Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова

Механико - математический факультет, 4 курс.
Кафедра Высшей Геометрии и Топологии

Струментов Максим Андреевич
Курсовая работа

Собственные действия групп и вещественные момент-угол-многообразия.

Научный руководитель - Тарас Евгеньевич Панов

Москва
2018 г.

1. Наборы векторов и действия

Пусть $V \cong \mathbb{R}^k$ - есть k-мерное векторное вещественное пространсиво, и $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ последовательность (*конфигурация*) m векторов в двойственном пространстве V^*. Повторения векторов в наборе $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ допустимы, но предполагаем, что их выпуклая оболочка порождает все пространство V^*. Рассмотрим действие V на $\mathbb{R}^m$ заданное следующим образом.

$$
\begin{aligned}
&V \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \\
&(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) \mapsto \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} = \left(e^{\langle \gamma_1, \boldsymbol{v} \rangle} x_1, \ldots, e^{\langle \gamma_m, \boldsymbol{v} \rangle} x_m\right).
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

Это классический пример динамической системы, восходящей к работам Пуанкаре. Есть хорошо известная связь между линейными свойствами набора векторов Γ и топологии слоения $\mathbb{R}^m$ на орбиты действия (1.1) и их фактор-пространством (*пространством листов*). В работе будут систематизированы и описаны имеющиеся знания об этой связи и будет изучена топология пространства листов методами торической топологии.

2. Невырожденные уровни

Рассмотрим подмножество $U \subset \mathbb{R}^m$, такое, что ограничение действия (1.1) на него - свободно.

Предложение 1. *Орбита $V\boldsymbol{x}$ точки $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ под действием (1.1) свободна тогда и только тогда, когда линейная оболочка подмножества $\{\gamma_i \colon x_i \neq 0\} \subseteq \Gamma$ порождает все пространство V^*.*

Доказательство. От противного, пусть $V\boldsymbol{x}$ не является свободной, то есть существует вектор $\boldsymbol{v} \neq 0$ такой, что

$$(x_1 e^{\langle \gamma_1, \boldsymbol{v} \rangle}, \ldots, x_m e^{\langle \gamma_m, \boldsymbol{v} \rangle}) = (x_1, \ldots, x_m).$$

Тогда $\langle \gamma_i, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ для $x_i \neq 0$, что означает, что векторы γ_i, для которых $x_i \neq 0$ не порождают V^*.

Обратно, если $\{\gamma_i \colon x_i \neq 0\} \subseteq \Gamma$ не порождает все пространство V^*, тогда существует вектор $\boldsymbol{v} \neq 0$ такой, что $\langle \gamma_i, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ для $x_i \neq 0$, отсюда орбита $V\boldsymbol{x}$ не является свободной. □

Введем следующие обозначения. Пусть $[m] = \{1, \ldots, m\}$, рассмотрим подмножество $I = \{i_1, \ldots, i_p\} \subseteq [m]$. Для каждого I отпределим

$$\Gamma_I := \{\gamma_i \colon i \in I\} \subseteq \Gamma.$$

Пусть $\widehat{I} := [m] \setminus I$ дополнение к множеству. Положим

$$\mathcal{K}(\Gamma) = \{I \subseteq [m] \colon \Gamma_{\widehat{I}} \text{ порождают } V^*\}.$$

Симплициальный комплекс на $[m]$ это набор $\mathcal{K}$ подмножеств $[m]$ такой, что для каждого $I \in \mathcal{K}$ все подмножества I также принадлежат $\mathcal{K}$. Будем называть $I \in \mathcal{K}$ *симплексом* (или *гранью*) $\mathcal{K}$. Здесь и далее считаем, что $\varnothing$ содержится в $\mathcal{K}$. Не подразумевается, что $\mathcal{K}$ содержит все одноэлементные множества $\{i\}$. Будем называть $\{i\} \in \mathcal{K}$ *вершиной*, а $\{i\} \notin \mathcal{K}$ *призрачной вершиной*. Симплициальный комплекс называется *чистым* если все его максимальные грани имеют одинаковую размерность.

Предложение 2. $\mathcal{K}(\Gamma)$ *чистый симплициальный комплекс размерности* $m - k - 1$.

Доказательство. Если $\Gamma_{\widehat{I}}$ порождает V^*, то $\Gamma_{\widehat{J}} \supset \Gamma_{\widehat{I}}$ для любого $J \subset I$. Следовательно, $\mathcal{K}(\Gamma)$ является симплициальным комплексом. Если $\Gamma_{\widehat{I}}$ порождает V^*, значит он содержит базис V^*. Пусть этот базис есть $\Gamma_{\widehat{L}}$ для некоторого L такого что $I \subset L$ и $|L| = m - |\Gamma_{\widehat{L}}| = m - k$. Отсюда следует, что $\mathcal{K}(\Gamma)$ чистый и размерности $(m-k-1)$. □

Сопоставим симплициальному комплексу $\mathcal{K}$ на $[m]$, подмножество в $\mathbb{R}^m$, являющееся дополнением до некотрый координатных подпространствю:

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^m \setminus \bigcup_{\{i_1,\dots,i_p\} \notin \mathcal{K}} \{\boldsymbol{x}\colon x_{i_1} = \dots = x_{i_p} = 0\}. \tag{2.1}$$

Понятно, что дополнение до любого набора координатных подпространств реализуется на некотором $\mathcal{K}$. Например $\mathcal{K} = \{\varnothing\}$, получим $U(\mathcal{K}) = (\mathbb{R}^\times)^m$, где $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, и если $\mathcal{K}$ содержит все собственные подмножества $[m]$, то $U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Предложение 3. *Ограничение действия* (1.1) *на* $U(\mathcal{K})$ *свободно тогда и только тогда, когда* $\mathcal{K}$ *– симплициальный подкомплекс в комплексе* $\mathcal{K}(\Gamma)$.

Доказательство. Возьмем любую $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_m) \in U(\mathcal{K})$. Положим $I := \{i\colon x_i = 0\} \in \mathcal{K}$. Для $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}(\Gamma)$, рассмотрим $\Gamma_{\widehat{I}} = \{\gamma_i\colon x_i \neq 0\}$ порождающую V^*. Тогда орбита $V\boldsymbol{x}$ свободна по Предложению 1.

Обратно - ограничение действия свободно, значит $\Gamma_{\widehat{I}} = \{\gamma_i\colon x_i \neq 0\}$ порождает V^*, следовательно $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}(\Gamma)$ по определению $\mathcal{K}(\Gamma)$. □

3. Двойственность Гейла

Когфигурация Γ определяет линейное отображение $\mathit{\Gamma}\colon \mathbb{R}^m \to V^*$, которое переводит i-й стандартный вектор $\boldsymbol{e}_i$ в γ_i. Положим $W := \operatorname{Ker} \mathit{\Gamma}$, тогда имеет место точная последовательность:

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow \mathbb{R}^m \xrightarrow{\mathit{\Gamma}} V^* \longrightarrow 0.$$

Так как Γ порождает V^*, пространство W^* имеет размерность $n := m - k$. Рассмотрим двойственную последовательность:

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{\mathit{\Gamma}^*} (\mathbb{R}^m)^* \xrightarrow{A} W^* \longrightarrow 0,$$

где отображение $\mathit{\Gamma}^*$ таково, что $\boldsymbol{v}$ отображается в $(\langle\gamma_1, \boldsymbol{v}\rangle, \dots, \langle\gamma_m, \boldsymbol{v}\rangle)$.

Положим $\boldsymbol{a}_i := A(\boldsymbol{e}_i)$. Конфигурацию векторов $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m\}$ в W^* будем называть (линейной) *двойственной по Гейлу*, (или *преобразованием Гейла*), к конфигурации $\Gamma = \{\gamma_1,\dots,\gamma_m\}$. Заметим, что Γ является двойственной по Гейлу к A.

После выбора базиса в V и W, получим $\mathit{\Gamma}$ определяется $k \times m$-матрицей, с вектор-столбцами $\gamma_1,\dots,\gamma_m$ и A, являющаяся $n \times m$-матрицей с вектор-столбцами $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m$. По определению $A\mathit{\Gamma}^* = 0$, то есть по строкам матрицы A записан базис в пространстве линейных зависимостей между $\gamma_1,\dots,\gamma_m$.

Предложение 4. *Для любого* $I \subseteq [m]$, *вектора в* A_I *линейно независимы в* W^* *тогда и только тогда, когда* $\Gamma_{\widehat{I}}$ *порождают* V^*.

Доказательство. По двойственности, γ_j - суть j-й векторный коэфициент линейной зависимости между $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m$. Если вектора $\boldsymbol{a}_i$, $i \in I$, линейно независимы, тогда в любом линейном соотношении между $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m$ есть ненулевой коэффициент для некоторого $j \in \widehat{I}$. Следовательно, линейная функция

γ_j, $j \in \widehat{I}$, порождает V^*. Обратно, если есть линейная зависимость между $\boldsymbol{a}_i$, $i \in I$, то для каждого $j \in \widehat{I}$ j-й коэффициент функции γ_j входит в данное соотношение. Следовательно, $\{\gamma_j,\, j \in \widehat{I}\}$, не порождает V^*. □

4. Полиэдральные конусы и веера

В этом разделе перечислим необходимые факты о веерах и конусах. Более побробную информацию можно найти в [F, Раздел 1] and [CLS, Разделы 1 и 3].

Подмножество σ вещественного линейного пространства L называется *выпуклым полиэдральным конусом*, или просто *конусом*, если оно образовано всеми неотрицательными линейными комбинациями набора векторов $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ в L. Обозначение

$$\sigma = \operatorname{cone}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{v}_i,\ \lambda_i \geq 0$$

Множество векторов может быть пусто, и в этом случае $\operatorname{cone}(\varnothing) = \mathbf{0}$. Размерностью конуса σ называется разерность его выпуклой оболочки.

Множество образующих конуса σ это множество векторов $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ таких что $\sigma = \operatorname{cone}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$. Минимальное по включению множество образующих опеделено единственным способом, с точностью до умножения векторов на положительные константы. Конус называется *симплициальным*, если его минимальное порождающее множество линейно независимо.

Опорной гипергранью полиэдрального конуса $\sigma \subseteq L$ называется гиперплоскость H такая, что σ содержится в одном из замкнутых полупространств, ограниченных H. *Грань* конуса σ Это пересечение σ с опорной гипергранью. Также будем считать, что σ грань сама себя; грани, отличные от σ называются *собственными*. Дополнение ко всем собственным граням в σ называется *внутренностью* σ и обозначается $\operatorname{relint}\sigma$; можно показать, что она совпадает со внутренностью σ как линейной оболочки. Заметим, что $\operatorname{relint}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Обозначим $H_{\boldsymbol{u}} := \{\boldsymbol{l} \in L \colon \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{l}\rangle = 0\}$ гиперплоскость, определенная ненулевым вектором $\boldsymbol{u} \in L^*$, и обозначим $H^+_{\boldsymbol{u}}$ и $H^-_{\boldsymbol{u}}$ порожденные ей замкнутые полупространства. Иногда будем считать $\boldsymbol{u}$ нулевым, и в этом случае $H_{\boldsymbol{u}}$ это все пространство L, а не гиперплоскость.

Предложение 5. *Если $\sigma = \operatorname{cone}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$ конус в L, то $\boldsymbol{v} \in \operatorname{relint}\sigma$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ для некоторых положительных $\lambda_i \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Случай $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ очевиден, так что предположим, что $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$.

Пусть $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ с $\lambda_i > 0$. Предположим $\boldsymbol{v} \notin \operatorname{relint}\sigma$. Тогда $\boldsymbol{v}$ определяет собственную грань конуса τ в σ, то есть существует опорная гиперплоскость $H_{\boldsymbol{u}}$ с $\boldsymbol{u} \in V^*$, такая что $\sigma \subseteq H^+_{\boldsymbol{u}}$ и $\boldsymbol{v} \in H_{\boldsymbol{u}} \cap \sigma = \tau$. Следовательно, $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$. С другой стороны, $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_i\rangle > 0$, поскольку каждый $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_i\rangle$ неотрицателен и $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_i\rangle > 0$ по крайней мере для одного i если τ является собственной гранью. Противоречие.

Теперь пусть $\boldsymbol{v} \in \operatorname{relint}\sigma$. Легко заметить, что для любого $\boldsymbol{v}' \in \sigma$ существует $\boldsymbol{v}'' \in \sigma$ такой, что $\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}'' = \mu \boldsymbol{v}$ для некоторого $\mu > 0$. Положив $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}_i$ получаем $\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}''_i = \mu_i \boldsymbol{v}$ для $\boldsymbol{v}''_i \in \sigma$ и $\mu_i > 0$. Распишем каждый $\boldsymbol{v}''_i$ как невырожденную линейную комбинацию $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ и просуммировав по всем i имеем $\sum_{i=1}^{p} \nu_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \boldsymbol{v}$ для некоторого $\nu_i > 0$. что и требовалось. □

Лемма 1 (Лемма об отделимости)**.** *Пусть σ_1 и σ_2 из V. Тогда, если они различны, то следующие условия эквивалентны:*

(a) *пересечение* σ_1 *и* σ_2 *- грань каждого из конусов;*
(b) *конуса* σ_1 *и* σ_2 *отделимы гиперплоскостью, то есть существует гиперплоскость* H*, такая что*

$$\sigma_1 \subseteq H^+, \quad \sigma_2 \subseteq H^- \quad \textit{and} \quad H \cap \sigma_1 = H \cap \sigma_2 = \sigma_1 \cap \sigma_2.$$

Данный факт оставим без доказательства, сославшись на [F, §1.2] or [CLS, Лемма 1.2.13].

Веером называется конечный набор конусов $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ в L такой, что каждая грань конуса из Σ лежит в Σ, и пересечение любых двух конусов лежит в Σ. Будем рассматривать только *симплициальные* веера, то есть веера, составленные из симплициальных конусов.

Вернемся к рассмотрению наборов векторов в V^* и W^*. Пусть Σ симплициальный веер в W^*, а $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$ порождающие одномерных конусов в Σ. *Порождающим симплициальным комплексом* $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma$ называется набор подмножеств $I \subseteq [m]$ Такой что $\{\boldsymbol{a}_i : i \in I\}$ порождают конус в Σ.

Таким образом симплициальный веер Σ может быть определен из двух следующих объектов:

- симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на $[m]$;
- набор векторов $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$ в W^* такой, что для любого $I \in \mathcal{K}$ подмножество $\mathrm{A}_I = \{\boldsymbol{a}_i : i \in I\}$ линейно независимо.

Обратно, если дан симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ и набор векторов A, мы можем определить симплициальный конус $\sigma_I = \mathrm{cone}(\mathrm{A}_I)$ для каждого $I \in \mathcal{K}$. 'Пучок конусов' $\{\sigma_I : I \in \mathcal{K}\}$ является веером Σ если любые два конуса σ_I и σ_J пересекаются по собственной грани (которая соответствует $\sigma_{I \cap J}$). В связи с этим, будем говорить, что данные $\{\mathcal{K}, \mathrm{A}\}$ *определяют веер* Σ.

Имеет место следующий критерий, сформулированный исключительно в терминах векторных конфигураций.

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{K}$ *симплициальный комплекс на* $[m]$*, положим* $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$ *векторная конфигурация в* W^* *такая, что для любого симплекса* $I \in \mathcal{K}$ *подмножество* A_I *линейно независимо, и* $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ *двойственная по Гейлу конфигурация. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) $\{\mathcal{K}, \mathrm{A}\}$ *определяет конус* Σ*;*
(b) $\mathrm{relint\,cone}(\mathrm{A}_I) \cap \mathrm{relint\,cone}(\mathrm{A}_J) = \varnothing$ *для любых* $I, J \in \mathcal{K}$*,* $I \neq J$*;*
(c) $\mathrm{relint\,cone}(\Gamma_{\widehat{I}}) \cap \mathrm{relint\,cone}(\Gamma_{\widehat{J}}) \neq \varnothing$ *для любых* $I, J \in \mathcal{K}$*.*

Доказательство. Импликация (a)$\Rightarrow$(b) следует из определения.

(b)$\Rightarrow$(a). Возьмем любый $I, J \in \mathcal{K}$. Покажем, что $\mathrm{cone}\,\mathrm{A}_I \cap \mathrm{cone}\,\mathrm{A}_J = \mathrm{cone}\,\mathrm{A}_{I \cap J}$. Понятно, что $\mathrm{cone}\,\mathrm{A}_{I \cap J}$ является гранью $\mathrm{cone}\,\mathrm{A}_I$ и $\mathrm{cone}\,\mathrm{A}_J$ в силу симплициальности. Рассмотрим множество $X := \mathrm{cone}\,\mathrm{A}_I \cap \mathrm{cone}\,\mathrm{A}_J$. Очевидно имеем $\mathrm{cone}\,\mathrm{A}_{I \cap J} \subseteq X$. Рассмотрим минимальную по включению грань $\mathrm{cone}\,\mathrm{A}_I$ содержащую X; в силу симплициальности, это грань $\mathrm{cone}\,\mathrm{A}_{I'}$ для некоторого $I' \subseteq I$. Аналогично $\mathrm{cone}\,\mathrm{A}_{J'}$ наименьшая по включению грань конуса $\mathrm{cone}\,\mathrm{A}_J$ содержащая X. Тогда $\mathrm{relint}\,X \subseteq \mathrm{relint\,cone}\,\mathrm{A}_{I'} \cap \mathrm{relint\,cone}\,\mathrm{A}_{J'}$. Согдасно (b), последнее пересечение пусто, кроме случая $I' = J'$. Таким образом, $I' = J'$. Значит $I' \subseteq I \cap J$, и $X \subseteq \mathrm{cone}\,\mathrm{A}_{I'} \subseteq \mathrm{cone}\,\mathrm{A}_{I \cap J}$, что и требовалось.

(c)⇒(a). Пусть $\operatorname{relint}\operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{I}}) \cap \operatorname{relint}\operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{J}}) \neq \varnothing$. По предложению 5,

$$\sum_{k\in\widehat{I}} r_i\gamma_i - \sum_{l\in\widehat{J}} s_l\gamma_l = 0 \tag{4.1}$$

для некоторых положительных r_i и s_l. Это линейная зависимость между $\gamma_1,\dots,\gamma_m$, следовательно, она определяет некоторый вектор $\boldsymbol{w}\in W$. Рассмотрим значение линейной функции $\boldsymbol{a}_i$ на нем, таким образом мы имеем:

$$\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{w}\rangle = \begin{cases} r_i - s_i, & i\in \widehat{I}\cap\widehat{J} = \widehat{I\cup J},\\ r_i, & i\in\widehat{I}\setminus\widehat{J} = J\setminus(I\cap J),\\ -s_i, & i\in \widehat{J}\setminus\widehat{I} = I\setminus(I\cap J),\\ 0, & i\in \widehat{\widehat{I}\cup\widehat{J}} = I\cap J.\end{cases} \tag{4.2}$$

Отдюда следует, что

$$\begin{aligned} &\operatorname{cone}\mathrm{A}_J\subseteq H^+_{\boldsymbol{w}}, \quad \operatorname{cone}\mathrm{A}_I\subseteq H^-_{\boldsymbol{w}}, \quad \text{и}\\ &H_{\boldsymbol{w}}\cap\operatorname{cone}\mathrm{A}_I = H_{\boldsymbol{w}}\cap\operatorname{cone}\mathrm{A}_J = \operatorname{cone}\mathrm{A}_I\cap\operatorname{cone}\mathrm{A}_J = \operatorname{cone}\mathrm{A}_{I\cap J}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

По лемме 1, мы получаем, что $\operatorname{cone}\mathrm{A}_I$ и $\operatorname{cone}\mathrm{A}_J$ пересекаются по гиперграни эля любых $I,J\in\mathcal{K}$, следовательно (a) выполнено.

(a)⇒(c). Предположим, что $\operatorname{cone}\mathrm{A}_I$ и $\operatorname{cone}\mathrm{A}_J$ пересекаются по гиперграни. По лемме 1, существует гиперплоскость $H_{\boldsymbol{w}}$, обозначим ее (4.3). Соответствующий вектор $\boldsymbol{w}\in W$ удовлетворяет (4.2) для некоторых положительных r_i, s_i. Это $\boldsymbol{w}$ дает нам линейное отношение (4.1) между $\gamma_1,\dots,\gamma_m$, откуда следует, что $\operatorname{relint}\operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{I}}) \cap \operatorname{relint}\operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{J}}) \neq \varnothing$. □

Теорема 1 следует из [ADHL, Theorem 2.2.1.14], согласно которой она верна для любых вееров (не обязательно симплициальных).

5. Свободные действия

Непрерывное действие $G\times X\to X$, $(g,x)\mapsto g\,x$ топологической группы G на топологическом пространстве X называется *собственным* если следующее отображение $h\colon G\times X\to X\times X$, $(g,x)\mapsto(g\,x,x)$ является собственным, то есть, $h^{-1}(C)$ компактен для любого компактного $C\subseteq X\times X$.

Свойство собственности является важнейшим для действий некомпактных групп Ли. Во первых, X/G под собственным действием является хаусдорфовым многообразием, что показано в [L, Proposition 21.4]. Во вторых, фактор X/G при свободном и собственном действии группы Ли на гладком многообразии есть гладкое многообразие [L, Theorem 21.10].

В нашем случае (1.1) имеем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $\Gamma=\{\gamma_1,\dots,\gamma_m\}$ набор векторов в V^*, определяющий действие* (1.1), *и $\mathrm{A}=\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m\}$ двойственная по Гейлу конфигурация векторов. Положим $\mathcal{K}$ симплициальный комплекс на $[m]$, такой что для любого $I\in\mathcal{K}$ подмножество $\Gamma_{\widehat{I}}$ порождает V^* (или, что то же самое, множество A_I линейно не зависимо). Тогда:*

1. *ограничение действия $V\times U(\mathcal{K})\to U(\mathcal{K})$ свободно;*
2. *действие $V\times U(\mathcal{K})\to U(\mathcal{K})$ собственно тогда и только тогда, когда выполнено одно из эквивалентных условий (a)–(c) теоремы 1.*

Доказательство. Первая часть утверждения - это предложение 3.

Предположим, что условие (с) теоремы 1 выполнено. Чтобы понять, что действие $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$ свободно, нужно доказать следующее: если $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ последовательность $U(\mathcal{K})$ и $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\}$ последовательность в V такие, что обе последовательности $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ и $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\cdot\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ сходятся, то сходится и последовательность $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\}$ (см. [L, Утверждение 21.5]). Перейдя к подпоследовательности, можно предположить, что каждая их последовательностей $\{\langle\gamma_i,\boldsymbol{v}^{(k)}\rangle\}$, $i = 1,\dots,m$, имеет предел в $\mathbb{R}\cup\pm\infty$. Пусть

$$I_+ = \bigl\{i\colon \lim_{k\to\infty}\langle\gamma_i,\boldsymbol{v}^{(k)}\rangle = +\infty\bigr\},\quad I_- = \bigl\{i\colon \lim_{k\to\infty}\langle\gamma_i,\boldsymbol{v}^{(k)}\rangle = -\infty\bigr\}.$$

Таким образом, обе последовательности $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$, $\{\boldsymbol{y}^{(k)} = \boldsymbol{v}^{(k)}\cdot\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ сходятся к $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in U(\mathcal{K})$ соответственно, мы имеем $x_i = 0$ для $i\in I_+$ и $y_i = 0$ для $i \in I_-$. По определению $U(\mathcal{K})$ (2.1) это включение I_+ и I_- несвязных симплексов в $\mathcal{K}$. Тогда условие (с) теоремы 1 дает следующее:

$$\operatorname{relint}\operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{I}_+})\cap\operatorname{relint}\operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{I}_-})\neq\varnothing.$$

Таким образом,

$$0=\sum_{i\in\widehat{I}_-} r_i\gamma_i-\sum_{i\in\widehat{I}_+} s_i\gamma_i=\sum_{i\in I_+} r_i\gamma_i-\sum_{i\in I_-} s_i\gamma_i+\sum_{i\notin I_+\sqcup I_-}(r_i-s_i)\gamma_i$$

для некоторых положительных r_i и s_i. Это подразумевает, что оба I_+ и I_- пусты, так как иначе цепочка равенств

$$0=\lim_{k\to\infty}\Bigl(\sum_{i\in I_+} r_i\langle\gamma_i,\boldsymbol{v}^{(k)}\rangle-\sum_{i\in I_-} s_i\langle\gamma_i,\boldsymbol{v}^{(k)}\rangle+\sum_{i\notin I_+\sqcup I_-}(r_i-s_i)\langle\gamma_i,\boldsymbol{v}^{(k)}\rangle\Bigr)=+\infty,$$

приводит к противоречию. Поэтому каждая последовательность $\{\langle\gamma_i,\boldsymbol{v}^{(k)}\rangle\}$, $i = 1,\dots,m$, имеет конечный предел. Это означает, что $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\}$ сходится к V, поскольку $\gamma_1,\dots,\gamma_m$ порождает все V^*. Таким образом, действие $V\times U(\mathcal{K})\to U(\mathcal{K})$ свободно.

Теперь предположим, что условие (b) теоремы 1 не выполнено. Тогда мы имеем

$$\operatorname{relint}\operatorname{cone}(\mathrm{A}_I)\cap\operatorname{relint}\operatorname{cone}(\mathrm{A}_J)\neq\varnothing$$

для некоторых $I,J\in\mathcal{K}$, $I\neq J$. В этом случае $I\cup J\notin\mathcal{K}$, иначе $\operatorname{cone}(\mathrm{A}_I)$ и $\operatorname{cone}(\mathrm{A}_J)$ являются гранями $\operatorname{cone}(\mathrm{A}_{I\cup J})$, и их внутренности имеют непустое пересечение. Как и ранее, получаем

$$0=\sum_{i\in I} r_i\boldsymbol{a}_i-\sum_{i\in\widehat{J}} s_i\boldsymbol{a}_i=\sum_{i\in I\setminus J} r_i\boldsymbol{a}_i-\sum_{i\in J\setminus I} s_i\boldsymbol{a}_i+\sum_{i\in I\cap J}(r_i-s_i)\boldsymbol{a}_i$$

для некоторых положительных r_i и s_i. По двойственности Гейла, это линейная зависимость между $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m$ дающая вектор $\boldsymbol{v}\in V$ удовлетворяющий условиям

$$\langle\gamma_i,\boldsymbol{v}\rangle=\begin{cases} r_i-s_i, & i\in I\cap J,\\ r_i, & i\in I\setminus J,\\ -s_i, & i\in J\setminus I,\\ 0, & i\notin I\cup J.\end{cases}$$

Теперь рассмотрим последовательность точек $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ в $\mathbb{R}^m$ со следующими координатами

$$x_i^{(k)} = \begin{cases} 0, & i \in I \cap J, \\ e^{-k\langle \gamma_i, \boldsymbol{v}\rangle}, & i \in I \setminus J, \\ 1, & i \notin I \end{cases} = \begin{cases} 0, & i \in I \cap J, \\ e^{-kr_i}, & i \in I \setminus J, \\ 1, & i \notin I. \end{cases}$$

Понятно, что $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}$, где

$$x_i = \begin{cases} 0, & i \in I, \\ 1, & i \notin I, \end{cases}$$

и как $\boldsymbol{x}^{(k)}$ и $\boldsymbol{x}$ лежат в $U(\mathcal{K})$. Определим $\boldsymbol{v}^{(k)} = k\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{y}^{(k)} = \boldsymbol{v}^{(k)} \cdot \boldsymbol{x}^{(k)}$, такие, что

$$y_i^{(k)} = e^{k\langle \gamma_i, \boldsymbol{v}\rangle} x_i^{(k)} = \begin{cases} 0, & i \in I \cap J, \\ 1, & i \in I \setminus J, \\ e^{k\langle \gamma_i, \boldsymbol{v}\rangle}, & i \notin I \end{cases} = \begin{cases} 0, & i \in I \cap J, \\ e^{-ks_i}, & i \in J \setminus I, \\ 1, & i \notin J. \end{cases}$$

Мы имеем $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{y}^{(k)} = \boldsymbol{y}$, где

$$y_i = \begin{cases} 0, & i \in J, \\ 1, & i \notin J, \end{cases}$$

так как $\boldsymbol{y}^{(k)}$ и $\boldsymbol{y}$ лежат в $U(\mathcal{K})$. С другой стороны, подпоследовательность $\boldsymbol{v}^{(k)}$ сходится в V. То есть, действие $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$ не является свободным. $\square$

Отметим, что теорема 2 имеет исключительно топологическую природу. С другой стороны, алгебраическая версия этой теоремы была известна ранее. 'Условие конуса' (свойство (a) Теоремы 1) являтся характерной особенностью конструкций торических многообразий (наиболее известна конструкция Кокса), это гарантирует, что фактор будет сепарабельным, то есть - хаусдорфовым в индуцированной топологии, побробнее в [CLS, Theorem 5.1.11]. Вариация условия (c) теоремы 1 известно как 'imprication condition' и возникала в работах по голоморфной механике.

Также заметим, что теорема 2 (2) является критерием; таким образом 'условие конуса' важно для классификационных результатов [IFM] и [I].

Пример 1. Рассмотрим действие $V = \mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^2$, определенное следующим образом

$$(v, (x_1, x_2)) \mapsto (e^{vx_1}, e^{vx_2}).$$

Мы имеем $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (1, 1)$, $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = (1, -1)$. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\Gamma) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$, такое, что $U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Вектора $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ образуют одномерный веер в $\mathbb{R}$, соответственно действие $\mathbb{R}$ на $U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ свободно и собственно, и фактор топологически гомеоморфен сфере (гладкому многообразию).

В более общем случае имеем $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (b, a)$, $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = (a, -b)$, $a, b \in \mathbb{R}_{\geq}$. Положив $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\Gamma) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$, имеем, что $U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Вектора $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ образуют одномерный веер в $\mathbb{R}$, соответственно действие $\mathbb{R}$ на $U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, аналогично предыдущему случаю фактор гомеоморфен сфере.

Теперь рассмотрим действие $V = \mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^2$ заданное немного иначе.

$$(v, (x_1, x_2)) \mapsto (e^{vx_1}, e^{-vx_2}).$$

В этом случае мы имеем $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (1, -1)$, $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = (1, 1)$. Внутренности конусов, порожденных $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ имеют непустое пересечение, таким образом действие $\mathbb{R}$ на $U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ не является собственным, и фактор - пространство не хаусдорфово.

6. Компактность

Предположим, что $\{\mathcal{K}, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ определяют симплициальнй веер $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$ в W^*, как описано в предыдущем параграфе. Веер Σ в W^* называется *полным* если объединение всех его конусов σ_i есть все W^*. Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$, соответствующий полному симплициальному вееру Σ задает симплициальное разбиение (*триангуляцию*) единичной сферы пространства W^*.

Сформулируем критерий компактности фактор-пространства при действии $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$. Напомним, что $k = \dim V$.

Предположим, что $\{\mathcal{K}, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ определяют симплициальный комплекс Σ в W^*. Положим $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ – двойственная по Гейлу конфигурация в V^* определяющая действие (1.1). Пусть ограничение этого действия на $U(\mathcal{K})$ свободно, собственно по теореме 2, следовательно, $U(\mathcal{K})/V$ является гладким многообразием.

Теорема 3. *Многообразие $U(\mathcal{K})/V$ компактно тогда и только тогда, когда веер Σ полный.*

Доказательство. Рассмотрим следующие отображения:

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^m \times W \to \mathbb{R}, \text{ т.ч.}$$
$$\mathcal{A}(x, w) = \prod_{i=1}^{m} x_i^{\langle a_i, w\rangle},\ w \in W \cong \mathbb{R}^{m-k}$$
$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^N_{>} \to \mathbb{R}^N, \text{ определено для любого } N \in \mathbb{N} \text{ т.ч.}$$
$$\mathcal{L}(x)_i = ln(x_i) \text{ - покоординатное логарифмирование.}$$

По определению двойственности Гейла $A\Gamma^* = 0$, значит для любого вектора $w \in W, v \in V^*$ имеет место равенство $\langle w, A\rangle\langle \Gamma^*, v\rangle = 0$. Отсюда

$$\mathcal{A}(v \cdot x, w) = \prod_{i=1}^{m} e^{\langle a_i, w\rangle\langle \gamma_i, v\rangle} x_i^{\langle a_i, w\rangle} =$$
$$= e^{\sum\limits_{i=1}^{m}\langle a_i, w\rangle\langle \gamma_i, v\rangle} \mathcal{A}(x, w) = e^0 \mathcal{A}(x, w) = \mathcal{A}(x, w),$$
$$\text{для любого } v \in V.$$

То есть значение $\mathcal{A}(x, w)$ одинаково на любых точках на листа в $U(\mathcal{K})$.

Докажем, что из полноты веера следует секвенциальная компактность $U(\mathcal{K})/V$, откуда будет следовать обычная, в силу того, что фактор-пространство - метризуемо.

Найдя в последовательности представителей $x^{(n)}$ сходящуюся в $U(\mathcal{K})$ подпоследовательность, мы найдем предел листов, соответствующий этой подпоследовательности. Поэтому будем переназначать представителей листов, для получения сходящейся в $U(\mathcal{K})$ подпоследовательности.

Рассмотрим произвольную последовательность $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}) \in U(\mathcal{K})$. Не ограничивая общность, возможно перейдя к подпоследовательности, будем считать, что существует $J \in \mathcal{K}$, т.ч. $x_J^{(n)} = 0,\ x_{\widehat{J}}^{(n)} \neq 0$ для любого n. Это верно в силу конечности количества симплексов.

Заметим, что в случае $m - k = 1$ все полные веера описаны в примере 1. Предположим, что мы доказали, что для любого полного веера в $W^*, \dim\ W < m - k$ утверждение о секвенциальной компактности фактора доказано.

Если $J \neq \emptyset$, то $v \cdot x_i = 0$ для любого $i \in J,\ v \in V$. Далее можно применить предположение индукции для полного веера меньшей размерности вида $\{A/A_I, \mathrm{link}_{\mathcal{K}}(I)\}$. Выделим сходящуюся подпоследовательность среди $x_{\widehat{J}}$, и по предположению индукции получим сходящуюся подпоследовательность в исходном пространстве.

Итак, считаем, что $J = \emptyset$. То есть $x_i^{(n)} \neq 0$ для любых $i \in [1, ..., m], n \in \mathbb{N}$

Рассмотрим отображение $\mathcal{LA}$. По определению имеем:

$$\mathcal{LA}(x, w) = \sum_{i=1}^{m} \langle a_i, w\rangle \ln(x_i)$$

Отсюда имеем линейность отображения $\mathcal{LA}$ по w. Тогда, для фиксированного $x \in \mathbb{R}^m$ определим линейную функцию $\mathcal{LA}(x) \in W^*$, которая задана следующим образом:

$$\mathcal{LA}(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \ln(x_i),$$
$$\langle \mathcal{LA}(x), w\rangle = \mathcal{LA}(x, w) = \sum_{i=1}^{m} \langle a_i, w\rangle \ln(x_i)$$

Перейдем к выделению сходящейся подпоследовательности. Рассмотрим любую последовательность представителей $x^{(n)}$, и для нее рассмотрим $-\mathcal{LA}(x^{(n)}) \in W^*$. Найдем такой $I \in \mathcal{K}, \dim\ I = m - k$, такой что бесконечно много элементов этой последовательности лежат в $\mathrm{cone}(A_I)$. Перейдем к этой подпоследовательности.

В силу того, что $\Gamma_{\widehat{I}}$ - порождает V^* разрешим относительно $v \in V$ систему

$$\langle \gamma_i, v^{(n)}\rangle = -\ln(x_i^{(n)}),\ i \in \widehat{I}$$

Теперь положим:

$$\tilde{x}_i^{(n)} = e^{\langle \gamma_i, v^{(n)}\rangle} x_i^{(n)} = (x_i^{(n)})^{-1} x_i^{(n)} = 1\ \forall i \in\ \widehat{I}.$$

Таким образом $\ln(\tilde{x_i}^{(n)}) = 0,\ i \in \widehat{I}$. По предположению индукции $x_i^{(n)} \neq 0$. Отображение $\mathcal{A}$ - постоянно на листах, значит $\mathcal{LA}$ - корректно определено, и постоянно на листах. Отсюда имеем цепочку равенств:

$$\mathcal{LA}(\tilde{x}^{(n)}) = \sum_{i \in I} a_i \ln(\tilde{x_i}^{(n)}) = \sum_{i=1}^{m} a_i \ln(x_i^{(n)}) = \mathcal{LA}(x^{(n)}) \in -\mathrm{cone}\, A_I$$

Откуда $\mathcal{L}\tilde{x}^{(n)} \leq 0$, то есть $\lim\limits_{n \to \infty} \tilde{x}^{(n)} \in U(\mathcal{K})$, что и требовалось.

Теперь докажем в противоположную сторону. Рассмотрим два случая. Обознчим $\langle A\rangle_{R_{\geq}}$ - все линейные комбинации с положительными коэффициентами.

1. $\langle A\rangle_{R_{\geq}} \neq \mathbb{R}^{m-n}$, то есть существует $w \in W$, т.ч. $\langle A, w\rangle \geq 0$. Тогда получаем, что $\mathcal{A}(x, w)$ есть произведение x_i в некоторых положительных степенях. Отсюда, рассмотрим последовательность листов, у которой $\mathcal{A}(x^{(n)}, w)$ стремится

к бесконечности. Значит, поскольку хотя бы один показатель $\langle A, w\rangle$ - положителен, вне зависимости от выбора представителя, всегда будет существовать подпоследовательность, у которой для фиксированного $i,\ x_i \to \infty$. Таким образом предела в фактор-пространстве не будет.
2. $\langle A\rangle_{R_{\geq}} = \mathbb{R}^{m-n}$. Поскольку веер – не полный, рассмотрим вектор $w \notin \Sigma$, такой, что существует набор $I,\ I \notin \mathcal{K}$ линейно независимых векторов, что nw лежит во внутренности $\mathrm{cone}(A_I)$, и никакой $a_j, j \in [m] \setminus I$ не лежит в $\mathrm{cone}(A_I)$. Размерность конуса $|I| = m - k$.

Рассмотрим последовательность листов, для которых $-\mathcal{LA}(x^{(n)}) = nw$. Аналогично предыдущей части доказательства имеем цепочку равенств:

$$\sum_{i\in I} a_i \ln(\tilde{x_i}^{(n)}) = \sum_{i=1}^{m} a_i \ln(x_i^{(n)}) = \mathcal{LA}(x^{(n)}) = -nw \in -\mathrm{cone}(A_I)$$

из которой получаем, что $\ln(\tilde{x_i}) \to -\infty$, то есть $\tilde{x_i}^{(n)} \to 0$ для любого $i \in I$, поскольку по выбору w - все коэффициенты его разложения по векторам A_I - положительны.

Таким образом, по последовательности листов мы получили сходящуюся последовательность представителей к представителю листа, заданного соотношениями $x_I = 0$, но поскольку $I \notin \mathcal{K}$ - эта точка выколота из многообразия. Значит мы получили противоречие с предположением.

□

Если фактор $U(\mathcal{K})\backslash V$ компактен, его можно описать с помощью следующей топологически-комбинаторной конструкции.

Конструкция 4 (Полиэдральное произведение)**.** Пусть нам дан симплициальный еомплекс $\mathcal{K}$ на $[m]$ и последовательность

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \{(X_1, A_1), \dots, (X_m, A_m)\}$$

из m пар пространств с отмеченной точкой. Для подмножества $I \subset [m]$ мы рассмотрим

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I := \Big\{(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{k=1}^{m} X_k\colon\ x_k \in A_k \quad \text{for } k \notin I\Big\} \tag{6.1}$$

и определим *полиэдральное произведение* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$, соответствующее комплексу $\mathcal{K}$ как

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}} := \bigcup_{I\in\mathcal{K}} (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = \bigcup_{I\in\mathcal{K}} \Big(\prod_{i\in I} X_i \times \prod_{i\notin I} A_i\Big) \subseteq \prod_{i=1}^{m} X_i.$$

В случае когда все пары (X_i, A_i) одинаковы, то есть $X_i = X$ и $A_i = A$ для $i = 1, \dots, m$, мы будем использовать определение $(X, A)^{\mathcal{K}}$ для $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}}$.

Понятно, что $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}} = \prod_{i=1}^{m} A_i$ если $\mathcal{K} = \varnothing$, и $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}} = \prod_{i=1}^{m} X_i$ когда $\mathcal{K}$ есть полый симплекс Δ^{m-1} на m вершинах. Приведем немного примеров.

Пример 2.
1. Понятно, что $U(\mathcal{K}) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^{\times})^{\mathcal{K}}$, где $\mathbb{R}^{\times} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. Пусть $(X, A) = (D^1, S^0)$, гдн D^1 есть замкнутый интервал (обозначение для $[-1, 1]$) и S^0 - его граница, составленая из двух точек. Полиэдральное

произведение в этом случае $(D^1, S^0)^{\mathcal{K}}$ известно как *вещественное момент-угол-многообразие* [BP1, §3.5], [BP2]:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (D^1, S^0)^I.$$

Это кубический подкомплекс m-куба $(D^1)^m = [-1,1]^m$. Когда $\mathcal{K}$ сожеожит m несвязных точек, $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ есть 1-мерный остов куба $[-1,1]^m$. Если $\mathcal{K} = \partial\Delta^{m-1}$, мы имеем $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = \partial[-1,1]^m$. В общем случе, если $\{i_1, \dots, i_k\}$ грань $\mathcal{K}$,то $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ содержит 2^{m-k} кубических грани размерности k, которые лежат в k-мерной плоскости, параллельной $\{i_1, \dots, i_k\}$-1 координатной плоскости.

Теорема 5. *Если $\{\mathcal{K}, \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$ определяет полный симплициальный конус, имеет место гомеоморфизм*

$$U(\mathcal{K})/V \cong \mathcal{R}_{\mathcal{K}}.$$

Доказательство. В силу полноты веера, любой вектор a_i входит в некоторый конус $cone(A_I), I \in \mathcal{K}$. Тогда $\forall i \ \exists I : \Gamma_{\widehat{I}}$ порождает V^*. Отсюда, применив рассуждение из теоремы 3 рассмотрим на каждом листе представителя $\tilde{x}$: $|x_i| = 1, \forall i \in \widehat{I}, |x_i| \leq 1 \ \forall i \in I$. Заметим, что этот новый представитель лежит на $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$.

Так же, для любой точки $x \in \mathcal{R}_{\mathcal{K}} \ \exists I \in \mathcal{K} : |x_i| = 1, \ \forall i \in \widehat{I}$, отсюда, для двух различных точек либо отличаются соответствующие им симплексы, либо, в силу линейной независимости $A \ \exists w \in W : \mathcal{A}(x_1, w) \neq \mathcal{A}(x_2, w)$, следовательно эти точки лежат на разных листах.

Таким образом, мы нашли множество, вложенное в $U(\mathcal{K})$, которое пересекает любой лист по ровно одной точке, и через каждую точку проходит ровно один лист. Таким образом фактор-многообразие гомеоморфно $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$, что и требовалось.

□

Следствие 1. *Заметим, что теорема 5 индуцирует на $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ гладкую структуру, если $\mathcal{K}$ - комплекс, соответствующий полному симплициальному вееру.*

Важность данного результата в следующем. Дано действие, которое описывается исключительно в терминах линейной алгебры и комбинаторики.

Свойств линейно-алгебраической системы достаточно, что бы это действие могло индуцировать гладкую структуру на фактор-пространстве.

Кроме того, оказывается, что этим фактором является известное в торической топологии многообразие, которое также задано исключительно комбинаторными методами. Заметим, что определение полиэдрального произведения не дает гладкой структуры на получаемом пространстве.

Наконец, совмещая два результата, получаем возможность рассматривать вещественные момент-угол-комплексы как объекты гладкой категории.

Список литературы

[ADHL] Arzhantsev, Ivan; Derenthal, Ulrich; Hausen, Jürgen; Laface, Antonio. *Cox rings.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 144. Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

[BP1] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Torus actions, combinatorial topology and homological algebra.* Uspekhi Mat. Nauk **55** (2000), no. 5, 3–106 (Russian). Russian Math. Surveys **55** (2000), no. 5, 825–921 (English).

[BP2] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Toric Topology.* Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[C] Cai, Li. *Norm minima in certain Siegel leaves.* Algebr. Geom. Topol. 15 (2015), no. 1, 445–466.

[CLS] Cox, David A.; Little John B.; Schenck, Henry K. *Toric varieties.* Graduate Studies in Mathematics, 124. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[F] Fulton, William. *Introduction to Toric Varieties.* Annals of Mathematics Studies, 131. The William H. Roever Lectures in Geometry. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

[I] Ishida, Hiroaki. *Complex manifolds with maximal torus actions.* Preprint (2013), arXiv:1302.0633.

[IFM] Ishida, Hiroaki; Fukukawa, Yukiko; Masuda, Mikiya. *Topological toric manifolds.* Mosc. Math. J. 13 (2013), no. 1, 57–98.

[L] Lee, John M. *Introduction to smooth manifolds.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer, New York, 2013.

[PU] Panov, Taras; Ustinovsky, Yuri. *Complex-analytic structures on moment-angle manifolds.* Moscow Math. J. **12** (2012), no. 1, 149–172.