_j}\}$$

Значит все остальные образующие имеют сфер - представителей в других связных слагаемых. Поскольку сфер в ядре больше двух по предположению, то будут существовать образующие из разных связных слагаемых, имеющие нетривиальное произведение. Противоречие. ∎

Замечание 1. *К сожалению, не известно ни одного примера, когда комплексное момент-угол-многообразие многогранника является связной суммой произведений сфер, более чем с одним слагаемым, являющимся произведением хотя бы трех сфер.*
Примерами многогранников, для которых момент-угол-комплексы имеют вид произведения любого числа сфер, являются кубы соответствующей размерности.

Список литературы

[1] Buchstaber V.M.; Panov T.E. *Toric Topology.* Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[2] Gitler S.; Lopez de Medrano S. *Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums.* Geom. Topol.**17** (2013), no. 3, 1497-1534.

[3] Фоменко А.Т.; Фукс Д.Б.; Гутенмахер В.Л. *Гомотопическая топология.* Издательство Московского Университета, 1969.

[4] Панов Т.Е.; *Топология - 2.* Курс лекций, версия от 20 декабря 2015.