Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова

Механико - математический факультет, 5 курс.
Кафедра Высшей Геометрии и Топологии

Струментов Максим Андреевич
Курсовая работа

Действия групп, порождаемые многогранниками и момент-угол-комплексы

Научный руководитель - Тарас Евгеньевич Панов

Москва
2019 г.

1. Наборы векторов и действия

Пусть $V \cong \mathbb{R}^k$ - есть k-мерное векторное вещественное пространсиво, и $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ последовательность (*конфигурация*) m векторов в двойственном пространстве V^*. Повторения векторов в наборе $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ допустимы, но предполагаем, что их выпуклая оболочка порождает все пространство V^*. Так же предполагаем, что никакой из векторов в $\Gamma \neq 0$, поскольку в таком случае действие редуцируется к действию с меньшим m. Рассмотрим действие V на $\mathbb{R}^m$ заданное следующим образом.

$$\begin{aligned} & V \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ & (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) \mapsto \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} = \big(e^{\langle \gamma_1, \boldsymbol{v} \rangle} x_1, \dots, e^{\langle \gamma_m, \boldsymbol{v} \rangle} x_m\big). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Это классический пример динамической системы, восходящей к работам Пуанкаре. Есть хорошо известная связь между линейными свойствами набора векторов Γ и топологии слоения $\mathbb{R}^m$ на орбиты действия (1.1) и их фактор-пространством (*пространством листов*). В работе будут систематизированы и описаны имеющиеся знания об этой связи и будет изучена топология пространства листов методами торической топологии.

Работа является непосредственным продолжением курсовой работы 4 курса "Собственный действия групп и вещественным момент-угол-комплексы". Раскрывается вопрос эквивалентности классических определений момент-угол-комплексов и действий групп, полученных из вееров многогранников. Так же исследуется новых подход к эквивалентности определений момент-угол-комплексов, использующий аппарат функционального анализа, и его применимость к рассматриваемым конструкциям.

2. Невырожденные уровни

Рассмотрим подмножество $U \subset \mathbb{R}^m$, такое, что ограничение действия (1.1) на него - свободно.

Предложение 1. *Орбита $V\boldsymbol{x}$ точки $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ под действием* (1.1) *свободна тогда и только тогда, когда линейная оболочка подмножества $\{\gamma_i \colon x_i \neq 0\} \subseteq \Gamma$ порождает все пространство V^*.*

Доказательство. От противного, пусть $V\boldsymbol{x}$ не является свободной, то есть существует вектор $\boldsymbol{v} \neq 0$ такой, что

$$(x_1 e^{\langle \gamma_1, \boldsymbol{v} \rangle}, \dots, x_m e^{\langle \gamma_m, \boldsymbol{v} \rangle}) = (x_1, \dots, x_m).$$

Тогда $\langle \gamma_i, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ для $x_i \neq 0$, что означает, что векторы γ_i, для которых $x_i \neq 0$ не порождают V^*.

Обратно, если $\{\gamma_i \colon x_i \neq 0\} \subseteq \Gamma$ не порождает все пространство V^*, тогда существует вектор $\boldsymbol{v} \neq 0$ такой, что $\langle \gamma_i, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ для $x_i \neq 0$, отсюда орбита $V\boldsymbol{x}$ не является свободной. $\square$

Введем следующие обозначения. Пусть $[m] = \{1, \dots, m\}$, рассмотрим подмножество $I = \{i_1, \dots, i_p\} \subseteq [m]$. Для каждого I отпределим

$$\Gamma_I := \{\gamma_i \colon i \in I\} \subseteq \Gamma.$$

Пусть $\widehat{I} := [m] \setminus I$ дополнение к множеству. Положим

$$\mathcal{K}(\Gamma) = \{I \subseteq [m] \colon \Gamma_{\widehat{I}} \text{ порождают } V^*\}.$$

Симплициальный комплекс на $[m]$ это набор $\mathcal{K}$ подмножеств $[m]$ такой, что для каждого $I \in \mathcal{K}$ все подмножества I также принадлежат $\mathcal{K}$. Будем называть $I \in \mathcal{K}$ *симплексом* (или *гранью*) $\mathcal{K}$. Здесь и далее считаем, что $\varnothing$ содержится в $\mathcal{K}$. Не подразумевается, что $\mathcal{K}$ содержит все одноэлементные множества $\{i\}$. Будем называть $\{i\} \in \mathcal{K}$ *вершиной*, а $\{i\} \notin \mathcal{K}$ *призрачной вершиной*. Симплициальный комплекс называется *чистым* если все его максимальные грани имеют одинаковую размерность.

Предложение 2. *$\mathcal{K}(\Gamma)$ чистый симплициальный комплекс размерности $m-k-1$.*

Доказательство. Если $\Gamma_{\widehat{I}}$ порождает V^*, то $\Gamma_{\widehat{J}} \supset \Gamma_{\widehat{I}}$ для любого $J \subset I$. Следовательно, $\mathcal{K}(\Gamma)$ является симплициальным комплексом. Если $\Gamma_{\widehat{I}}$ порождает V^*, значит он содержит базис V^*. Пусть этот базис есть $\Gamma_{\widehat{L}}$ для некоторого L такого что $I \subset L$ и $|L| = m - |\Gamma_{\widehat{L}}| = m - k$. Отсюда следует, что $\mathcal{K}(\Gamma)$ чистый и размерности $(m-k-1)$. □

Сопоставим симплициальному комплексу $\mathcal{K}$ на $[m]$, подмножество в $\mathbb{R}^m$, являющееся дополнением до некоторого набора координатных подпространств:

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^m \setminus \bigcup_{\{i_1,\ldots,i_p\}\notin\mathcal{K}} \{\boldsymbol{x} \colon x_{i_1} = \cdots = x_{i_p} = 0\}. \tag{2.1}$$

Понятно, что дополнение до любого набора координатных подпространств реализуется на некотором $\mathcal{K}$. Например $\mathcal{K} = \{\varnothing\}$, получим $U(\mathcal{K}) = (\mathbb{R}^\times)^m$, где $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, и если $\mathcal{K}$ содержит все собственные подмножества $[m]$, то $U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Предложение 3. *Ограничение действия* (1.1) *на $U(\mathcal{K})$ свободно тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ – симплициальный подкомплекс в комплексе $\mathcal{K}(\Gamma)$.*

Доказательство. Возьмем любую $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in U(\mathcal{K})$. Положим $I := \{i \colon x_i = 0\} \in \mathcal{K}$. Для $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}(\Gamma)$, рассмотрим $\Gamma_{\widehat{I}} = \{\gamma_i \colon x_i \neq 0\}$ порождающую V^*. Тогда орбита $V\boldsymbol{x}$ свободна по Предложению 1.

Обратно - ограничение действия свободно, значит $\Gamma_{\widehat{I}} = \{\gamma_i \colon x_i \neq 0\}$ порождает V^*, следовательно $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}(\Gamma)$ по определению $\mathcal{K}(\Gamma)$. □

3. Двойственность Гейла

Когфигурация Γ определяет линейное отображение $\varGamma \colon \mathbb{R}^m \to V^*$, которое переводит i-й стандартный вектор $\boldsymbol{e}_i$ в γ_i. Положим $W := \operatorname{Ker} \varGamma$, тогда имеет место точная последовательность:

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow \mathbb{R}^m \xrightarrow{\varGamma} V^* \longrightarrow 0.$$

Так как Γ порождает V^*, пространство W^* имеет размерность $n := m - k$. Рассмотрим двойственную последовательность:

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{\varGamma^*} (\mathbb{R}^m)^* \xrightarrow{A} W^* \longrightarrow 0,$$

где отображение $\varGamma^*$ таково, что $\boldsymbol{v}$ отображается в $(\langle\gamma_1, \boldsymbol{v}\rangle, \ldots, \langle\gamma_m, \boldsymbol{v}\rangle)$.

Положим $\boldsymbol{a}_i := A(\boldsymbol{e}_i)$. Конфигурацию векторов $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ в W^* будем называть (линейной) *двойственной по Гейлу*, (или *преобразованием Гейла*), к конфигурации $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$. Заметим, что Γ является двойственной по Гейлу к A.

После выбора базиса в V и W, получим Γ определяется $k \times m$-матрицей, с вектор-столбцами $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ и A, являющаяся $n \times m$-матрицей с вектор-столбцами $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$. По определению $A\Gamma^* = 0$, то есть по строкам матрицы A записан базис в пространстве линейных зависимостей между $\gamma_1, \dots, \gamma_m$.

Предложение 4. *Для любого $I \subseteq [m]$, вектора в A_I линейно независимы в W^* тогда и только тогда, когда $\Gamma_{\widehat{I}}$ порождают V^*.*

Доказательство. По двойственности, γ_j - суть j-й векторный коэфициент линейной зависимости между $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$. Если вектора $\boldsymbol{a}_i$, $i \in I$, линейно независимы, тогда в любом линейном соотношении между $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$ есть ненулевой коэффициент для некоторого $j \in \widehat{I}$. К тому же в конфигурации Γ отсутствуют нулевые вектора. Следовательно, линейная функция γ_j, $j \in \widehat{I}$, порождает V^*. Обратно, если есть линейная зависимость между $\boldsymbol{a}_i$, $i \in I$, то для каждого $j \in \widehat{I}$ j-й коэффициент функции γ_j входит в данное соотношение. Следовательно, $\{\gamma_j,\, j \in \widehat{I}\}$, не порождает V^*. □

4. Полиэдральные конусы и веера

В этом разделе перечислим необходимые факты о веерах и конусах. Более подробную информацию можно найти в [F, Раздел 1] и [CLS, Разделы 1 и 3].

Подмножество σ вещественного линейного пространства L называется *выпуклым полиэдральным конусом*, или просто *конусом*, если оно образовано всеми неотрицательными линейными комбинациями набора векторов $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_p$ в L. Обозначение

$$\sigma = \operatorname{cone}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_p) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{v}_i,\ \lambda_i \geq 0$$

Множество векторов может быть пусто, и в этом случае $\operatorname{cone}(\varnothing) = \mathbf{0}$. Размерностью конуса σ называется разерность его выпуклой оболочки.

Множество образующих конуса σ это множество векторов $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_p$ таких что $\sigma = \operatorname{cone}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_p)$. Минимальное по включению множество образующих опеделено единственным способом, с точностью до умножения векторов на положительные константы. Конус называется *симплициальным*, если его минимальное порождающее множество линейно независимо.

Опорной гипергранью полиэдрального конуса $\sigma \subseteq L$ называется гиперплоскость H такая, что σ содержится в одном из замкнутых полупространств, ограниченных H. *Грань* конуса σ это пересечение σ с опорной гипергранью. Также будем считать, что σ грань сама себя; грани, отличные от σ называются *собственными.* Дополнение ко всем собственным граням в σ называется *внутренностью* σ и обозначается $\operatorname{relint}\sigma$; можно показать, что она совпадает со внутренностью σ как линейной оболочки. Заметим, что $\operatorname{relint}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Обозначим $H_{\boldsymbol{u}} := \{\boldsymbol{l} \in L \colon \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{l}\rangle = 0\}$ гиперплоскость, определенная ненулевым вектором $\boldsymbol{u} \in L^*$, и обозначим $H^+_{\boldsymbol{u}}$ и $H^-_{\boldsymbol{u}}$ порожденные ей замкнутые полупространства. Иногда будем считать $\boldsymbol{u}$ нулевым, и в этом случае $H_{\boldsymbol{u}}$ это все пространство L, а не гиперплоскость.

Предложение 5. *Если $\sigma = \operatorname{cone}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_p)$ конус в L, то $\boldsymbol{v} \in \operatorname{relint}\sigma$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ для некоторых положительных $\lambda_i \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Случай $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ очевиден, так что предположим, что $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$.

Пусть $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ с $\lambda_i > 0$. Предположим $\boldsymbol{v} \notin \operatorname{relint} \sigma$. Тогда $\boldsymbol{v}$ определяет собственную грань конуса τ в σ, то есть существует опорная гиперплоскость $H_{\boldsymbol{u}}$ с $\boldsymbol{u} \in V^*$, такая что $\sigma \subseteq H_{\boldsymbol{u}}^+$ и $\boldsymbol{v} \in H_{\boldsymbol{u}} \cap \sigma = \tau$. Следовательно, $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$. С другой стороны, $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_i \rangle > 0$, поскольку каждый $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_i \rangle$ неотрицателен и $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_i \rangle > 0$ по крайней мере для одного i если τ является собственной гранью. Противоречие.

Теперь пусть $\boldsymbol{v} \in \operatorname{relint} \sigma$. Легко заметить, что для любого $\boldsymbol{v}' \in \sigma$ существует $\boldsymbol{v}'' \in \sigma$ такой, что $\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}'' = \mu \boldsymbol{v}$ для некоторого $\mu > 0$. Положив $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}_i$ получаем $\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_i'' = \mu_i \boldsymbol{v}$ для $\boldsymbol{v}_i'' \in \sigma$ и $\mu_i > 0$. Распишем каждый $\boldsymbol{v}_i''$ как невырожденную линейную комбинацию $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ и просуммировав по всем i имеем $\sum_{i=1}^{p} \nu_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \boldsymbol{v}$ для некоторого $\nu_i > 0$. что и требовалось. $\square$

Лемма 1 (Лемма об отделимости). *Пусть σ_1 и σ_2 из V. Тогда, если они различны, то следующие условия эквивалентны:*

(a) *пересечение σ_1 и σ_2 - грань каждого из конусов;*
(b) *конуса σ_1 и σ_2 отделимы гиперплоскостью, то есть существует гиперплоскость H, такая что*

$$\sigma_1 \subseteq H^+, \quad \sigma_2 \subseteq H^- \quad \text{и} \quad H \cap \sigma_1 = H \cap \sigma_2 = \sigma_1 \cap \sigma_2.$$

Данный факт оставим без доказательства, сославшись на [F, §1.2] or [CLS, Лемма 1.2.13].

Веером называется конечный набор конусов $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$ в L такой, что каждая грань конуса из Σ лежит в Σ, и пересечение любых двух конусов лежит в Σ. Будем рассматривать только *симплициальные* веера, то есть веера, составленные из симплициальных конусов.

Вернемся к рассмотрению наборов векторов в V^* и W^*. Пусть Σ симплициальный веер в W^*, а $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ порождающие одномерных конусов в Σ. *Порождающим симплициальным комплексом* $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma$ называется набор подмножеств $I \subseteq [m]$ Такой что $\{\boldsymbol{a}_i : i \in I\}$ порождают конус в Σ.

Таким образом симплициальный веер Σ может быть определен из двух следующих объектов:

· симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на $[m]$;
· набор векторов $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ в W^* такой, что для любого $I \in \mathcal{K}$ подмножество $\mathrm{A}_I = \{\boldsymbol{a}_i : i \in I\}$ линейно независимо.

Обратно, если дан симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ и набор векторов A, мы можем определить симплициальный конус $\sigma_I = \operatorname{cone}(\mathrm{A}_I)$ для каждого $I \in \mathcal{K}$. 'Пучок конусов' $\{\sigma_I : I \in \mathcal{K}\}$ является веером Σ если любые два конуса σ_I и σ_J пересекаются по собственной грани (которая соответствует $\sigma_{I \cap J}$). В связи с этим, будем говорить, что данные $\{\mathcal{K}, \mathrm{A}\}$ *определяют веер* Σ.

Имеет место следующий критерий, сформулированный исключительно в терминах векторных конфигураций.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{K}$ симплициальный комплекс на $[m]$, положим $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ векторная конфигурация в W^* такая, что для любого симплекса $I \in \mathcal{K}$ подмножество A_I линейно независимо, и $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ двойственная по Гейлу конфигурация. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) $\{\mathcal{K}, \mathrm{A}\}$ *определяет веер Σ;*
(b) $\operatorname{relint} \operatorname{cone}(\mathrm{A}_I) \cap \operatorname{relint} \operatorname{cone}(\mathrm{A}_J) = \varnothing$ *для любых $I, J \in \mathcal{K}$, $I \neq J$;*

(c) $\operatorname{relint}\operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{I}}) \cap \operatorname{relint}\operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{J}}) \neq \varnothing$ *для любых* $I, J \in \mathcal{K}$.

Доказательство. Импликация (a)⇒(b) следует из определения.

(b)⇒(a). Возьмем любый $I, J \in \mathcal{K}$. Покажем, что $\operatorname{cone} \mathrm{A}_I \cap \operatorname{cone} \mathrm{A}_J = \operatorname{cone} \mathrm{A}_{I\cap J}$. Понятно, что $\operatorname{cone} \mathrm{A}_{I\cap J}$ является гранью $\operatorname{cone} \mathrm{A}_I$ и $\operatorname{cone} \mathrm{A}_J$ в силу симплициальности. Рассмотрим множество $X := \operatorname{cone} \mathrm{A}_I \cap \operatorname{cone} \mathrm{A}_J$. Очевидно имеем $\operatorname{cone} \mathrm{A}_{I\cap J} \subseteq X$. Рассмотрим минимальную по включению грань $\operatorname{cone} \mathrm{A}_I$ содержащую X; в силу симплициальности, это грань $\operatorname{cone} \mathrm{A}_{I'}$ для некоторого $I' \subseteq I$. Аналогично $\operatorname{cone} \mathrm{A}_{J'}$ наименьшая по включению грань конуса $\operatorname{cone} \mathrm{A}_J$ содержащая X. Тогда $\operatorname{relint} X \subseteq \operatorname{relint}\operatorname{cone} \mathrm{A}_{I'} \cap \operatorname{relint}\operatorname{cone} \mathrm{A}_{J'}$. Согдасно (b), последнее пересечение пусто, кроме случая $I' = J'$. Таким образом, $I' = J'$. Значит $I' \subseteq I \cap J$, и $X \subseteq \operatorname{cone} \mathrm{A}_{I'} \subseteq \operatorname{cone} \mathrm{A}_{I\cap J}$, что и требовалось.

(c)⇒(a). Пусть $\operatorname{relint}\operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{I}}) \cap \operatorname{relint}\operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{J}}) \neq \varnothing$. По предложению 5,

$$\sum_{k\in\widehat{I}} r_i\gamma_i - \sum_{l\in\widehat{J}} s_l\gamma_l = 0 \tag{4.1}$$

для некоторых положительных r_i и s_l. Это линейная зависимость между $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, следовательно, она определяет некоторый вектор $\boldsymbol{w} \in W$. Рассмотрим значение линейной функции $\boldsymbol{a}_i$ на нем, таким образом мы имеем:

$$\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{w}\rangle = \begin{cases} r_i - s_i, & i \in \widehat{I} \cap \widehat{J} = \widehat{I \cup J}, \\ r_i, & i \in \widehat{I} \setminus \widehat{J} = J \setminus (I \cap J), \\ -s_i, & i \in \widehat{J} \setminus \widehat{I} = I \setminus (I \cap J), \\ 0, & i \in \widehat{\widehat{I} \cup \widehat{J}} = I \cap J. \end{cases} \tag{4.2}$$

Отдюда следует, что

$$\begin{gathered} \operatorname{cone} \mathrm{A}_J \subseteq H^+_{\boldsymbol{w}}, \quad \operatorname{cone} \mathrm{A}_I \subseteq H^-_{\boldsymbol{w}}, \quad \text{и} \\ H_{\boldsymbol{w}} \cap \operatorname{cone} \mathrm{A}_I = H_{\boldsymbol{w}} \cap \operatorname{cone} \mathrm{A}_J = \operatorname{cone} \mathrm{A}_I \cap \operatorname{cone} \mathrm{A}_J = \operatorname{cone} \mathrm{A}_{I\cap J}. \end{gathered} \tag{4.3}$$

По лемме 1, мы получаем, что $\operatorname{cone} \mathrm{A}_I$ и $\operatorname{cone} \mathrm{A}_J$ пересекаются по гиперграни эля любых $I, J \in \mathcal{K}$, следовательно (a) выполнено.

(a)⇒(c). Предположим, что $\operatorname{cone} \mathrm{A}_I$ и $\operatorname{cone} \mathrm{A}_J$ пересекаются по гиперграни. По лемме 1, сущствует гиперплоскость $H_{\boldsymbol{w}}$, обозначим ее (4.3). Соответствующий вектор $\boldsymbol{w} \in W$ удовлетворяет (4.2) для некоторых положительных r_i, s_i. Это $\boldsymbol{w}$ дает нам линейное отношение (4.1) между $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, откуда следует, что $\operatorname{relint}\operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{I}}) \cap \operatorname{relint}\operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{J}}) \neq \varnothing$. □

Теорема 1 следует из [ADHL, Theorem 2.2.1.14], согласно которой она верна для любых вееров (не обязательно симплициальных).

5. Собственные действия

Непрерывное действие $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g\,x$ топологической группы G на топологическом пространстве X называется *собственным* если следующее отображение $h\colon G \times X \to X \times X$, $(g, x) \mapsto (g\,x, x)$ является собственным, то есть, $h^{-1}(C)$ компактен для любого компактного $C \subseteq X \times X$.

Свойство собственности является важнейшим для действий некомпактных групп Ли. Во первых, X/G под собственным действием является хаусдорфовым многообразием, что показано в [L, Proposition 21.4]. Во вторых, фактор X/G при свободном и собственном действии группы Ли на гладком многообразии есть гладкое многообразие [L, Theorem 21.10].

В нашем случае (1.1) имеем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ *набор векторов в* V^*, *определяющий действие* (1.1), *и* $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$ *двойственная по Гейлу конфигурация векторов. Положим* $\mathcal{K}$ *симплициальный комплекс на* $[m]$, *такой что для любого* $I \in \mathcal{K}$ *подмножество* $\Gamma_{\widehat{I}}$ *порождает* V^* *(или, что то же самое, множество* A_I *линейно не зависимо). Тогда:*

(1) *ограничение действия* $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$ *свободно;*
(2) *действие* $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$ *собственно тогда и только тогда, когда выполнено одно из эквивалентных условий (a)–(c) теоремы 1.*

Доказательство. Первая часть утверждения - это предложение 3.

Предположим, что условие (c) теоремы 1 выполнено. Чтобы понять, что действие $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$ собственно, нужно доказать следующее: если $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ последовательность $U(\mathcal{K})$ и $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\}$ последовательность в V такие, что обе последовательности $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ и $\{\boldsymbol{v}^{(k)} \cdot \boldsymbol{x}^{(k)}\}$ сходятся, то сходится и последовательность $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\}$ (см. [L, Утверждение 21.5]). Перейдя к подпоследовательности, можно предположить, что каждая их последовательностей $\{\langle \gamma_i, \boldsymbol{v}^{(k)} \rangle\}$, $i = 1, \dots, m$, имеет предел в $\mathbb{R} \cup \pm\infty$. Пусть

$$I_+ = \bigl\{ i \colon \lim_{k\to\infty} \langle \gamma_i, \boldsymbol{v}^{(k)} \rangle = +\infty \bigr\}, \quad I_- = \bigl\{ i \colon \lim_{k\to\infty} \langle \gamma_i, \boldsymbol{v}^{(k)} \rangle = -\infty \bigr\}.$$

Таким образом, обе последовательности $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$, $\{\boldsymbol{y}^{(k)} = \boldsymbol{v}^{(k)} \cdot \boldsymbol{x}^{(k)}\}$ сходятся к $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U(\mathcal{K})$ соответственно, мы имеем $x_i = 0$ для $i \in I_+$ и $y_i = 0$ для $i \in I_-$. По определению $U(\mathcal{K})$ (2.1) это включение I_+ и I_- несвязных симплексов в $\mathcal{K}$. Тогда условие (c) теоремы 1 дает следующее:

$$\operatorname{relint} \operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{I}_+}) \cap \operatorname{relint} \operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{I}_-}) \neq \varnothing.$$

Таким образом,

$$0 = \sum_{i \in \widehat{I}_-} r_i \gamma_i - \sum_{i \in \widehat{I}_+} s_i \gamma_i = \sum_{i \in I_+} r_i \gamma_i - \sum_{i \in I_-} s_i \gamma_i + \sum_{i \notin I_+ \sqcup I_-} (r_i - s_i) \gamma_i$$

для некоторых положительных r_i и s_i. Это подразумевает, что оба I_+ и I_- пусты, так как иначе цепочка равенств

$$0 = \lim_{k\to\infty} \Bigl(\sum_{i \in I_+} r_i \langle \gamma_i, \boldsymbol{v}^{(k)} \rangle - \sum_{i \in I_-} s_i \langle \gamma_i, \boldsymbol{v}^{(k)} \rangle + \sum_{i \notin I_+ \sqcup I_-} (r_i - s_i) \langle \gamma_i, \boldsymbol{v}^{(k)} \rangle \Bigr) = +\infty,$$

приводит к противоречию. Поэтому каждая последовательность $\{\langle \gamma_i, \boldsymbol{v}^{(k)} \rangle\}$, $i = 1, \dots, m$, имеет конечный предел. Это означает, что $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\}$ сходится к V, поскольку $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ порождает все V^*. Таким образом, действие $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$ собственно.

Теперь предположим, что условие (b) теоремы 1 не выполнено. Тогда мы имеем

$$\operatorname{relint} \operatorname{cone}(\mathrm{A}_I) \cap \operatorname{relint} \operatorname{cone}(\mathrm{A}_J) \neq \varnothing$$

для некоторых $I, J \in \mathcal{K}$, $I \neq J$. В этом случае $I \cup J \notin \mathcal{K}$, иначе $\operatorname{cone}(\mathrm{A}_I)$ и $\operatorname{cone}(\mathrm{A}_J)$ являются гранями $\operatorname{cone}(\mathrm{A}_{I \cup J})$, и их внутренности имеют непустое пересечение. Как и ранее, получаем

$$0 = \sum_{i \in I} r_i \boldsymbol{a}_i - \sum_{i \in \widehat{J}} s_i \boldsymbol{a}_i = \sum_{i \in I \setminus J} r_i \boldsymbol{a}_i - \sum_{i \in J \setminus I} s_i \boldsymbol{a}_i + \sum_{i \in I \cap J} (r_i - s_i) \boldsymbol{a}_i$$

для некоторых положительных r_i и s_i. По двойственности Гейла, это линейная зависимость между $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ дающая вектор $\boldsymbol{v} \in V$ удовлетворяющий условиям

$$\langle \gamma_i, \boldsymbol{v} \rangle = \begin{cases} r_i - s_i, & i \in I \cap J, \\ r_i, & i \in I \setminus J, \\ -s_i, & i \in J \setminus I, \\ 0, & i \notin I \cup J. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим последовательность точек $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ в $\mathbb{R}^m$ со следующими координатами

$$x_i^{(k)} = \begin{cases} 0, & i \in I \cap J, \\ e^{-k\langle \gamma_i, \boldsymbol{v} \rangle}, & i \in I \setminus J, \\ 1, & i \notin I \end{cases} = \begin{cases} 0, & i \in I \cap J, \\ e^{-kr_i}, & i \in I \setminus J, \\ 1, & i \notin I. \end{cases}$$

Понятно, что $\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}$, где

$$x_i = \begin{cases} 0, & i \in I, \\ 1, & i \notin I, \end{cases}$$

и как $\boldsymbol{x}^{(k)}$ и $\boldsymbol{x}$ лежат в $U(\mathcal{K})$. Определим $\boldsymbol{v}^{(k)} = k\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{y}^{(k)} = \boldsymbol{v}^{(k)} \cdot \boldsymbol{x}^{(k)}$, такие, что

$$y_i^{(k)} = e^{k\langle \gamma_i, \boldsymbol{v} \rangle} x_i^{(k)} = \begin{cases} 0, & i \in I \cap J, \\ 1, & i \in I \setminus J, \\ e^{k\langle \gamma_i, \boldsymbol{v} \rangle}, & i \notin I \end{cases} = \begin{cases} 0, & i \in I \cap J, \\ e^{-ks_i}, & i \in J \setminus I, \\ 1, & i \notin J. \end{cases}$$

Мы имеем $\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{y}^{(k)} = \boldsymbol{y}$, где

$$y_i = \begin{cases} 0, & i \in J, \\ 1, & i \notin J, \end{cases}$$

так как $\boldsymbol{y}^{(k)}$ и $\boldsymbol{y}$ лежат в $U(\mathcal{K})$. С другой стороны, подпоследовательность $\boldsymbol{v}^{(k)}$ не имеет предела в V. То есть, действие $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$ не является собственным. $\square$

Отметим, что теорема 2 имеет исключительно топологическую природу. С другой стороны, алгебраическая версия этой теоремы была известна ранее. 'Условие конуса' (свойство (a) Теоремы 1) являтся характерной особенностью конструкций торических многообразий (наиболее известна конструкция Кокса), это гарантирует, что фактор будет сепарабельным, то есть - хаусдорфовым в индуцированной топологии, побробнее в [CLS, Theorem 5.1.11]. Вариация условия (c) теоремы 1 известно как ‘imprication condition’ и возникала в работах по голоморфной механике.

Также заметим, что теорема 2 (2) является критерием; таким образом 'условие конуса' важно для классификационных результатов [IFM] и [I].

Пример 1. Рассмотрим действие $V = \mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^2$, определенное следующим образом

$$(v, (x_1, x_2)) \mapsto (e^{vx_1}, e^{vx_2}).$$

Мы имеем $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (1, 1)$, $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = (1, -1)$. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\Gamma) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$, такое, что $U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Вектора $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ образуют одномерный веер в $\mathbb{R}$, соответственно действие $\mathbb{R}$ на $U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ свободно и собственно, и фактор топологически гомеоморфен сфере (гладкому многообразию).

В более общем случае имеем $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (b, a)$, $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = (a, -b)$, $a, b \in \mathbb{R}_{\geq}$. Положив $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\Gamma) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$, имеем, что $U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Вектора $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ образуют одномерный веер в $\mathbb{R}$, соответственно действие $\mathbb{R}$ на $U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, аналогично предыдущему случаю фактор гомеоморфен сфере.

Теперь рассмотрим действие $V = \mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^2$ заданное немного иначе.

$$(v, (x_1, x_2)) \mapsto (e^{vx_1}, e^{-vx_2}).$$

В этом случае мы имеем $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (1, -1)$, $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = (1, 1)$. Внутренности конусов, порожденных $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ имеют непустое пересечение, таким образом действие $\mathbb{R}$ на $U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ не является собственным, и фактор - пространство не хаусдорфово.

6. Компактность

Предположим, что $\{\mathcal{K}, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ определяют симплициальнй веер $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$ в W^*, как описано в предыдущем параграфе. Веер Σ в W^* называется *полным* если объединение всех его конусов σ_i есть все W^*. Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$, соответствующий полному симплициальному вееру Σ задает симплициальное разбиение (*триангуляцию*) единичной сферы пространства W^*.

Сформулируем критерий компактности фактор-пространства при действии $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$. Напомним, что $k = \dim V$.

Предположим, что $\{\mathcal{K}, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ определяют симплициальный комплекс Σ в W^*. Положим $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ – двойственная по Гейлу конфигурация в V^* определяющая действие (1.1). Пусть ограничение этого действия на $U(\mathcal{K})$ свободно, собственно по теореме 2, следовательно, $U(\mathcal{K})/V$ является гладким многообразием.

Теорема 3. *Многообразие $U(\mathcal{K})/V$ компактно тогда и только тогда, когда веер Σ полный.*

Доказательство. Предположим, что Σ является полным веером. Поскольку $U(\mathcal{K})/V$ – метрическое пространство, то нам достаточно показать, что любая последовательность из $U(\mathcal{K})/V$ содержит сходящуюся подпоследовательность.

Возьмем некоторую последовательность точек в $U(\mathcal{K})/V$ и положим $\{\boldsymbol{x}^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}) \in U(\mathcal{K})\}$ – некоторые их образы. Покажем, что можно выбрать другие образы $\{\widetilde{\boldsymbol{x}}^{(n)}\}$ лежащие на одном листе с $\boldsymbol{x}^{(n)}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$, такие, что $\{\widetilde{\boldsymbol{x}}^{(n)}\}$ содержат сходящуюся подпоследовательность в $U(\mathcal{K})$. Это даст нам искомую последовательность в $U(\mathcal{K})/V$.

Поскольку количество симплексов в $\mathcal{K}$ конечно, мы можем выбрать подпоследовательность, такую что у любого ее элемента координаты с индексами из $J \in \mathcal{K}$ нулевые. То есть $x_j^{(n)} = 0$ для любого $j \in J$ и $x_j^{(n)} \neq 0$ для любого $j \notin J$, для любого n.

Проведем индукцию по $\dim W^* = m - k$. Пусть $\dim W^* = 1$. Определен одномерный конус $\{\mathcal{K}, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$, $\mathcal{K}$ имеет максимум две (не призрачные) вершины. Существует единственный одномерный веер (содержащий $\mathcal{K} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$), и этот случай рассмотрен ранее (см. пример 1).

Пусть $J \neq \varnothing$, тогда $(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}^{(n)})_j = 0$ для любого $j \in J$, $\boldsymbol{v} \in V$ и $n = 1, 2, \dots$. Рассмотрим $\operatorname{link}_{\mathcal{K}} J = \{I \in \mathcal{K} \colon I \cup J \in \mathcal{K},\ I \cap J = \varnothing\}$. Тогда данные $\{\operatorname{link}_{\mathcal{K}} J, \boldsymbol{a}_j \colon j \notin J\}$ определяют полный веер в фактор-пространстве $W^*/\langle \boldsymbol{a}_j \colon j \in J\rangle$, размерность которого меньше размерности W^*. То есть мы можем применить предположение индукции.

Теперь мы можем считать, что $J = \varnothing$, то есть, $x_j^{(n)} \neq 0$ для любых n и $j \in [m]$.

Для любого $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^m$ определим

$$\ell(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a}_i \log|x_i| \in W^*.$$

Для любого $\boldsymbol{v} \in V$ мы имеем

$$\begin{aligned}(6.1)\quad \ell(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a}_i \log\bigl(e^{\langle \gamma_i, \boldsymbol{v}\rangle}|x_i|\bigr)\\ &= \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a}_i \langle \gamma_i, \boldsymbol{v}\rangle + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a}_i \log|x_i| = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a}_i \log|x_i| = \ell(\boldsymbol{x}),\end{aligned}$$

поскольку сумма $\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a}_i \langle \gamma_i, \boldsymbol{v}\rangle = 0$ из двойственности Гейла.

Теперь для последовательности $\{\boldsymbol{x}^{(n)}\}$, рассмотрим $-\ell(\boldsymbol{x}^{(n)}) \in W^*$. Так как Σ полный веер в W^*, мы можем найти $I \in \mathcal{K}$ у которого $|I| = \dim W^*$, при этом бесконечное количество элементов последовательности $\{-\ell(\boldsymbol{x}^{(n)})\}$ лежат в конусе A_I. Перейдя к подпоследовательности, мы можем полагать, что $\{-\ell(\boldsymbol{x}^{(n)})\} \in \operatorname{cone} \mathrm{A}_I$ при любом натуральном n.

По предложению 4, конфигурация $\Gamma_{\widehat{I}}$ есть базис V^*, соответственно мы можем найти $\boldsymbol{v}^{(n)} \in V$ определенные соотношениями

$$\langle \gamma_i, \boldsymbol{v}^{(n)}\rangle = -\log|x_i^{(n)}|, \quad i \notin I.$$

и определить

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}^{(n)} = \boldsymbol{v}^{(n)} \cdot \boldsymbol{x}^{(n)}$$

Мы имеем

$$|\widetilde{x}_i^{(n)}| = |e^{\langle \gamma_i, \boldsymbol{v}^{(n)}\rangle} x_i^{(n)}| = 1, \quad i \notin I.$$

Вместе с равенством (6.1) получаем

$$\sum_{i\in I} \boldsymbol{a}_i \log|\widetilde{x}_i^{(n)}| = \ell(\widetilde{\boldsymbol{x}}^{(n)}) = \ell(\boldsymbol{x}^{(n)}) \in -\operatorname{cone} \mathrm{A}_I.$$

Это означает, что $\log|\widetilde{x}_i^{(n)}| \leqslant 0$ для любого $i \in [m]$ и $n = 1, 2, \dots$. Отсюда, $\{\widetilde{\boldsymbol{x}}^{(n)}\}$ ограниченная последовательность, то есть имеет подпоследовательность, сходящаюся в $\mathbb{R}^m$. Поскольку $|\widetilde{x}_i^{(n)}| = 1$ при $i \notin I$, предел может иметь нулевые координаты x_i только при $i \in I$, то есть этот лимит лежит в $U(\mathcal{K})$, что и требовалось.

Теперь предположим компактность пространства $U(\mathcal{K})/V$. Возьмем $\boldsymbol{a} \in W^*$. Для доказательства полноты веера Σ, нам нужно показать, что $\boldsymbol{a}$ принадлежит некоторому конусу в Σ. Распишем

$$(6.2)\qquad \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{a}_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

и рассмотрим кривую

$$(e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_m t}) \in U(\mathcal{K}).$$

Коэффициенты α_i определяются с точностью до соотношения $\langle \gamma_i, \boldsymbol{v} \rangle$, $\boldsymbol{v} \in V$, что соответствует изменению $(e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_m t})$ в пределах одной орбиты действия V. Поскольку $U(\mathcal{K})/V$ компактно, можно выбрать α_i таким образом, что $\lim_{t\to-\infty}(e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_m t})$ существует в $U(\mathcal{K})$. Это возможно только если все α_i неотрицательны и $I = \{i\colon \alpha_i > 0\} \in \mathcal{K}$. Тогда, по равенству (6.2) мы получаем вложение $\boldsymbol{a} \in \operatorname{cone} \mathrm{A}_I$, что и требовалось. □

7. Вещественные момент-угол-комплексы

Если фактор $U(\mathcal{K})\backslash V$ компактен, его можно описать с помощью следующей топологически-комбинаторной конструкции.

Конструкция 4 (Полиэдральное произведение)**.** Пусть нам дан симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на $[m]$ и последовательность

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \{(X_1, A_1), \dots, (X_m, A_m)\}$$

из m пар пространств с отмеченной точкой. Для подмножества $I \subset [m]$ мы рассмотрим

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I := \Bigl\{(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{k=1}^m X_k \colon\ x_k \in A_k \quad \text{for } k \notin I\Bigr\} \tag{7.1}$$

и определим *полиэдральное произведение* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$, соответствующее комплексу $\mathcal{K}$ как

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}} := \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \Bigl(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \notin I} A_i\Bigr) \subseteq \prod_{i=1}^m X_i.$$

В случае когда все пары (X_i, A_i) одинаковы, то есть $X_i = X$ и $A_i = A$ для $i = 1, \dots, m$, мы будем использовать определение $(X, A)^{\mathcal{K}}$ для $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}}$.

Понятно, что $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}} = \prod_{i=1}^m A_i$ если $\mathcal{K} = \varnothing$, и $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}} = \prod_{i=1}^m X_i$ когда $\mathcal{K}$ есть полый симплекс Δ^{m-1} на m вершинах. Приведем немного примеров.

Пример 2.
1. Понятно, что $U(\mathcal{K}) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^\times)^{\mathcal{K}}$, где $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. Пусть $(X, A) = (D^1, S^0)$, гдн D^1 есть замкнутый интервал (обозначение для $[-1, 1]$) и S^0 - его граница, составленая из двух точек. Полиэдральное произведение в этом случае $(D^1, S^0)^{\mathcal{K}}$ известно как *вещественное момент-угол-многообразие* [BP1, §3.5], [BP2]:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (D^1, S^0)^I.$$

Это кубический подкомплекс m-куба $(D^1)^m = [-1, 1]^m$. Когда $\mathcal{K}$ сожеожит m несвязных точек, $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ есть 1-мерный остов куба $[-1, 1]^m$. Если $\mathcal{K} = \partial\Delta^{m-1}$, мы имеем $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = \partial[-1, 1]^m$. В общем случе, если $\{i_1, \dots, i_k\}$ грань $\mathcal{K}$,то $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ содержит 2^{m-k} кубических грани размерности k, которые лежат в k-мерной плоскости, параллельной $\{i_1, \dots, i_k\}$-1 координатной плоскости.

Теорема 5. *Если $\{\mathcal{K}, \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$ определяет полный симплициальный конус, имеет место гомеоморфизм*

$$U(\mathcal{K})/V \cong \mathcal{R}_{\mathcal{K}}.$$

Доказательство. Мы имеем вложение пар $(D^1, S^0) \hookrightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{R}^\times)$, которое индуцирует вложение $\mathcal{R}_\mathcal{K} = (D^1, S^0)^\mathcal{K} \hookrightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{R}^\times)^\mathcal{K} = U(\mathcal{K})$.Таким образом, требуемый гомоморфизм будет следовать из того, что орбита действия V любой точки $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in U(\mathcal{K})$ пересекаеи $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ по единственной точке.

Аналогично теореме 3, мы можем предположить, что $x_i \neq 0$ для $i \in [m]$. Рассмотрим $\ell(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^m \boldsymbol{a}_i \log |x_i| \in W^*$. Так как Σ является полным веером, рассмотрим $I \in \mathcal{K}$, $|I| = \dim W^*$ такой, что $-\ell(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{cone} \mathrm{A}_I$. Для решения системы уравнений $\langle \gamma_i, \boldsymbol{v} \rangle = -\log |x_i|$, $i \notin I$, мы найдем $\widetilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x}$ на одной орбите с $\boldsymbol{x}$, определенный соотношением $|\widetilde{x}_i| = 1$ для $i \notin I$ и $|\widetilde{x}_i| \leqslant 1$ при $i \in I$. Эти соотношения дают вложение $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{R}_\mathcal{K}$. Таким образом, каждая V-орбита пересекает $\mathcal{R}_\mathcal{K}$.

Теперь предположим, что $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathcal{R}_\mathcal{K}$ лежат на одной V-орбите. По определению $\mathcal{R}_\mathcal{K}$, есть некоторый $I \in \mathcal{K}$ такой, что $|x_i| = 1$ для $i \notin I$ и $|x_i| \leqslant 1$ при $i \in I$, и $J \in \mathcal{K}$ такой, что $|x_j| = 1$ для $j \notin J$ и $|x_j| \leqslant 1$ for $j \in J$. Так как ℓ определяет V-орбиту по (6.1), мы получаем

$$\sum_{i \in I} \boldsymbol{a}_j \log |x_i| = \ell(\boldsymbol{x}) = \ell(\boldsymbol{x}') = \sum_{j \in J} \boldsymbol{a}_j \log |x'_j|.$$

Отсюда следует, что вектор, написанный выше лежит в $\operatorname{cone} \mathrm{A}_I \cap \operatorname{cone} \mathrm{A}_J = \operatorname{cone} \mathrm{A}_{I \cap J}$. Поскольку в нашем случае конус – симплициальный, то можно заключить, что $|x_i| = |x'_i|$ при $i \in [m]$. Отсюда, поскольку действие V сохраняет занки координат, мы получаем, что $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$, что и требовалось. $\square$

Следствие 1. *Заметим, что теорема 5 индуцирует на $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ гладкую структуру, если $\mathcal{K}$ - комплекс, соответствующий полному симплициальному вееру.*

Важность данного результата в следующем. Дано действие, которое описывается исключительно в терминах линейной алгебры и комбинаторики.

Свойств линейно-алгебраической системы достаточно, что бы это действие могло индуцировать гладкую структуру на фактор-пространстве.

Кроме того, оказывается, что этим фактором является известное в торической топологии многообразие, которое также задано исключительно комбинаторными методами. Заметим, что определение полиэдрального произведения не дает гладкой структуры на получаемом пространстве.

Наконец, совмещая два результата, получаем возможность рассматривать вещественные момент-угол-комплексы как объекты гладкой категории.

8. Случай многогранников

Как мы поняли ранее, фактор $U(\mathcal{K})/V$ является гладким многообразием тогда и только тогда, когда пара $\{\mathcal{K}, \mathrm{A}\}$ определяет полный симплициальный веер (см. теоремы 1, 2 и 3). Выделим один важный класс полных симплициальных вееров, которые получаются из простых многогранников следующим образом.

Конструкция 6 (Нормальный веер)**.** Пусть P выпуклый многогранник в W, заданный как пересечение m полупространств:

$$P = \{\boldsymbol{w} \in W \colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{w} \rangle + b_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \} \tag{8.1}$$

где $\boldsymbol{a}_i \in W^*$ и $b_i \in \mathbb{R}$. Мы предполагаем, что в этом представлении нет избыточных неравенств, то есть каждая

$$F_i = \{\boldsymbol{w} \in P \colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{w}\rangle + b_i = 0\}$$

является гипергрнью (гранью коразмерности 1) для P, и всего у многогранника m гиперграней. Рассмотрим грань $Q \subseteq P$ определяющую конус:

$$\sigma_Q = \{\boldsymbol{a} \in W^* \colon \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{w}'\rangle \leqslant \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{w}\rangle \text{ для любого } \boldsymbol{w}' \in Q \text{ и } \boldsymbol{w} \in P\}.$$

Двойственный конус

$$\sigma_Q^{\vee} = \{\boldsymbol{w} \in W \colon \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{w}\rangle \geqslant 0 \ \text{ для любого } \ \boldsymbol{a} \in \sigma_Q\}$$

является ‘полиэдральным углом’ соответствующим грани Q; он порожден всеми векторами $\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}'$ направленными от $\boldsymbol{w}' \in Q$ к $\boldsymbol{w} \in P$. Тогда

$$\Sigma_P = \{\sigma_Q \colon Q \text{ является гранью } P\}$$

есть полный веер Σ_P в W^*, который обозначается как Σ_P и называется *нормальным веером* многогранника P.

Пусть теперь $\mathbf{0}$ содержится во внутренности P, что эквивалентно соотношениям $b_i > 0$ при $i = 1, \dots, m$ in (8.1). Тогда Σ_P может быть описан как набор конусов над гранями двойственного многогранника

$$P^* = \{\boldsymbol{a} \in W^* \colon \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{w}\rangle + 1 \geqslant 0 \text{ для любого } \boldsymbol{w} \in P\}.$$

Более того, если $b_i > 0$ для $i = 1, \dots, m$, то $P^* = \operatorname{conv}(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m)$.

Нормальный веер Σ_P является симплициальным тогда и только тогда, когда многогранник P простой, то есть $n = \dim W$ гиперграней пересекаются в каждой вершине P. В этом случае определение Σ_P может быть упрощено: конуса Σ_P порождены множествами векторов $\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_k}\}$ для которых пересечение $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}$ непусто, определим *двойственный симплиципальный комплекс* как

$$\mathcal{K}_P = \bigl\{I = \{i_1, \dots, i_k\} \colon F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \neq \varnothing\bigr\}.$$

Тогда симплициальный веер Σ_P определен данными $\{\mathcal{K}_P, \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$.

Теперь докажем аналог Теоремы 1 для нормальных вееров.

Пусть, как и раньше конфигурации A, Γ - двойственны по Гейлу. Рассмотрим вектор $\delta \in V^*$ такой что:

$$\delta \in \operatorname{int} \operatorname{cone} \Gamma_{\widehat{I}}, \{a_{i_1}, \cdots, a_{i_p}\} - \text{линейно независимы}$$

Отметим, что мы рассматриваем внутренность в пространстве $V^* \cong \mathbb{R}^k$, то есть $p = k$. Рассмотрим набор подмножеств $[m]$, порожденный парой $\{\Gamma, \delta\}$:

$$\mathcal{K}_{\{\Gamma,\delta\}} : I \in \mathcal{K}_{\{\Gamma,\delta\}} \Longleftrightarrow \delta \in \operatorname{int} \operatorname{cone} \ \Gamma_{\widehat{I}}$$

Поскольку $\delta \in \operatorname{int} \operatorname{cone} \Gamma_{\widehat{I}}$, то для любого малого $\varepsilon \in V^*$ имеем:

$$\delta + \varepsilon \in \operatorname{int} \operatorname{cone} \Gamma_{\widehat{I}}$$

Следовательно, учитывая утверждение 5 получаем, что $\mathcal{K}_{\{\Gamma,\delta\}}$ - симплициальный комплекс. Максимальная размерность симплексов в нем $m - k$.

Лемма 2. *Пусть* $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}, \Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ *- двойственные по Гейлу конфигурации. Если существует вектор* $\delta \in V^*$ *и подмножество* $I, |I| = m - k$, *такие что* $\delta \in \operatorname{int} \operatorname{cone} \Gamma_{\widehat{I}}$, *то веер* $\Sigma = \{\mathcal{K}_{\{\Gamma,\delta\}}, A\}$ *- нормальный веер некоторого простого полиэдра.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную линейную комбинацию, из которого определим вектор $\boldsymbol{b}$:

$$\delta = \sum_{i=1}^{m} b_i \gamma_i, b_i \geq 0, \forall i \in [m]$$

При таком выборе $\boldsymbol{b}$, система (8.1) задает полиэдр P с нормалями $\{\boldsymbol{a}_i, i \in [m]\}$. Докажем, что $\mathcal{K}_P = \mathcal{K}_{\{\Gamma,\delta\}}$, то есть комбинаторика P задается симплициальным комплексом $\mathcal{K}_{\{\Gamma,\delta\}}$. Обозначим за $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{w})$ вектор-функцию:

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{w}) = A^* \boldsymbol{w} + \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$$

Рассмотрим точку $\boldsymbol{w}$ многогранника. Возьмем грань минимальной размерности, в которой она лежит. Эта грань многогранника задается гранью симплекса $I \in \mathcal{K}_P$, для которой:

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{w})_i = (A^* \boldsymbol{w} + \boldsymbol{b})_i = 0, i \in I$$

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{w})_j = (A^* \boldsymbol{w} + \boldsymbol{b})_j > 0, j \in \widehat{I}$$

Применив к системе неравенств преобразование Γ, получим:

$$\delta = \sum_{i=1}^{m} b_i \gamma_i = \Gamma \boldsymbol{b} = \Gamma \boldsymbol{c}(\boldsymbol{w}) = \sum_{i \in \widehat{I}} \boldsymbol{c}(\boldsymbol{w})_i \gamma_i$$

Таким образом мы доказали, что $I \in \mathcal{K}_{\{\Gamma,\delta\}}$ для любого $I \in \mathcal{K}$.

Для любого симплекса $I \in \mathcal{K}_{\{\Gamma,\delta\}}$ существует разложение:

$$\delta = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \gamma_i : \lambda_i = 0, i \in I; \lambda_i > 0, i \notin I$$

Обозначим вектор $\Lambda = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$. Тогда вектор $\Lambda - \boldsymbol{b}$ лежит в ядре отображения Γ, поскольку $\delta = \Gamma\Lambda = \Gamma\boldsymbol{b}$ по определению. Отсюда, в силу точной последовательность из определения двойственности Гейла получаем, что $\Lambda - \boldsymbol{b}$ лежат в образе отображения A^*, то есть:

$$\exists \boldsymbol{w} : A^* \boldsymbol{w} + \boldsymbol{b} = \Lambda$$

Таким образом точка $\boldsymbol{w} \in P$ лежит в пересечении $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_p}, I = \{i_1, \cdots, i_p\}$. Значит $I \in \mathcal{K}_P$ для любого множества $I \in \mathcal{K}_{\{\Gamma,\delta\}}$, что и требовалось доказать. □

Благодаря этой лемме мы можем строить полиэдры по паре $\{\Gamma, \delta\}$. Сформулируем критерий, в который формулирует необходимое и достаточное условие того, что эта пара задает многогранник.

Предложение 6. *Полиэдр P, заданный парой $\{\Gamma, \delta\}$ является многогранником тогда и только тогда, когда $\{A, \mathcal{K}_{\{\Gamma,\delta\}}\}$ - полный веер.*

Доказательство. Предположим, что полиэдр является многогранником. Тогда по определению нормального веера получаем, что он полный. Заметим, что полиэдр P не является ограниченным, тогда и только тогда, когда существуют $\alpha, \boldsymbol{w}_0 \in W$, такие, что:

$$\boldsymbol{w}_0 + \alpha t \in P, \forall t \geq 0$$

Подставив это выражение в систему неравенств, получим:

$$A^*(\boldsymbol{w}_0 + \alpha t) + \boldsymbol{b} = tA^*\alpha + (\boldsymbol{b} + A^* \boldsymbol{w}_0) \geq 0, \forall t \geq \boldsymbol{0}$$

То есть для неограниченного полиэдра существует $\alpha \in W$, такой что $\langle \boldsymbol{a}_i, \alpha \rangle \geq 0$ для любого $i \in [m]$.

Предположим, что веер - полный. Тогда для любого ненулевого вектора $\alpha^* \in W^*$ существует множество $I \in \mathcal{K}_{\{\Gamma,\delta\}}$, такое что:

$$-\alpha^* = \sum_{i \in \widehat{I}} \lambda_i \boldsymbol{a}_i, \lambda_i > 0$$

Рассмотрим вектор $\alpha \in W$ такой, что $|\alpha|^2 = \langle \alpha^*, \alpha \rangle$. Получаем равенство:

$$-|\alpha|^2 = \langle -\alpha^*, \alpha \rangle = \sum_{i \in \widehat{I}} \lambda_i \langle \boldsymbol{a}_i, \alpha \rangle, \lambda_i > 0$$

Таким образом, существует $i \in [m]$, такое что $\langle a_i, \alpha \rangle < 0$. Отсюда следует, что если веер - полный, то полиэдр - ограничен, то есть он является многогранником.

□

Теорема 7. *Пусть $\mathcal{K}$ симплициальный комплекс на $[m]$, $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}, \Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ - двойственные по Гейлу конфигурации. Следующие условия эквивалентны:*

(a) *Данные $\{\mathcal{K}, \mathrm{A}\}$ определяют нормальный веер Σ некоторого многогранника P.*
(b) *Существует $\delta \in V^*$, такой что $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\{\Gamma,\delta\}}$, и $\{A, \mathcal{K}_{\{\Gamma,\delta\}}\}$ - полный веер.*

Доказательство. Пусть верно (a), пусть веер $\Sigma = \Sigma_P$ является нормальным веером для некоторого P заданного как пересечение полупространств (см. (8.1)). Рассмотрим вектор δ, заданный следующим образом:

$$\delta = \sum_{i=1}^{m} b_i \gamma_i = \Gamma \boldsymbol{b}$$

Покажем, что $\delta \in \bigcap_{I \in \mathcal{K}} \operatorname{int} \operatorname{cone} \Gamma_{\widehat{I}}$. Определим вектор-функцию $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})$ следующим образом:

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{w}) = A^* \boldsymbol{w} + \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}, \ \forall w \in P$$

Отсюда, в силу двойственности Гейла имеем:

$$\Gamma A^* \boldsymbol{w} + \Gamma \boldsymbol{b} = \Gamma \boldsymbol{c}(\boldsymbol{w}),$$
$$\delta = \Gamma \boldsymbol{c}(\boldsymbol{w})$$

Рассмотрим грань многогранника, соответствующую симплексу I, то есть $x \in \bigcap_{i \in I} F_i$, получаем:

$$(\boldsymbol{c}(\boldsymbol{w}))_i = (A^* \boldsymbol{w} + \boldsymbol{b})_i = 0, \ \forall i \in I,$$
$$c(\boldsymbol{w})_i > 0, \ \forall i \notin I.$$

То есть $\delta \in \operatorname{int} \operatorname{cone} \Gamma_{\widehat{I}}$. Равенство комплексов $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\{\Gamma,\delta\}}$ следует из леммы 2.

Предположим теперь, что верно (b). По данным $\{\Gamma, \delta\}$ согласно лемме 2 существует полиэдр с заданным нормальным веером. По предложению 6 он является многогранником. □

Рассмотрим это действие на множестве

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\{i_1,\dots,i_p\}\notin\mathcal{K}} \{\boldsymbol{z}\colon |z_{i_1}| = \dots = |z_{i_p}| = 0\}. \tag{8.2}$$

9. Lp – нормы

Конструкция 8 (Диаграмма Гейла)**.** Пусть, как ранее, заданы конфигурации Γ, A. Введем базис в пространстве W и определим конфигурацию $\widetilde{A} = \{\widetilde{\boldsymbol{a}}_1, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{a}}_m\}, \widetilde{\boldsymbol{a}}_i = (\boldsymbol{a}_i^*, 1)^*$ Конфигурацию $G = \{\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m\}$ определим как двойственную к $\widetilde{A}$. Вектора $\boldsymbol{g}_i, i \in [m]$ лежат в пространстве $\widetilde{V}^*$.

Вернемся к момент-угол-комплексам. Пусть дан простой многогранник P - тогда по нему определяются симплициальный комплекс $\mathcal{K}$, двойственные по Гейлу конфигурации A, Γ. Согласно [BP2] момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_P$ задается системой k уравнений:

$$\mathcal{Z}_P = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^m : \sum_{i=1}^m \gamma_i |z_i|^2 = \sum_{i=1}^m \gamma_i b_i\}$$

Использую диаграмму Гейла, после нормирования координат, $\mathcal{Z}_P$ можно задать системой уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m |z_i|^2 = 1, \\ \sum_{i=1}^m \boldsymbol{g}_i |z_i|^2 = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{9.1}$$

Заметим, что это определение использует L_2-норму на пространстве $\mathbb{C}^m$. Аналогично рассматривать момент-угол-комплекс на пространстве с L_p-нормой.

$$\begin{cases} ||z_i||_p = 1, \\ \sum_{i=1}^m \boldsymbol{g}_i |z_i|^p = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{9.2}$$

Далее в этих обозначениях будет изложена конструкция, в которой конфигурация G не обязательно порождается некоторым многогранником. Момент-угол-комплекс, заданный описанной системой уравнений в L_p-норме будем обозначать как $\mathcal{Z}(p)$.

Конструкция 9 (Допустимая центрированная конфигурация)**.** Пусть конфигурация G обладает условиями:

(a) $\boldsymbol{0} \in conv(G)$ (Условие Зигеля)
(b) если $\boldsymbol{0} \in conv(G_I)$, то $|I| \geq m - n$ (Условие слабой гиперболичности)
(c) $\sum_{i=1}^m \boldsymbol{g}_i = 0$ (Условие центрированности)

Конфигурацию, которая удовлетворяет условиям $(a), (b)$ назовем *допустимой.* Всеми тремя условиями - *допустимой и центрированной.*

Аналогично действию 1.1 определим действие:

$$\begin{aligned} &T \times \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m \\ &(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{z}) \mapsto \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{z} = \left(e^{\langle \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{T}\rangle} z_1, \dots, e^{\langle \boldsymbol{g}_m, \boldsymbol{T}\rangle} z_m\right) \end{aligned} \tag{9.3}$$

Обозначим через $Cl(M)$ - замыкание множества M. Действие 10.3 разбивает пространство на листы $L_z, z \in \mathbb{C}^m$, которые бывают двух типов:

(a) $\boldsymbol{0} \in Cl(L_z)$ - Листы Пуанкаре
(b) $\boldsymbol{0} \notin Cl(L_z)$ - Листы Зигеля

С конфигурацией G свяжем симплициальный комплекс $\mathcal{K}_G$, заданный как:

$$\mathcal{K}_G = \{I \subset [m] : \boldsymbol{0} \in conv(G_{\widehat{I}})\}$$

Объединением листов Зигеля является множество $U(\mathcal{K}_G)$ - этот результат описан во многих книгах, в частности в [BP2].

Определим функции:

$$f_p : U(\mathcal{K}_G) \mapsto U(\mathcal{K}_G), ||f_p(z)||_p - \text{минимальна на листе } L_z,$$
$$T_p : U(\mathcal{K}_G) \mapsto \mathbb{R}^{k-1}, f_p(z) = F(z, T_p(z))$$

При предельном переходе $p \to \infty$ можно установить гомеоморфизм между $\mathcal{Z}(p)$ - полученный как пересечения квадрик и $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_G}$ - полученный полиэдральным произведением, при определенных условиях на конфигурацию G.

В работе [C] можно найти следующие результаты:

Теорема 10. *В определенных выше терминах:*

(a) *Если конфигурация G - допустима, то ограничение отображения $f_2/||f_2||_2$ на $\mathcal{Z}(p)$ есть гомеоморфизм $\mathcal{Z}(p) \to \mathcal{Z}(2)$. Обратное отображение $\mathcal{Z}(2) \to \mathcal{Z}(p)$ задано как ограничение на $\mathcal{Z}(2)$ отображения $f_p/||f_p||_p$.*

(b) *Если конфигурация G - допустима и ценирирована, то ограничение функции $f_2/||f_2||_2$ на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ (отображение $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \to \mathcal{Z}_P$, заданное этой формулой) – является гомеоморфизмом. При этом обратное отображение задается как ограничение отображения $f_\infty/||f_\infty||_\infty$ на $\mathcal{Z}_P(2)$*

Свяжем эти результаты с предыдущими в терминах конфигураций Γ, G.

Рассмотрим конфигурацию $G = \{\boldsymbol{g}_1, \dots \boldsymbol{g}_m\}$. Пусть она допустима и центрирована (конструкция 9). Построим конфигурации $\widetilde{A}, A$ согласно конструкции 8. Таким образом, по допустимой центрированной конфигурации G определим многогранники:

$$P_G = \{\boldsymbol{x} \in W^* : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i \rangle + 1 \geq 0 \text{ для любого } i \in [m]\},$$
$$P_G^* = conv\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$$

Их свойства раскрыты в следующей теореме.

Теорема 11. *Пусть G, A, Γ - конфигурации из m векторов, описанные выше. Тогда:*

(a) *Для простого многогранника, заданного системой 8.1, конструкция 8, дает допустимую и ценирированную конфигурацию G.*

(b) *Многогранник P_G имеет комбинаторику, заданную комплексом $\mathcal{K}_G$, то есть двойственный симплициальный комплекс $\mathcal{K}_{P_G} = \mathcal{K}_G$.*

Доказательство. Утверждение 1.2.9 книги [BP2] говорит, что:

$$\boldsymbol{0} \in conv(G_{\widehat{I}}) \Longleftrightarrow \{F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_p} \neq \varnothing\},$$
$$I = i_1, \dots, i_p,$$
$$F_{i_l} = \{\boldsymbol{w} \in P : \langle a_{i_l}, \boldsymbol{w} \rangle + 1 = 0\}$$

Отсюда получаем, что конфигурация G - допустима. Условие на симплициальные комплексы из утверждения (b) так же следует из этого утверждения. Центрированность диаграммы следует из конструкции 8. □

Таким образом, для того, что бы имел место гомеоморфизм из пункта (b) теоремы 10 достаточно, что бы диаграмма G получалась конструкцией 8 из некоторого простого многогранника.

Список литературы

[ADHL] Arzhantsev, Ivan; Derenthal, Ulrich; Hausen, Jürgen; Laface, Antonio. *Cox rings.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 144. Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

[BP1] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Torus actions, combinatorial topology and homological algebra.* Uspekhi Mat. Nauk **55** (2000), no. 5, 3–106 (Russian). Russian Math. Surveys **55** (2000), no. 5, 825–921 (English).

[BP2] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Toric Topology.* Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[C] Cai, Li. *Norm minima in certain Siegel leaves.* Algebr. Geom. Topol. 15 (2015), no. 1, 445–466.

[CLS] Cox, David A.; Little John B.; Schenck, Henry K. *Toric varieties.* Graduate Studies in Mathematics, 124. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[F] Fulton, William. *Introduction to Toric Varieties.* Annals of Mathematics Studies, 131. The William H. Roever Lectures in Geometry. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

[I] Ishida, Hiroaki. *Complex manifolds with maximal torus actions.* Preprint (2013), arXiv:1302.0633.

[IFM] Ishida, Hiroaki; Fukukawa, Yukiko; Masuda, Mikiya. *Topological toric manifolds.* Mosc. Math. J. 13 (2013), no. 1, 57–98.

[L] Lee, John M. *Introduction to smooth manifolds.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer, New York, 2013.

[PU] Panov, Taras; Ustinovsky, Yuri. *Complex-analytic structures on moment-angle manifolds.* Moscow Math. J. **12** (2012), no. 1, 149–172.