ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

# «СЛОЕНИЯ, ЗАДАВАЕМЫЕ КОНФИГУРАЦИЯМИ ВЕКТОРОВ, ДВОЙСТВЕННОСТЬ ГЕЙЛА И МОМЕНТ-УГОЛ-МНОГООБРАЗИЯ»

ВЫПОЛНИЛ СТУДЕНТ
603 ГРУППЫ
СТРУМЕНТОВ МАКСИМ АНДРЕЕВИЧ

подпись студента

Научный руководитель:
Профессор, д.ф-м.н. Панов Тарас Евгеньевич

подпись научного руководителя

Москва
2020 г.

## 1. Наборы векторов и действия

Пусть $V \cong \mathbb{R}^k$ - есть $k$-мерное векторное вещественное пространсиво, и $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ последовательность (*конфигурация*) $m$ векторов в двойственном пространстве $V^*$. Повторения векторов в наборе $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ допустимы, но предполагаем, что их выпуклая оболочка порождает все пространство $V^*$. Так же предполагаем, что никакой из векторов в $\Gamma \neq 0$, поскольку в таком случае действие редуцируется к действию с меньшим $m$. Рассмотрим действие $V$ на $\mathbb{R}^m$ заданное следующим образом.

$$
\begin{aligned}
V \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\
(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) &\mapsto \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} = \big(e^{\langle \gamma_1, \boldsymbol{v} \rangle} x_1, \ldots, e^{\langle \gamma_m, \boldsymbol{v} \rangle} x_m\big).
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

Это классический пример динамической системы, восходящей к работам Пуанкаре. Есть хорошо известная связь между линейными свойствами набора векторов $\Gamma$ и топологии слоения $\mathbb{R}^m$ на орбиты действия (1.1) и их фактор-пространством (*пространством листов*). В работе будут систематизированы и описаны имеющиеся знания об этой связи и будет изучена топология пространства листов методами торической топологии.

## 2. Невырожденные уровни

Рассмотрим подмножество $U \subset \mathbb{R}^m$, такое, что ограничение действия (1.1) на него - свободно.

**Предложение 1.** *Орбита $V\boldsymbol{x}$ точки $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ под действием* (1.1) *свободна тогда и только тогда, когда линейная оболочка подмножества $\{\gamma_i \colon x_i \neq 0\} \subseteq \Gamma$ порождает все пространство $V^*$.*

*Доказательство.* От противного, пусть $V\boldsymbol{x}$ не является свободной, то есть существует вектор $\boldsymbol{v} \neq 0$ такой, что

$$(x_1 e^{\langle \gamma_1, \boldsymbol{v} \rangle}, \ldots, x_m e^{\langle \gamma_m, \boldsymbol{v} \rangle}) = (x_1, \ldots, x_m).$$

Тогда $\langle \gamma_i, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ для $x_i \neq 0$, что означает, что векторы $\gamma_i$, для которых $x_i \neq 0$ не порождают $V^*$.

Обратно, если $\{\gamma_i \colon x_i \neq 0\} \subseteq \Gamma$ не порождает все пространство $V^*$, тогда существует вектор $\boldsymbol{v} \neq 0$ такой, что $\langle \gamma_i, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ для $x_i \neq 0$, отсюда орбита $V\boldsymbol{x}$ не является свободной. $\square$

Введем следующие обозначения. Пусть $[m] = \{1, \ldots, m\}$, рассмотрим подмножество $I = \{i_1, \ldots, i_p\} \subseteq [m]$. Для каждого $I$ отпределим

$$\Gamma_I := \{\gamma_i \colon i \in I\} \subseteq \Gamma.$$

Пусть $\widehat{I} := [m] \setminus I$ дополнение к множеству. Положим

$$\mathcal{K}(\Gamma) = \{I \subseteq [m] \colon \Gamma_{\widehat{I}} \text{ порождают } V^*\}.$$

*Симплициальный комплекс* на $[m]$ это набор $\mathcal{K}$ подмножеств $[m]$ такой, что для каждого $I \in \mathcal{K}$ все подмножества $I$ также принадлежат $\mathcal{K}$. Будем называть $I \in \mathcal{K}$ *симплексом* (или *гранью*) $\mathcal{K}$. Здесь и далее считаем, что $\varnothing$ содержится в $\mathcal{K}$. Не подразумевается, что $\mathcal{K}$ содержит все одноэлементные множества $\{i\}$. Будем называть $\{i\} \in \mathcal{K}$ *вершиной*, а $\{i\} \notin \mathcal{K}$ *призрачной вершиной.* Симплициальный комплекс называется *чистым* если все его максимальные грани имеют одинаковую размерность.

**Предложение 2.** $\mathcal{K}(\Gamma)$ *чистый симплициальный комплекс размерности* $m-k-1$.

*Доказательство.* Если $\Gamma_{\widehat{I}}$ порождает $V^*$, то $\Gamma_{\widehat{J}} \supset \Gamma_{\widehat{I}}$ для любого $J \subset I$. Следовательно, $\mathcal{K}(\Gamma)$ является симплициальным комплексом. Если $\Gamma_{\widehat{I}}$ порождает $V^*$, значит он содержит базис $V^*$. Пусть этот базис есть $\Gamma_{\widehat{L}}$ для некоторого $L$ такого что $I \subset L$ и $|L| = m - |\Gamma_{\widehat{L}}| = m - k$. Отсюда следует, что $\mathcal{K}(\Gamma)$ чистый и размерности $(m-k-1)$. □

Сопоставим симплициальному комплексу $\mathcal{K}$ на $[m]$, подмножество в $\mathbb{R}^m$, являющееся дополнением до некоторого набора координатных подпространств:

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^m \setminus \bigcup_{\{i_1,\dots,i_p\}\notin\mathcal{K}} \{\boldsymbol{x}\colon x_{i_1} = \dots = x_{i_p} = 0\}. \tag{2.1}$$

Понятно, что дополнение до любого набора координатных подпространств реализуется на некотором $\mathcal{K}$. Например $\mathcal{K} = \{\varnothing\}$, получим $U(\mathcal{K}) = (\mathbb{R}^\times)^m$, где $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, и если $\mathcal{K}$ содержит все собственные подмножества $[m]$, то $U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$.

**Предложение 3.** *Ограничение действия* (1.1) *на* $U(\mathcal{K})$ *свободно тогда и только тогда, когда* $\mathcal{K}$ *– симплициальный подкомплекс в комплексе* $\mathcal{K}(\Gamma)$.

*Доказательство.* Возьмем любую $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_m) \in U(\mathcal{K})$. Положим $I := \{i\colon x_i = 0\} \in \mathcal{K}$. Для $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}(\Gamma)$, рассмотрим $\Gamma_{\widehat{I}} = \{\gamma_i\colon x_i \neq 0\}$ порождающую $V^*$. Тогда орбита $V\boldsymbol{x}$ свободна по Предложению 1.

Обратно - ограничение действия свободно, значит $\Gamma_{\widehat{I}} = \{\gamma_i\colon x_i \neq 0\}$ порождает $V^*$, следовательно $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}(\Gamma)$ по определению $\mathcal{K}(\Gamma)$. □

## 3. Двойственность Гейла

Когфигурация $\Gamma$ определяет линейное отображение $\mathit{\Gamma}\colon \mathbb{R}^m \to V^*$, которое переводит $i$-й стандартный вектор $\boldsymbol{e}_i$ в $\gamma_i$. Положим $W := \operatorname{Ker}\mathit{\Gamma}$, тогда имеет место точная последовательность:

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow \mathbb{R}^m \xrightarrow{\mathit{\Gamma}} V^* \longrightarrow 0. \tag{3.1}$$

Так как $\Gamma$ порождает $V^*$, пространство $W^*$ имеет размерность $n := m - k$. Рассмотрим двойственную последовательность:

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{\mathit{\Gamma}^*} (\mathbb{R}^m)^* \xrightarrow{A} W^* \longrightarrow 0,$$

где отображение $\mathit{\Gamma}^*$ таково, что $\boldsymbol{v}$ отображается в $(\langle\gamma_1,\boldsymbol{v}\rangle,\dots,\langle\gamma_m,\boldsymbol{v}\rangle)$.

Положим $\boldsymbol{a}_i := A(\boldsymbol{e}_i)$. Конфигурацию векторов $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m\}$ в $W^*$ будем называть (линейной) *двойственной по Гейлу*, (или *преобразованием Гейла*), к конфигурации $\Gamma = \{\gamma_1,\dots,\gamma_m\}$. Заметим, что $\Gamma$ является двойственной по Гейлу к $\mathrm{A}$.

После выбора базиса в $V$ и $W$, получим $\mathit{\Gamma}$ определяется $k\times m$-матрицей, с вектор-столбцами $\gamma_1,\dots,\gamma_m$ и $A$, являющаяся $n\times m$-матрицей с вектор-столбцами $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m$. По определению $A\mathit{\Gamma}^* = 0$, то есть по строкам матрицы $A$ записан базис в пространстве линейных зависимостей между $\gamma_1,\dots,\gamma_m$.

**Предложение 4.** *Для любого* $I \subseteq [m]$, *вектора в* $\mathrm{A}_I$ *линейно независимы в* $W^*$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma_{\widehat{I}}$ *порождают* $V^*$.

*Доказательство.* По двойственности, $\gamma_j$ - суть $j$-й векторный коэфициент линейной зависимости между $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$. Если вектора $\boldsymbol{a}_i$, $i \in I$, линейно независимы, тогда в любом линейном соотношении между $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ есть ненулевой коэффициент для некоторого $j \in \widehat{I}$. К тому же в конфигурации $\Gamma$ отсутствуют нулевые вектора. Следовательно, линейная функция $\gamma_j$, $j \in \widehat{I}$, порождает $V^*$. Обратно, если есть линейная зависимость между $\boldsymbol{a}_i$, $i \in I$, то для каждого $j \in \widehat{I}$ $j$-й коэффициент функции $\gamma_j$ входит в данное соотношение. Следовательно, $\{\gamma_j,\, j \in \widehat{I}\}$, не порождает $V^*$. □

## 4. Полиэдральные конусы и веера

В этом разделе перечислим необходимые факты о веерах и конусах. Более подробную информацию можно найти в [F, Раздел 1] и [CLS, Разделы 1 и 3].

Подмножество $\sigma$ вещественного линейного пространства $L$ называется *выпуклым полиэдральным конусом*, или просто *конусом*, если оно образовано всеми неотрицательными линейными комбинациями набора векторов $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ в $L$. Обозначение

$$\sigma = \operatorname{cone}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \ \lambda_i \geq 0$$

Множество векторов может быть пусто, и в этом случае $\operatorname{cone}(\varnothing) = \mathbf{0}$. Размерностью конуса $\sigma$ называется разерность его выпуклой оболочки.

*Множество образующих* конуса $\sigma$ это множество векторов $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ таких что $\sigma = \operatorname{cone}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$. Минимальное по включению множество образующих определено единственным способом, с точностью до умножения векторов на положительные константы. Конус называется *симплициальным*, если его минимальное порождающее множество линейно независимо.

*Опорной гипергранью* полиэдрального конуса $\sigma \subseteq L$ называется гиперплоскость $H$ такая, что $\sigma$ содержится в одном из замкнутых полупространств, ограниченных $H$. *Грань* конуса $\sigma$ это пересечение $\sigma$ с опорной гипергранью. Также будем считать, что $\sigma$ грань сама себя; грани, отличные от $\sigma$ называются *собственными*. Дополнение ко всем собственным граням в $\sigma$ называется *внутренностью* $\sigma$ и обозначается $\operatorname{relint} \sigma$; можно показать, что она совпадает со внутренностью $\sigma$ как линейной оболочки. Заметим, что $\operatorname{relint} \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Обозначим $H_{\boldsymbol{u}} := \{\boldsymbol{l} \in L \colon \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{l} \rangle = 0\}$ гиперплоскость, определенная ненулевым вектором $\boldsymbol{u} \in L^*$, и обозначим $H_{\boldsymbol{u}}^+$ и $H_{\boldsymbol{u}}^-$ порожденные ей замкнутые полупространства. Иногда будем считать $\boldsymbol{u}$ нулевым, и в этом случае $H_{\boldsymbol{u}}$ это все пространство $L$, а не гиперплоскость.

**Предложение 5.** *Если $\sigma = \operatorname{cone}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$ конус в $L$, то $\boldsymbol{v} \in \operatorname{relint} \sigma$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ для некоторых положительных $\lambda_i \in \mathbb{R}$.*

*Доказательство.* Случай $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ очевиден, так что предположим, что $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$.

Пусть $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ с $\lambda_i > 0$. Предположим $\boldsymbol{v} \notin \operatorname{relint} \sigma$. Тогда $\boldsymbol{v}$ определяет собственную грань конуса $\tau$ в $\sigma$, то есть существует опорная гиперплоскость $H_{\boldsymbol{u}}$ с $\boldsymbol{u} \in V^*$, такая что $\sigma \subseteq H_{\boldsymbol{u}}^+$ и $\boldsymbol{v} \in H_{\boldsymbol{u}} \cap \sigma = \tau$. Следовательно, $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$. С другой стороны, $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_i \rangle > 0$, поскольку каждый $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_i \rangle$ неотрицателен и $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_i \rangle > 0$ по крайней мере для одного $i$ если $\tau$ является собственной гранью. Противоречие.

Теперь пусть $\boldsymbol{v} \in \operatorname{relint} \sigma$. Легко заметить, что для любого $\boldsymbol{v}' \in \sigma$ существует $\boldsymbol{v}'' \in \sigma$ такой, что $\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}'' = \mu \boldsymbol{v}$ для некоторого $\mu > 0$. Положив $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}_i$

получаем $\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}''_i = \mu_i \boldsymbol{v}$ для $\boldsymbol{v}''_i \in \sigma$ и $\mu_i > 0$. Распишем каждый $\boldsymbol{v}''_i$ как невырожденную линейную комбинацию $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ и просуммировав по всем $i$ имеем $\sum_{i=1}^{p} \nu_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \boldsymbol{v}$ для некоторого $\nu_i > 0$. что и требовалось. $\square$

**Лемма 1** (Лемма об отделимости)**.** *Пусть $\sigma_1$ и $\sigma_2$ из $V$. Тогда, если они различны, то следующие условия эквивалентны:*

(a) *пересечение $\sigma_1$ и $\sigma_2$ - грань каждого из конусов;*
(b) *конуса $\sigma_1$ и $\sigma_2$ отделимы гиперплоскостью, то есть существует гиперплоскость $H$, такая что*

$$\sigma_1 \subseteq H^+, \quad \sigma_2 \subseteq H^- \quad \text{и} \quad H \cap \sigma_1 = H \cap \sigma_2 = \sigma_1 \cap \sigma_2.$$

Данный факт оставим без доказательства, сославшись на [F, §1.2] or [CLS, Лемма 1.2.13].

*Веером* называется конечный набор конусов $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$ в $L$ такой, что каждая грань конуса из $\Sigma$ лежит в $\Sigma$, и пересечение любых двух конусов лежит в $\Sigma$. Будем рассматривать только *симплициальные* веера, то есть веера, составленные из симплициальных конусов.

Вернемся к рассмотрению наборов векторов в $V^*$ и $W^*$. Пусть $\Sigma$ симплициальный веер в $W^*$, а $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ порождающие одномерных конусов в $\Sigma$. *Порождающим симплициальным комплексом* $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma$ называется набор подмножеств $I \subseteq [m]$ Такой что $\{\boldsymbol{a}_i : i \in I\}$ порождают конус в $\Sigma$.

Таким образом симплициальный веер $\Sigma$ может быть определен из двух следующих объектов:

- симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на $[m]$;
- набор векторов $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ в $W^*$ такой, что для любого $I \in \mathcal{K}$ подмножество $\mathrm{A}_I = \{\boldsymbol{a}_i : i \in I\}$ линейно независимо.

Обратно, если дан симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ и набор векторов $\mathrm{A}$, мы можем определить симплициальный конус $\sigma_I = \mathrm{cone}(\mathrm{A}_I)$ для каждого $I \in \mathcal{K}$. 'Пучок конусов' $\{\sigma_I : I \in \mathcal{K}\}$ является веером $\Sigma$ если любые два конуса $\sigma_I$ и $\sigma_J$ пересекаются по собственной грани (которая соответствует $\sigma_{I\cap J}$). В связи с этим, будем говорить, что данные $\{\mathcal{K}, \mathrm{A}\}$ *определяют веер* $\Sigma$.

Имеет место следующий критерий, сформулированный исключительно в терминах векторных конфигураций.

**Теорема 1.** *Пусть $\mathcal{K}$ симплициальный комплекс на $[m]$, положим $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ векторная конфигурация в $W^*$ такая, что для любого симплекса $I \in \mathcal{K}$ подмножество $\mathrm{A}_I$ линейно независимо, и $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ двойственная по Гейлу конфигурация. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) $\{\mathcal{K}, \mathrm{A}\}$ *определяет веер $\Sigma$;*
(b) $\mathrm{relint}\,\mathrm{cone}(\mathrm{A}_I) \cap \mathrm{relint}\,\mathrm{cone}(\mathrm{A}_J) = \varnothing$ *для любых $I, J \in \mathcal{K}$, $I \neq J$;*
(c) $\mathrm{relint}\,\mathrm{cone}(\Gamma_{\widehat{I}}) \cap \mathrm{relint}\,\mathrm{cone}(\Gamma_{\widehat{J}}) \neq \varnothing$ *для любых $I, J \in \mathcal{K}$.*

*Доказательство.* Импликация (a)$\Rightarrow$(b) следует из определения.

(b)$\Rightarrow$(a). Возьмем любый $I, J \in \mathcal{K}$. Покажем, что $\mathrm{cone}\,\mathrm{A}_I \cap \mathrm{cone}\,\mathrm{A}_J = \mathrm{cone}\,\mathrm{A}_{I\cap J}$. Понятно, что $\mathrm{cone}\,\mathrm{A}_{I\cap J}$ является гранью $\mathrm{cone}\,\mathrm{A}_I$ и $\mathrm{cone}\,\mathrm{A}_J$ в силу симплициальности. Рассмотрим множество $X := \mathrm{cone}\,\mathrm{A}_I \cap \mathrm{cone}\,\mathrm{A}_J$. Очевидно имеем $\mathrm{cone}\,\mathrm{A}_{I\cap J} \subseteq X$. Рассмотрим минимальную по включению грань $\mathrm{cone}\,\mathrm{A}_I$ содержащую $X$; в силу симплициальности, это грань $\mathrm{cone}\,\mathrm{A}_{I'}$ для некоторого $I' \subseteq I$. Аналогично $\mathrm{cone}\,\mathrm{A}_{J'}$ наименьшая по включению грань конуса $\mathrm{cone}\,\mathrm{A}_J$

содержащая $X$. Тогда $\operatorname{relint} X \subseteq \operatorname{relint} \operatorname{cone} \mathrm{A}_{I'} \cap \operatorname{relint} \operatorname{cone} \mathrm{A}_{J'}$. Согласно (b), последнее пересечение пусто, кроме случая $I' = J'$. Таким образом, $I' = J'$. Значит $I' \subseteq I \cap J$, и $X \subseteq \operatorname{cone} \mathrm{A}_{I'} \subseteq \operatorname{cone} \mathrm{A}_{I\cap J}$, что и требовалось.

(c)$\Rightarrow$(a). Пусть $\operatorname{relint} \operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{I}}) \cap \operatorname{relint} \operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{J}}) \neq \varnothing$. По предложению 5,

$$\sum_{k\in\widehat{I}} r_i\gamma_i - \sum_{l\in\widehat{J}} s_l\gamma_l = 0 \tag{4.1}$$

для некоторых положительных $r_i$ и $s_l$. Это линейная зависимость между $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, следовательно, она определяет некоторый вектор $\boldsymbol{w} \in W$. Рассмотрим значение линейной функции $\boldsymbol{a}_i$ на нем, таким образом мы имеем:

$$\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{w}\rangle = \begin{cases} r_i - s_i, & i \in \widehat{I} \cap \widehat{J} = \widehat{I \cup J}, \\ r_i, & i \in \widehat{I} \setminus \widehat{J} = J \setminus (I \cap J), \\ -s_i, & i \in \widehat{J} \setminus \widehat{I} = I \setminus (I \cap J), \\ 0, & i \in \widehat{\widehat{I} \cup \widehat{J}} = I \cap J. \end{cases} \tag{4.2}$$

Отдюда следует, что

$$\begin{gathered} \operatorname{cone} \mathrm{A}_J \subseteq H^+_{\boldsymbol{w}}, \quad \operatorname{cone} \mathrm{A}_I \subseteq H^-_{\boldsymbol{w}}, \quad \text{и} \\ H_{\boldsymbol{w}} \cap \operatorname{cone} \mathrm{A}_I = H_{\boldsymbol{w}} \cap \operatorname{cone} \mathrm{A}_J = \operatorname{cone} \mathrm{A}_I \cap \operatorname{cone} \mathrm{A}_J = \operatorname{cone} \mathrm{A}_{I\cap J}. \end{gathered} \tag{4.3}$$

По лемме 1, мы получаем, что $\operatorname{cone} \mathrm{A}_I$ и $\operatorname{cone} \mathrm{A}_J$ пересекаются по гиперграни эля любых $I, J \in \mathcal{K}$, следовательно (a) выполнено.

(a)$\Rightarrow$(c). Предположим, что $\operatorname{cone} \mathrm{A}_I$ и $\operatorname{cone} \mathrm{A}_J$ пересекаются по гиперграни. По лемме 1, существует гиперплоскость $H_{\boldsymbol{w}}$, обозначим ее (4.3). Соответствующий вектор $\boldsymbol{w} \in W$ удовлетворяет (4.2) для некоторых положительных $r_i, s_i$. Это $\boldsymbol{w}$ дает нам линейное отношение (4.1) между $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, откуда следует, что $\operatorname{relint} \operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{I}}) \cap \operatorname{relint} \operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{J}}) \neq \varnothing$. $\square$

Теорема 1 следует из [ADHL, Theorem 2.2.1.14], согласно которой она верна для любых вееров (не обязательно симплициальных).

## 5. Собственные действия

Непрерывное действие $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g\,x$ топологической группы $G$ на топологическом пространстве $X$ называется *собственным* если следующее отображение $h\colon G \times X \to X \times X$, $(g, x) \mapsto (g\,x, x)$ является собственным, то есть, $h^{-1}(C)$ компактен для любого компактного $C \subseteq X \times X$.

Свойство собственности является важнейшим для действий некомпактных групп Ли. Во первых, $X/G$ под собственным действием является хаусдорфовым многообразием, что показано в [L, Proposition 21.4]. Во вторых, фактор $X/G$ при свободном и собственном действии группы Ли на гладком многообразии есть гладкое многообразие [L, Theorem 21.10].

В нашем случае (1.1) имеем следующий результат.

**Теорема 2.** *Пусть $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ набор векторов в $V^*$, определяющий действие (1.1), и $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$ двойственная по Гейлу конфигурация векторов. Положим $\mathcal{K}$ симплициальный комплекс на $[m]$, такой что для любого $I \in \mathcal{K}$ подмножество $\Gamma_{\widehat{I}}$ порождает $V^*$ (или, что то же самое, множество $\mathrm{A}_I$ линейно не зависимо). Тогда:*

(1) *ограничение действия $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$ свободно;*

(2) *действие* $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$ *собственно тогда и только тогда, когда выполнено одно из эквивалентных условий (a)–(c) теоремы 1.*

*Доказательство.* Первая часть утверждения - это предложение 3.

Предположим, что условие (c) теоремы 1 выполнено. Чтобы понять, что действие $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$ собственно, нужно доказать следующее: если $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ последовательность $U(\mathcal{K})$ и $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\}$ последовательность в $V$ такие, что обе последовательности $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ и $\{\boldsymbol{v}^{(k)} \cdot \boldsymbol{x}^{(k)}\}$ сходятся, то сходится и последовательность $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\}$ (см. [L, Утверждение 21.5]). Перейдя к подпоследовательности, можно предположить, что каждая их последовательностей $\{\langle \gamma_i, \boldsymbol{v}^{(k)} \rangle\}$, $i = 1, \ldots, m$, имеет предел в $\mathbb{R} \cup \pm\infty$. Пусть

$$I_+ = \bigl\{i\colon \lim_{k\to\infty} \langle \gamma_i, \boldsymbol{v}^{(k)} \rangle = +\infty\bigr\}, \quad I_- = \bigl\{i\colon \lim_{k\to\infty} \langle \gamma_i, \boldsymbol{v}^{(k)} \rangle = -\infty\bigr\}.$$

Таким образом, обе последовательности $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$, $\{\boldsymbol{y}^{(k)} = \boldsymbol{v}^{(k)} \cdot \boldsymbol{x}^{(k)}\}$ сходятся к $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U(\mathcal{K})$ соответственно, мы имеем $x_i = 0$ для $i \in I_+$ и $y_i = 0$ для $i \in I_-$. По определению $U(\mathcal{K})$ (2.1) это включение $I_+$ и $I_-$ несвязных симплексов в $\mathcal{K}$. Тогда условие (c) теоремы 1 дает следующее:

$$\operatorname{relint} \operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{I}_+}) \cap \operatorname{relint} \operatorname{cone}(\Gamma_{\widehat{I}_-}) \neq \varnothing.$$

Таким образом,

$$0 = \sum_{i \in \widehat{I}_-} r_i \gamma_i - \sum_{i \in \widehat{I}_+} s_i \gamma_i = \sum_{i \in I_+} r_i \gamma_i - \sum_{i \in I_-} s_i \gamma_i + \sum_{i \notin I_+ \sqcup I_-} (r_i - s_i) \gamma_i$$

для некоторых положительных $r_i$ и $s_i$. Это подразумевает, что оба $I_+$ и $I_-$ пусты, так как иначе цепочка равенств

$$0 = \lim_{k\to\infty} \Bigl( \sum_{i \in I_+} r_i \langle \gamma_i, \boldsymbol{v}^{(k)} \rangle - \sum_{i \in I_-} s_i \langle \gamma_i, \boldsymbol{v}^{(k)} \rangle + \sum_{i \notin I_+ \sqcup I_-} (r_i - s_i) \langle \gamma_i, \boldsymbol{v}^{(k)} \rangle \Bigr) = +\infty,$$

приводит к противоречию. Поэтому каждая последовательность $\{\langle \gamma_i, \boldsymbol{v}^{(k)} \rangle\}$, $i = 1, \ldots, m$, имеет конечный предел. Это означает, что $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\}$ сходится к $V$, поскольку $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ порождает все $V^*$. Таким образом, действие $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$ собственно.

Теперь предположим, что условие (b) теоремы 1 не выполнено. Тогда мы имеем

$$\operatorname{relint} \operatorname{cone}(\mathrm{A}_I) \cap \operatorname{relint} \operatorname{cone}(\mathrm{A}_J) \neq \varnothing$$

для некоторых $I, J \in \mathcal{K}$, $I \neq J$. В этом случае $I \cup J \notin \mathcal{K}$, иначе $\operatorname{cone}(\mathrm{A}_I)$ и $\operatorname{cone}(\mathrm{A}_J)$ являются гранями $\operatorname{cone}(\mathrm{A}_{I \cup J})$, и их внутренности имеют непустое пересечение. Как и ранее, получаем

$$0 = \sum_{i \in I} r_i \boldsymbol{a}_i - \sum_{i \in \widehat{J}} s_i \boldsymbol{a}_i = \sum_{i \in I \setminus J} r_i \boldsymbol{a}_i - \sum_{i \in J \setminus I} s_i \boldsymbol{a}_i + \sum_{i \in I \cap J} (r_i - s_i) \boldsymbol{a}_i$$

для некоторых положительных $r_i$ и $s_i$. По двойственности Гейла, это линейная зависимость между $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ дающая вектор $\boldsymbol{v} \in V$ удовлетворяющий условиям

$$\langle \gamma_i, \boldsymbol{v} \rangle = \begin{cases} r_i - s_i, & i \in I \cap J, \\ r_i, & i \in I \setminus J, \\ -s_i, & i \in J \setminus I, \\ 0, & i \notin I \cup J. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим последовательность точек $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ в $\mathbb{R}^m$ со следующими координатами

$$x_i^{(k)} = \begin{cases} 0, & i \in I \cap J, \\ e^{-k\langle \gamma_i, \boldsymbol{v}\rangle}, & i \in I \setminus J, \\ 1, & i \notin I \end{cases} = \begin{cases} 0, & i \in I \cap J, \\ e^{-kr_i}, & i \in I \setminus J, \\ 1, & i \notin I. \end{cases}$$

Понятно, что $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}$, где

$$x_i = \begin{cases} 0, & i \in I, \\ 1, & i \notin I, \end{cases}$$

и как $\boldsymbol{x}^{(k)}$ и $\boldsymbol{x}$ лежат в $U(\mathcal{K})$. Определим $\boldsymbol{v}^{(k)} = k\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{y}^{(k)} = \boldsymbol{v}^{(k)} \cdot \boldsymbol{x}^{(k)}$, такие, что

$$y_i^{(k)} = e^{k\langle \gamma_i, \boldsymbol{v}\rangle} x_i^{(k)} = \begin{cases} 0, & i \in I \cap J, \\ 1, & i \in I \setminus J, \\ e^{k\langle \gamma_i, \boldsymbol{v}\rangle}, & i \notin I \end{cases} = \begin{cases} 0, & i \in I \cap J, \\ e^{-ks_i}, & i \in J \setminus I, \\ 1, & i \notin J. \end{cases}$$

Мы имеем $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{y}^{(k)} = \boldsymbol{y}$, где

$$y_i = \begin{cases} 0, & i \in J, \\ 1, & i \notin J, \end{cases}$$

так как $\boldsymbol{y}^{(k)}$ и $\boldsymbol{y}$ лежат в $U(\mathcal{K})$. С другой стороны, подпоследовательность $\boldsymbol{v}^{(k)}$ не имеет предела в $V$. То есть, действие $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$ не является собственным. $\square$

Отметим, что теорема 2 имеет исключительно топологическую природу. С другой стороны, алгебраическая версия этой теоремы была известна ранее. 'Условие конуса' (свойство (a) Теоремы 1) являтся характерной особенностью конструкций торических многообразий (наиболее известна конструкция Кокса), это гарантирует, что фактор будет сепарабельным, то есть - хаусдорфовым в индуцированной топологии, побробнее в [CLS, Theorem 5.1.11]. Вариация условия (c) теоремы 1 известно как 'imprication condition' и возникала в работах по голоморфной механике.

Также заметим, что теорема 2 (2) является критерием; таким образом 'условие конуса' важно для классификационных результатов [IFM] и [I].

**Пример 1.** Рассмотрим действие $V = \mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^2$, определенное следующим образом

$$(v, (x_1, x_2)) \mapsto (e^{vx_1}, e^{vx_2}).$$

Мы имеем $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (1, 1)$, $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = (1, -1)$. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\Gamma) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$, такое, что $U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Вектора $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ образуют одномерный веер в $\mathbb{R}$, соответственно действие $\mathbb{R}$ на $U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ свободно и собственно, и фактор топологически гомеоморфен сфере (гладкому многообразию).

В более общем случае имеем $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (b, a)$, $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = (a, -b)$, $a, b \in \mathbb{R}_{\geq}$. Положив $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\Gamma) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$, имеем, что $U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Вектора $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ образуют одномерный веер в $\mathbb{R}$, соответственно действие $\mathbb{R}$ на $U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, аналогично предыдущему случаю фактор гомеоморфен сфере.

Теперь рассмотрим действие $V = \mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^2$ заданное немного иначе.

$$(v, (x_1, x_2)) \mapsto (e^{vx_1}, e^{-vx_2}).$$

В этом случае мы имеем $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (1, -1)$, $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = (1, 1)$. Внутренности конусов, порожденных $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ имеют непустое пересечение, таким образом действие $\mathbb{R}$ на $U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ не является собственным, и фактор - пространство не хаусдорфово.

## 6. Компактность

Предположим, что $\{\mathcal{K}, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ определяют симплициальнй веер $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$ в $W^*$, как описано в предыдущем параграфе. Веер $\Sigma$ в $W^*$ называется *полным* если объединение всех его конусов $\sigma_i$ есть все $W^*$. Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$, соответствующий полному симплициальному вееру $\Sigma$ задает симплициальное разбиение (*триангуляцию*) единичной сферы пространства $W^*$.

Сформулируем критерий компактности фактор-пространства при действии $V \times U(\mathcal{K}) \to U(\mathcal{K})$. Напомним, что $k = \dim V$.

Предположим, что $\{\mathcal{K}, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ определяют симплициальный веер $\Sigma$ в $W^*$. Положим $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ – двойственная по Гейлу конфигурация в $V^*$ определяющая действие (1.1). Пусть ограничение этого действия на $U(\mathcal{K})$ свободно, собственно по теореме 2, следовательно, $U(\mathcal{K})/V$ является гладким многообразием.

**Теорема 3.** *Многообразие $U(\mathcal{K})/V$ компактно тогда и только тогда, когда веер $\Sigma$ полный.*

*Доказательство.* Предположим, что $\Sigma$ является полным веером. Поскольку $U(\mathcal{K})/V$ – метрическое пространство, то нам достаточно показать, что любая последовательность из $U(\mathcal{K})/V$ содержит сходящуюся подпоследовательность.

Возьмем некоторую последовательность точек в $U(\mathcal{K})/V$ и положим $\{\boldsymbol{x}^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}) \in U(\mathcal{K})\}$ – некоторые их образы. Покажем, что можно выбрать другие образы $\{\widetilde{\boldsymbol{x}}^{(n)}\}$ лежащие на одном листе с $\boldsymbol{x}^{(n)}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$, такие, что $\{\widetilde{\boldsymbol{x}}^{(n)}\}$ содержат сходящуюся подпоследовательность в $U(\mathcal{K})$. Это даст нам искомую последовательность в $U(\mathcal{K})/V$.

Поскольку количество симплексов в $\mathcal{K}$ конечно, мы можем выбрать подпоследовательность, такую что у любого ее элемента координаты с индексами из $J \in \mathcal{K}$ нулевые. То есть $x_j^{(n)} = 0$ для любого $j \in J$ и $x_j^{(n)} \neq 0$ для любого $j \notin J$, для любого $n$.

Проведем индукцию по $\dim W^* = m - k$. Пусть $\dim W^* = 1$. Определен одномерный конус $\{\mathcal{K}, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$, $\mathcal{K}$ имеет максимум две (не призрачные) вершины. Существует единственный одномерный веер (содержащий $\mathcal{K} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$), и этот случай рассмотрен ранее (см. пример 1).

Пусть $J \neq \varnothing$, тогда $(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x}^{(n)})_j = 0$ для любого $j \in J$, $\boldsymbol{v} \in V$ и $n = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим $\operatorname{link}_{\mathcal{K}} J = \{I \in \mathcal{K} \colon I \cup J \in \mathcal{K}, I \cap J = \varnothing\}$. Тогда данные $\{\operatorname{link}_{\mathcal{K}} J, \boldsymbol{a}_j \colon j \notin J\}$ определяют полный веер в фактор-пространстве $W^*/\langle \boldsymbol{a}_j \colon j \in J\rangle$, размерность которого меньше размерности $W^*$. То есть мы можем применить предположение индукции.

Теперь мы можем считать, что $J = \varnothing$, то есть, $x_j^{(n)} \neq 0$ для любых $n$ и $j \in [m]$.

Для любого $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^m$ определим

$$\ell(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a}_i \log |x_i| \in W^*.$$

Для любого $\boldsymbol{v} \in V$ мы имеем

$$\begin{aligned}(6.1)\quad \ell(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x}) &= \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a}_i \log\bigl(e^{\langle \gamma_i, \boldsymbol{v} \rangle} |x_i|\bigr) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a}_i \langle \gamma_i, \boldsymbol{v} \rangle + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a}_i \log |x_i| = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a}_i \log |x_i| = \ell(\boldsymbol{x}),\end{aligned}$$

поскольку сумма $\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a}_i \langle \gamma_i, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ из двойственности Гейла.

Теперь для последовательности $\{\boldsymbol{x}^{(n)}\}$, рассмотрим $-\ell(\boldsymbol{x}^{(n)}) \in W^*$. Так как $\Sigma$ полный веер в $W^*$, мы можем найти $I \in \mathcal{K}$ у которого $|I| = \dim W^*$, при этом бесконечное количество элементов последовательности $\{-\ell(\boldsymbol{x}^{(n)})\}$ лежат в конусе $\mathrm{A}_I$. Перейдя к подпоследовательности, мы можем полагать, что $\{-\ell(\boldsymbol{x}^{(n)})\} \in \operatorname{cone} \mathrm{A}_I$ при любом натуральном $n$.

По предложению 4, конфигурация $\Gamma_{\widehat{I}}$ есть базис $V^*$, соответственно мы можем найти $\boldsymbol{v}^{(n)} \in V$ определенные соотношениями

$$\langle \gamma_i, \boldsymbol{v}^{(n)} \rangle = -\log |x_i^{(n)}|, \quad i \notin I.$$

и определить

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}^{(n)} = \boldsymbol{v}^{(n)} \cdot \boldsymbol{x}^{(n)}$$

Мы имеем

$$|\widetilde{x}_i^{(n)}| = |e^{\langle \gamma_i, \boldsymbol{v}^{(n)} \rangle} x_i^{(n)}| = 1, \quad i \notin I.$$

Вместе с равенством (6.1) получаем

$$\sum_{i \in I} \boldsymbol{a}_i \log |\widetilde{x}_i^{(n)}| = \ell(\widetilde{\boldsymbol{x}}^{(n)}) = \ell(\boldsymbol{x}^{(n)}) \in -\operatorname{cone} \mathrm{A}_I.$$

Это означает, что $\log |\widetilde{x}_i^{(n)}| \leqslant 0$ для любого $i \in [m]$ и $n = 1, 2, \dots$. Отсюда, $\{\widetilde{\boldsymbol{x}}^{(n)}\}$ ограниченная последовательность, то есть имеет подпоследовательность, сходящаюся в $\mathbb{R}^m$. Поскольку $|\widetilde{x}_i^{(n)}| = 1$ при $i \notin I$, предел может иметь нулевые координаты $x_i$ только при $i \in I$, то есть этот лимит лежит в $U(\mathcal{K})$, что и требовалось.

Теперь предположим компактность пространства $U(\mathcal{K})/V$. Возьмем $\boldsymbol{a} \in W^*$. Для доказательства полноты веера $\Sigma$, нам нужно показать, что $\boldsymbol{a}$ принадлежит некоторому конусу в $\Sigma$. Распишем

$$(6.2)\qquad \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{a}_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

и рассмотрим кривую

$$(e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_m t}) \in U(\mathcal{K}).$$

Коэффициенты $\alpha_i$ определяются с точностью до соотношения $\langle \gamma_i, \boldsymbol{v} \rangle$, $\boldsymbol{v} \in V$, что соответствует изменению $(e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_m t})$ в пределах одной орбиты действия $V$. Поскольку $U(\mathcal{K})/V$ компактно, можно выбрать $\alpha_i$ таким образом, что $\lim_{t \to -\infty} (e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_m t})$ существует в $U(\mathcal{K})$. Это возможно только если все $\alpha_i$

неотрицательны и $I=\{i\colon \alpha_i>0\}\in\mathcal{K}$. Тогда, по равенству (6.2) мы получаем вложение $\boldsymbol{a}\in\operatorname{cone}\mathrm{A}_I$, что и требовалось. $\square$

## 7. Вещественные момент-угол-комплексы

Если фактор $U(\mathcal{K})\backslash V$ компактен, его можно описать с помощью следующей топологически-комбинаторной конструкции.

**Конструкция 4** (Полиэдральное произведение)**.** Пусть нам дан симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на $[m]$ и последовательность

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})=\{(X_1,A_1),\dots,(X_m,A_m)\}$$

из $m$ пар пространств с отмеченной точкой. Для подмножества $I\subset[m]$ мы рассмотрим

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^I:=\bigl\{(x_1,\dots,x_m)\in\prod_{k=1}^m X_k\colon\ x_k\in A_k\quad\text{for } k\notin I\bigr\}\tag{7.1}$$

и определим *полиэдральное произведение* $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})$, соответствующее комплексу $\mathcal{K}$ как

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^{\mathcal{K}}:=\bigcup_{I\in\mathcal{K}}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^I=\bigcup_{I\in\mathcal{K}}\Bigl(\prod_{i\in I}X_i\times\prod_{i\notin I}A_i\Bigr)\subseteq\prod_{i=1}^m X_i.$$

В случае когда все пары $(X_i,A_i)$ одинаковы, то есть $X_i=X$ и $A_i=A$ для $i=1,\dots,m$, мы будем использовать определение $(X,A)^{\mathcal{K}}$ для $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^{\mathcal{K}}$.

Понятно, что $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^{\mathcal{K}}=\prod_{i=1}^m A_i$ если $\mathcal{K}=\varnothing$, и $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^{\mathcal{K}}=\prod_{i=1}^m X_i$ когда $\mathcal{K}$ есть полый симплекс $\Delta^{m-1}$ на $m$ вершинах. Приведем немного примеров.

**Пример 2.**
**1.** Понятно, что $U(\mathcal{K})=(\mathbb{R},\mathbb{R}^\times)^{\mathcal{K}}$, где $\mathbb{R}^\times=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
**2.** Пусть $(X,A)=(D^1,S^0)$, гдн $D^1$ есть замкнутый интервал (обозначение для $[-1,1]$) и $S^0$ - его граница, составленая из двух точек. Полиэдральное произведение в этом случае $(D^1,S^0)^{\mathcal{K}}$ известно как *вещественное момент-угол-многообразие* [BP1, §3.5], [BP2]:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}}=(D^1,S^0)^{\mathcal{K}}=\bigcup_{I\in\mathcal{K}}(D^1,S^0)^I.$$

Это кубический подкомплекс $m$-куба $(D^1)^m=[-1,1]^m$. Когда $\mathcal{K}$ сожеожит $m$ несвязных точек, $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ есть 1-мерный остов куба $[-1,1]^m$. Если $\mathcal{K}=\partial\Delta^{m-1}$, мы имеем $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}=\partial[-1,1]^m$. В общем случе, если $\{i_1,\dots,i_k\}$ грань $\mathcal{K}$,то $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ содержит $2^{m-k}$ кубических грани размерности $k$, которые лежат в $k$-мерной плоскости, параллельной $\{i_1,\dots,i_k\}$-1 координатной плоскости.

**Теорема 5.** *Если $\{\mathcal{K},\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m\}$ определяет полный симплициальный веер, имеет место гомеоморфизм*

$$U(\mathcal{K})/V\cong\mathcal{R}_{\mathcal{K}}.$$

*Доказательство.* Мы имеем вложение пар $(D^1,S^0)\hookrightarrow(\mathbb{R},\mathbb{R}^\times)$, которое индуцирует вложение $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}=(D^1,S^0)^{\mathcal{K}}\hookrightarrow(\mathbb{R},\mathbb{R}^\times)^{\mathcal{K}}=U(\mathcal{K})$.Таким образом, требуемый гомоморфизм будет следовать из того, что орбита действия $V$ любой точки $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_m)\in U(\mathcal{K})$ пересекаеи $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ по единственной точке.

Аналогично теореме 3, мы можем предположить, что $x_i\neq0$ для $i\in[m]$. Рассмотрим $\ell(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^m\boldsymbol{a}_i\log|x_i|\in W^*$. Так как $\Sigma$ является полным веером, рассмотрим $I \in \mathcal{K}$, $|I| = \dim W^*$ такой, что $-\ell(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{cone} \mathrm{A}_I$. Для решения системы уравнений $\langle \gamma_i, \boldsymbol{v} \rangle = -\log |x_i|$, $i \notin I$, мы найдем $\widetilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x}$ на одной орбите с $\boldsymbol{x}$, определенный соотношением $|\widetilde{x}_i| = 1$ для $i \notin I$ и $|\widetilde{x}_i| \leqslant 1$ при $i \in I$. Эти соотношения дают вложение $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{R}_\mathcal{K}$. Таким образом, каждая $V$-орбита пересекает $\mathcal{R}_\mathcal{K}$.

Теперь предположим, что $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathcal{R}_\mathcal{K}$ лежат на одной $V$-орбите. По определению $\mathcal{R}_\mathcal{K}$, есть некоторый $I \in \mathcal{K}$ такой, что $|x_i| = 1$ для $i \notin I$ и $|x_i| \leqslant 1$ при $i \in I$, и $J \in \mathcal{K}$ такой, что $|x_j| = 1$ для $j \notin J$ и $|x_j| \leqslant 1$ for $j \in J$. Так как $\ell$ определяет $V$-орбиту по (6.1), мы получаем

$$\sum_{i \in I} \boldsymbol{a}_j \log |x_i| = \ell(\boldsymbol{x}) = \ell(\boldsymbol{x}') = \sum_{j \in J} \boldsymbol{a}_j \log |x'_j|.$$

Отсюда следует, что вектор, написанный выше лежит в $\operatorname{cone} \mathrm{A}_I \cap \operatorname{cone} \mathrm{A}_J = \operatorname{cone} \mathrm{A}_{I \cap J}$. Поскольку в нашем случае конус – симплициальный, то можно заключить, что $|x_i| = |x'_i|$ при $i \in [m]$. Отсюда, поскольку действие $V$ сохраняет занки координат, мы получаем, что $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$, что и требовалось. $\square$

**Следствие 1.** *Заметим, что теорема 5 индуцирует на $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ гладкую структуру, если $\mathcal{K}$ - комплекс, соответствующий полному симплициальному вееру.*

Важность данного результата в следующем. Дано действие, которое описывается исключительно в терминах линейной алгебры и комбинаторики.

Свойств линейно-алгебраической системы достаточно, что бы это действие могло индуцировать гладкую структуру на фактор-пространстве.

Кроме того, оказывается, что этим фактором является известное в торической топологии многобразие, которое также задано исключительно комбинаторными методами. Заметим, что определение полиэдрального произведения не дает гладкой структуры на получаемом пространстве.

Наконец, совмещая два результата, получаем возможность рассматривать вещественные момент-угол-комплексы как объекты гладкой категории.

## 8. Случай многогранников

Как мы показали в предыдущих секциях, фактор-пространство $U(\mathcal{K})/V$ является гладким компактным многообразием тогда и только тогда, когда пара $\{\mathcal{K}, \mathrm{A}\}$ определяет полный симплициальный веер, что показано в теоремах 1, 2 и 3. Рассмотрим важный класс полных вееров - веера, которые соответствуют выпуклым многогранникам.

**Конструкция 6** (нормальный веер)**.** Пусть $P$ - выпуклый полиэдр в пространстве $W$, заданный пересечением $m$ полупространств:

$$P = \{\boldsymbol{w} \in W \colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{w} \rangle + b_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, m\} \tag{8.1}$$

где $\boldsymbol{a}_i \in W^*$ и $b_i \in \mathbb{R}$. Будем считать, что $\dim P = \dim W$ и в системе нет избыточных неравенств. Это подразумевает, что каждый

$$F_i = \{\boldsymbol{w} \in P \colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{w} \rangle + b_i = 0\}$$

есть *грань* (коразмерности один) многогранника $P$, то есть в нем $m$ граней. Замкнутый полиэдр называется *многогранником.*

Рассмотрим грань $Q \subseteq P$, определим ее *нормальный конус* как

$$\sigma_Q = \{\boldsymbol{a} \in W^* \colon \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{w}' \rangle \leqslant \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{w} \rangle \text{ для каждого } \boldsymbol{w}' \in Q \text{ и } \boldsymbol{w} \in P\}.$$

У нас так же есть

$$\sigma_Q = \operatorname{cone}(\boldsymbol{a}_i \colon F_i \supset Q),$$

то есть, $\sigma_Q$ определяется нормалями к граням, содержащим $Q$. Двойственный конус

$$\sigma_Q^{\vee} = \{\boldsymbol{w} \in W \colon \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{w} \rangle \geqslant 0 \ \text{ для любого } \ \boldsymbol{a} \in \sigma_Q\}$$

является 'полиэдральным углом' грани $Q$; он образован всеми векторами $\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}'$ направленные от $\boldsymbol{w}' \in Q$ к $\boldsymbol{w} \in P$. Тогда

$$\Sigma_P = \{\sigma_Q \colon Q \text{ грань } P\}$$

является веером $\Sigma_P$ в $W^*$, который называется *нормальным веером* полиэдра $P$.

Объединение конусов нормального веера выпукло (см. [CLS, Теорема 7.1.6]). Так же, $\Sigma_P$ полный тогда и только тогда, когда $P$ является многогранником, то есть замкнутым множеством.

Нормальный веер $\Sigma_P$ является симплициальным тогда и только тогда, когда полиэдр $P$ *простой*, то есть, его грани пересекаются в "общем положении". В этом случае конусы $\Sigma_P$ порожденны наборами $\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_k}\}$ для которых пересечение $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k}$ непусто. Определим *двойственный симплициальный комплекс* как

$$\mathcal{K}_P = \bigl\{I = \{i_1, \ldots, i_k\} \colon F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k} \neq \varnothing\bigr\}.$$

Таким образом, наш веер $\Sigma_P$ определяется парой $\{\mathcal{K}_P, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$.

Рассмотрим набор векторов $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$, состоящий из нормалей к граням $P$, и двойственную по Гейлу конфигурацию $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$.

**Лемма 2.** *Пусть дан набор $I \subseteq [m]$, тогда* $\operatorname{cone} \mathrm{A}_I$ *принадлежит нормальному вееру многогранника, заданного системой неравенств* (8.1) *тогда и только тогда, когда* $\sum_{i=1}^m b_i \gamma_i \in \operatorname{relint} \operatorname{cone} \Gamma_{\widehat{I}}$.

*Доказательство.* Предположим, что $\operatorname{cone} \mathrm{A}_I \in \Sigma_P$, тогда $\operatorname{cone} \mathrm{A}_I$ есть нормальный конус к некоторой грани $Q \subset P$. Возьмем $\boldsymbol{w} \in \operatorname{relint} Q$. Тогда $\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{w} \rangle + b_i = 0$ для $i \in I$ и $r_i := \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{w} \rangle + b_i > 0$ для $i \in \widehat{I}$. Тогда, мы имеем

$$\sum_{i=1}^m b_i \gamma_i = \sum_{i=1}^m (\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{w} \rangle + b_i) \gamma_i = \sum_{i \in \widehat{I}} r_i \gamma_i.$$

Следовательно, $\sum_{i=1}^m b_i \gamma_i \in \operatorname{relint} \operatorname{cone} \Gamma_{\widehat{I}}$, по свойству 5.

Теперь предположим, что $\sum_{i=1}^m b_i \gamma_i \in \operatorname{relint} \operatorname{cone} \Gamma_{\widehat{I}}$. Тогда $\sum_{i=1}^m b_i \gamma_i = \sum_{i \in \widehat{I}} r_i \gamma_i$ для некоторых положительных $r_i$, $i \in \widehat{I}$. Обозначим $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ и $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_m) \in \mathbb{R}^m$, где $r_i = 0$ при $i \in I$. Тогда $\mathit{\Gamma}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{b}) = 0$. Следовательно, $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{b}$ принадлежит образу $A^*$, см. (3.1). Другими словами, $\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{w} \rangle = r_i - b_i$ для некоторых $\boldsymbol{w} \in W$. Этот $\boldsymbol{w}$ определяет $\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{w} \rangle + b_i = 0$ для $i \in I$ и $\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{w} \rangle + b_i > 0$ при $i \in \widehat{I}$. Следовательно, $Q = \bigcap_{i \in I} F_i$ есть грань $P$, и $\boldsymbol{w} \in \operatorname{relint} Q$. Тогда нормальный конус грани $Q$ есть искомый $\operatorname{cone} \mathrm{A}_I$. $\square$

Теперь докажем теорему, которая является критерием того, что полный веер является нормальным веером некоторого многогранника, в терминах двойственных конфигураций.

**Теорема 7.** *Пусть* $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$ *и* $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ *двойственные по Гейлу конфигурации. Предположим, что* $\Sigma = \{\operatorname{cone} \mathrm{A}_I : I \in \mathcal{C}\}$ *- веер, который является выпуклым множеством (соответственно, полным веером). Тогда* $\Sigma$ *нормальный веер некоторого полиэдра (соответственно, многогранника) тогда и только тогда, когда* $\bigcap_{I\in\mathcal{C}} \operatorname{relint} \operatorname{cone} \Gamma_{\widehat{I}} \neq \varnothing$.

*Доказательство.* Предположим, что $\{\operatorname{cone} \mathrm{A}_I : I \in \mathcal{C}\} = \Sigma_P$ нормальный веер полиэдра $P$ определенного системой неравенств (8.1). Положим $\delta = \sum_{i=1}^m b_i\gamma_i$. Тогда $\delta \in \bigcap_{I\in\mathcal{C}} \operatorname{relint} \operatorname{cone} \Gamma_{\widehat{I}}$ по лемме 2.

Обратно, предположим, что $\bigcap_{I\in\mathcal{C}} \operatorname{relint} \operatorname{cone} \Gamma_{\widehat{I}} \neq \varnothing$. Рассмотрим такое $\delta \in \bigcap_{I\in\mathcal{C}} \operatorname{relint} \operatorname{cone} \Gamma_{\widehat{I}}$. Представим $\delta = \sum_{i=1}^m b_i\gamma_i$ для некоторых $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, и определим полиэдр $P$ системой неравенств (8.1). Тогда любой $\operatorname{cone} \mathrm{A}_I$, где $I \in \mathcal{C}$ принадлежит нормальному вееру $\Sigma_P$ по лемме 2, то есть $\Sigma \subseteq \Sigma_P$. Предположим, что $\Sigma_P$ так же содержит некоторый $\operatorname{cone} \mathrm{A}_J$ такой что $J \notin \mathcal{C}$. Тогда, поскольку $\Sigma$ выпуклый, есть некоторый $\operatorname{cone} \mathrm{A}_I$ где $I \in \mathcal{C}$ такой что

$$(\operatorname{relint} \operatorname{cone} \mathrm{A}_I) \cap (\operatorname{relint} \operatorname{cone} \mathrm{A}_J) \neq \varnothing.$$

Тогда по свойствам (b) и (c) теоремы 1 мы получаем, что

$$(\operatorname{relint} \operatorname{cone} \Gamma_{\widehat{I}}) \cap (\operatorname{relint} \operatorname{cone} \Gamma_{\widehat{J}}) = \varnothing,$$

то есть $\delta \notin \operatorname{relint} \operatorname{cone} \Gamma_{\widehat{J}}$. Это противоречит лемме 2. То есть, $\Sigma = \Sigma_P$. □

Отсюда видно, что условия на набор конусов, которые являются нормальным веером некоторого многогранника, сильнее, чем просто условие полного веера: в первом случае относительные внутренности конусов $\operatorname{cone} \Gamma_{\widehat{I}}$, $I \in \mathcal{C}$, должны иметь общую точку, в отличие от второго случая, когда достаточно просто непустых попарных пересечений.

## 9. Момент-угол-комплексы, комплексный случай

В данном разделе мы дадим определения, которые обобщают результаты предыдущих разделов на комплексный случай. Для этого рассмотрим действие, аналогичное 1.1, на пространстве $\mathbb{C}^m$:

$$\begin{gathered} V \times \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m \\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) \mapsto \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{z} = \big(e^{\langle \gamma_1, \boldsymbol{v}\rangle} z_1, \dots, e^{\langle \gamma_m, \boldsymbol{v}\rangle} z_m\big). \end{gathered} \tag{9.1}$$

Множество $U(\mathcal{K})$ определим как:

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\{i_1,\dots,i_p\}\notin\mathcal{K}} \{\boldsymbol{z} : z_{i_1} = \dots = z_{i_p} = 0\}. \tag{9.2}$$

*Момент-угол-многообразием* будем называть полиэдральное произведение вида $(D^2, S^1)^{\mathcal{K}}$ подробно изучено в книгах [BP1, §3.5], [BP2]:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I\in\mathcal{K}} (D^2, S^1)^I.$$

Обозначив $n = m-k$, имеем, что многообразие $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ имеет размерность $m+n$. В указанных определениях предложения 1, 3 и теоремы 2, 3 остаются верны и в комплексном случае, с заменой вещественных координат на комплексные. Теорема 5 в комплексном случае гласит:

**Теорема 8.** *Если* $\{\mathcal{K}, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ *определяет полный симплициальный веер, имеет место гомеоморфизм*

$$U(\mathcal{K})/V \cong \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}.$$

В случае вееров, происходящих из простых полиэдров $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, см. 8.1, имеет место следующая конструкция:

$$\mathcal{Z}_{A,b} = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^m : \sum_{i=1}^{m} \gamma_i |z_i|^2 = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i b_i\} \tag{9.3}$$

Теорема 6.2.4. [BP2] определяет связь между конструкциями 9.2 и 9.3, а точнее, устанавливает гомеоморфизм между $\mathcal{Z}_{A,b}$, заданного пересечением квадрик, и $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_P}$ - полиэдральным произведением, определенным симплициальным комплексом - границей двойственного многогранника к $P$.

Так, же мы будем рассматривать произвольные пересечения квадрик, заданные парой $\Gamma, \delta$ следующего вида:

$$\mathcal{Z}_{\Gamma,\delta} = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^m : \sum_{i=1}^{m} \gamma_i |z_i|^2 = \delta_i\} \tag{9.4}$$

По утверждению 6.1.4. [BP2] пересечение квадрик 9.4 непусто и невырождено, если выполнены условия:

(a) $\delta \in \mathbb{R}_{\geq}\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_m \rangle$
(b) если $\delta \in \mathbb{R}_{\geq}\langle \gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_q} \rangle$, то $q \geq m - n$

## 10. Минимумы норм и диаграмма Гейла

Следующие две главы будут посвящены минимуму $L_2$ норм на листах слоения $U(\mathcal{K})/V$. Сначала будут показаны уже известные результаты сформированные в терминах линейных конфигураций. После этого, они будут обобщены на случай произвольных вееров.

В этой главе будет дан обзор результатов, описанных в статье [C]. Для этого нам потребуется рассмотреть иное действие, нежели 9.1.

Рассмотрим конфигурацию векторов $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\} \in V^*, V \cong \mathbb{R}^k$ и двойственную $A = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\} \in W \cong \mathbb{R}^{m-k}$. Рассмотрим вложение пространства

$$i^+ : W \hookrightarrow W^+, \quad W^+ \cong \mathbb{R}^{m-k+1}$$

в матричном виде заданное формулой

$$i^+(\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{w}, 1)^T$$

*Диаграммой Гейла* конфигурации $A$ назовем конфигурацию $G = \{\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_m\} \in V^- \cong \mathbb{R}^{k-1}$, двойственную по Гейлу к конфигурации $i^+(A)$. Заметим, что в матричном виде, можно выразить когфигурацию $\Gamma$ через конфигурацию $G$ следующим образом:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \cdots & \gamma_{1,m} \\ \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 & \cdots & \boldsymbol{g}_m \end{pmatrix} \tag{10.1}$$

Так же рассмотрим пересечение квадрик, заданное формулами

$$\mathcal{Z}_G = \begin{cases} |z_1|^2 + \ldots + |z_m|^2 = 1 \\ \boldsymbol{g}_1|z_1|^2 + \ldots + \boldsymbol{g}_m|z_m|^2 = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{10.2}$$

Конфигурация $G$ называется *допустимой*, если выполнены два условия:

(a) $\boldsymbol{0} \in conv(\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_m)$

(b) если $\boldsymbol{0} \in conv(\boldsymbol{g}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{i_q})$, то $q \geq m - n$

где $conv(\boldsymbol{g}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{i_p})$ - обозначает выпуклую оболочку векторов $\boldsymbol{g}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{i_p}$.

Рассмотрим следующее действие:

$$\begin{gathered} V^- \times \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m \\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) \mapsto \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{z} = \left(e^{\langle \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{v} \rangle} z_1, \ldots, e^{\langle \boldsymbol{g}_m, \boldsymbol{v} \rangle} z_m\right). \end{gathered} \tag{10.3}$$

**Теорема 9** ([C])**.** *Пусть $G$ - допустимая конфигурация. Тогда существует единственная точка $f(z)$ минимума $L_2$ - нормы на листе $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{z}$ действия 10.3. При этом отображение $f(z)/||f(z)||_2 : U(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{Z}_G$ - гомеоморфизм.*

Для нас, как мы далее увидим, будет факт, который используется в доказательстве этой теоремы. Диффиренцируя по $v$, можно получить, что что минимум $L_2$-нормы на листе действия 10.3 достигается тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\boldsymbol{g}_1 e^{2\langle \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{v} \rangle}|z_1|^2 + \ldots + \boldsymbol{g}_m e^{2\langle \boldsymbol{g}_m, \boldsymbol{v} \rangle}|z_m|^2 = 0$$

Теперь рассмотрим частный случай пары $\Gamma, \delta$:

**Пример 3.** Рассмотрим допустимую конфигурацию $G$. Пусть выполнено условие $\gamma_{1,1} = \gamma_{1,2} = \ldots = \gamma_{1,m} = 1$ и зададим вектор $\delta = (1, \boldsymbol{0})^T$. Нетрудно понять, что из условий допустимости конфигурации $G$ следуют условия:

(a) $\delta \in \mathbb{R}_{\geq}\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_m \rangle$

(b) если $\delta \in \mathbb{R}_{\geq}\langle \gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_q} \rangle$, то $q \geq m - n$

То есть пересечение квадрик $\mathcal{Z}_{\Gamma,\delta} = \mathcal{Z}_G$ - непусто и невырождено (см. 9.4).

## 11. Минимум нормы отображения моментов

Аналогично предыдущим разделам рассмотрим конфигурации $A, \Gamma$, соответствующие им симплициальный комплекс $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\Gamma)$, и веер $\Sigma = \{A, \mathcal{K}\}$. Определим *отображение моментов* следующим образом:

$$\begin{gathered} \mu_\Sigma : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k : \\ \left(z_1, \ldots, z_m\right) \mapsto \Big(\sum_{i=1}^m \gamma_{1,i}|z_i|^2, \ldots, \sum_{i=1}^m \gamma_{k,i}|z_i|^2\Big) \end{gathered}$$

Рассмотрим семейство функций, для которых параметром является $\delta \in \mathbb{R}^k$:

$$f_\delta : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}, \quad f_\delta(\boldsymbol{z}) = ||\mu_\Sigma(\boldsymbol{z}) - \delta||^2$$

Теперь покажем необходимое и достаточное условие того, что компактное момент-угол-многообразие, определяемое пересечением квадрик 9.4 является минимумом функции $f_\delta$ на листах слоения $U(\mathcal{K})/V$.

Пусть $A, \Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ - двойственные по Гейлу конфигурации векторов, $\delta$ - некоторый вектор в $V^*$. $\mathcal{K}, \Sigma = \{A, \mathcal{K}\}$ - связанные с ними симплициальный комплекс, и веер. Будем считать, что веер полный. Задано действие $U(\mathcal{K})/V$

(см. 9.1) - из полноты веера, по теореме 3 это компактное многообразие. Так же рассмотрим отображение моментов $\mu_\Sigma$ и функцию $f_\delta$ - определенные выше.

**Теорема 10.** *На каждом листе слоения $U(\mathcal{K})/V$ существует единственная точка минимума функции $f_\delta$ тогда и только тогда, когда пара $\Gamma, \delta$ - соответствует некоторому многограннику.*

*Доказательство.* По теореме 7 условие многогранника формулируется в виде $\delta \in \bigcap_{I\in\mathcal{K}} \operatorname{relint} \operatorname{cone} \Gamma_{\widehat{I}}$. Дифиренцированием по $v$ формул, определяющих отображение моментов и функцию $f_\delta$ получим, что минимум норм существует и единственный, тогда и только тогда, когда система уравнений (относительно $v$):

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i |z_i|^2 e^{2\langle\gamma_i, v\rangle} = \delta$$

имеет единственное решение (аналогичный факт используется в [C]).

Если эта система имеет единственное решение для любого $\boldsymbol{z} \in U(\mathcal{K})$, то для $I = \{i : z_i = 0\}$, имеем $I \in \mathcal{K}$, следовательно имеет место равенство:

$$\delta = \sum_{i\in\widehat{I}} \gamma_i |z_i|^2 e^{2\langle\gamma_i, v\rangle}$$

тогда, в силу строгой положительности множителей $|z_i|^2 e^{2\langle\gamma_i, v\rangle}$ получаем требуемое.

В обратную сторону, по теореме 7 то пара $\Gamma, \delta$ определяет веер некоторого многогранника с нормальным веером $\Sigma$. Следовательно имеет место цепочка гомеоморфизмов:

$$U(\mathcal{K})/V \cong \mathcal{Z}_\mathcal{K} \cong \mathcal{Z}_{A,b} \cong \mathcal{Z}_{\Gamma,\delta}$$

Откуда, в силу того, что минимум норм функции $f_\delta$ достигается в точности на многообразии $\mathcal{Z}_{\Gamma,\delta}$ получаем требуемое. $\square$

Рассмотрим немного подробнее пример 3. Имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{gathered} ||\mu_\Sigma - \delta||^2 = \\ = ||\big(\gamma_{1,1}|z_1|^2 + \ldots + \gamma_{1,m}|z_m|^2, \ldots, \gamma_{k,1}|z_1|^2 + \ldots + \gamma_{k,m}|z_m|^2\big) - (1, \boldsymbol{0})||^2 = \\ = (|z_1|^2 + \ldots + |z_m|^2 - 1)^2 + ||\boldsymbol{g}_1|z_1|^2 + \ldots + \boldsymbol{g}_m|z_m|^2||^2 \end{gathered}$$

**Замечание 1.** *Для точки минимума отображения моментов $||\mu_\Sigma - \delta||^2$ на листе действия 9.1 в примере 3 и точки минимума $L_2$-нормы на листе действия 10.3 выполняется условие $\boldsymbol{g}_1 e^{2\langle\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{v}\rangle}|z_1|^2 + \ldots + \boldsymbol{g}_m e^{2\langle\boldsymbol{g}_m, \boldsymbol{v}\rangle}|z_m|^2 = 0$. Эти минимумы имеют разную природу, но опираются на одно и то же равенство.*

## 12. Голоморфный случай

Голоморфным аналогом действия 9.1 является следующее действие:

$$\begin{aligned} &\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m \\ &(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}) \mapsto \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{z} = \big(e^{\langle\zeta_1, \boldsymbol{w}\rangle} z_1, \ldots, e^{\langle\zeta_m, \boldsymbol{w}\rangle} z_m\big). \end{aligned} \tag{12.1}$$

где $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_m) \in \mathbb{C}^s$, $\langle\zeta_i, \boldsymbol{w}\rangle = \zeta_{1,i} w_1 + \ldots + \zeta_{s,i} w_s$.

Рассмотрим обобщение конструкции $\mathcal{Z}_G$ - пересечение квадрик в $\mathcal{L} \in \mathbb{C}^m$ с комплексными векторными коэффициентами $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_m\} \in \mathbb{C}^s$:

$$\mathcal{L} = \begin{cases} |z_1|^2 + \ldots + |z_m|^2 = 1 \\ \zeta_1|z_1|^2 + \ldots + \zeta_m|z_m|^2 = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{12.2}$$

Отождествим комплексный вектор $\zeta_k \in \mathbb{C}^s$ с вещественным вектором $\boldsymbol{g}_k \in \mathbb{R}^{2s}$ стандартным образом, получим, что эта система квадрик непуста и невырождена, когда конфигурация $G$ - допустима. Заметим, что аналогичные условия выполнены и для системы векторов $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$. Более того, будем считать что конфигурация $G$ соответствует некоторому многограннику.

Проективизацией многообразия $\mathcal{L}$ является многообразие $\mathcal{N} \in \mathbb{C}P^{m-1}$:

$$\mathcal{N} = \{z \in \mathbb{C}P^{m-1} : \quad \zeta_1|z_1|^2 + \ldots + \zeta_m|z_m|^2 = \boldsymbol{0}\}$$

**Теорема 11** (6.4.1 [BP2]). *На многообразии $\mathcal{N}$ существует голоморфный атлас, который задаст на нем структуру компактного комплексного многообразия, комплексный размерности $m - s - 1$.*

При этом фактор $U(\mathcal{K})/\mathbb{C}^s$ голоморфен многообразию $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T} = \{z \in \mathbb{C}^m : \quad \zeta_1|z_1|^2 + \ldots + \zeta_m|z_m|^2 = \boldsymbol{0}\}$$

где $\mathcal{K}$ определен как $\{I \in \mathcal{K} \Longleftrightarrow \boldsymbol{0} \in conv(G_{\widehat{I}})\}$

**Замечание 2.** *Эта теорема позволяет вводить комплексные структуры на момент-угол многообразиях, определенный многогранником (см. теорему 6.4.3* [BP2]*)*

В заключение хотелось бы сказать пару слов про работу [CKP], основным результатом которой является связь топологии слоения, заданного комплексным векторным полем $F(z)$ с изолированными особыми точками и комбинаторикой многоугольника, определенного спектром $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ линейного оператора $\sigma = DF|_{z_i}$ в окрестности особой точки. Эти результаты так же можно сформулировать в терминах вееров.

Для простоты рассмотрим случай линейного векторного поля:

$$F(z) = \sigma z, \quad \sigma \in GL(m, \mathbb{C})$$

Тогда слоение задается как система диффиренциальных уравнений:

$$\frac{dz}{dT} = \sigma z$$

где производная берется по одномерному комплексному времени $T \in \mathbb{C}$. Сделав соответствующую замену координат систему уравнений можно свести к системе с диагональной матрицей $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, где числа $\lambda_i \in \mathbb{C}$ являются спектром $\sigma$. Определим оператор $2\pi i \sigma^{-1}$, и его спектр:

$$\widehat{\Lambda} = \{\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_m\}, \quad \widehat{\lambda}_i = 2\pi i \lambda^{-1}$$

Класс эквивалентности $\widehat{\Lambda}$ относительно преобразований $GL(2, \mathbb{R})$ обозначим как $\eta(\sigma)$.

**Теорема 12** (Main Theorem 1 [CKP]). *Если спектр оператора $\sigma$ удовлетворяет условиям:*

(a) $0 \in conv(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$
(b) $i \neq j \Longrightarrow \lambda_i \notin \mathbb{R}\lambda_j$

*то комбинаторика слоения полностью определяется классом* $\eta(\sigma)$.

Доказательство этой теоремы строится на доказательстве гомоморфизма между двумя слоениями в диагональными операторами, спектры которых $\Lambda, \Lambda' \in \eta(\sigma)$ принадлежат одному классу, и рассуждений, сводящих линейный случай к диагональному.

В терминах, которые развиваются в статье, решение системы уравнений дает нам одномерное голоморфное действие 12, при $s = 1$. Рассмотрим вектора $\boldsymbol{g}_i \in \mathbb{R}^2$, соответствующие комплексным числам $\widehat{\lambda_i}$ естественным образом. Ограничения, которые наложены на спектр соответствуют условиям:

(a) $\boldsymbol{0} \in conv(\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_m)$
(b) если $\boldsymbol{0} \in conv(\boldsymbol{g}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{g}_{i_q})$, то $q \geq 3$

Таким образом фактор-пространство голоморфно квадрике:

$$\mathcal{T} = \{z \in \mathbb{C}^m : \quad \lambda_1|z_1|^2 + \ldots + \lambda_m|z_m|^2 = 0\}$$

Само утверждение об одинаковых топологических свойствах следует из того, что топологические свойства фактор-пространства определяются веером, а не конкретным матричным представлением двойственной по Гейлу конфигурации векторов.

## 13. Заключение

Работа посвящена действию групп, задаваемые конфигурациями векторов, которые задают слоение пространства. В разделах 1-5, 8 содержатся определения и технические утверждения, необходимые для дальнейших фактов. В главе 6 доказан критерий компактности фактор-пространства в терминах линейной конфигурации (теорема 3). В главе 7 доказано, что компактное фактор-пространство не что иное как момент-угол-многообразие (теорема 5). В главе 8 на язык векторных конфигураций переложено классическое "условие многогранника"(теорема 7). Глава 11 содержит результат о минимуме нормы отображения моментов на листах слоения (теорема 10). Наконец главы 10, 12 содержат краткие обзоры результатов [C] и [СКР] соответственно.

## Список литературы


[ADHL] Arzhantsev, Ivan; Derenthal, Ulrich; Hausen, Jürgen; Laface, Antonio. *Cox rings.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 144. Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

[BP1] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Torus actions, combinatorial topology and homological algebra.* Uspekhi Mat. Nauk **55** (2000), no. 5, 3–106 (Russian). Russian Math. Surveys **55** (2000), no. 5, 825–921 (English).

[BP2] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Toric Topology.* Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[C] Cai, Li. *Norm minima in certain Siegel leaves.* Algebr. Geom. Topol. 15 (2015), no. 1, 445–466.

[CLS] Cox, David A.; Little John B.; Schenck, Henry K. *Toric varieties.* Graduate Studies in Mathematics, 124. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[F] Fulton, William. *Introduction to Toric Varieties.* Annals of Mathematics Studies, 131. The William H. Roever Lectures in Geometry. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

[I] Ishida, Hiroaki. *Complex manifolds with maximal torus actions.* Preprint (2013), arXiv:1302.0633.

[IFM] Ishida, Hiroaki; Fukukawa, Yukiko; Masuda, Mikiya. *Topological toric manifolds.* Mosc. Math. J. 13 (2013), no. 1, 57–98.

[L] Lee, John M. *Introduction to smooth manifolds.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer, New York, 2013.

[PU] Panov, Taras; Ustinovsky, Yuri. *Complex-analytic structures on moment-angle manifolds.* Moscow Math. J. **12** (2012), no. 1, 149–172.

[CKP] Cesar Camaco, Nicolaas H. Kuioer, Jacob Palis *The topology of holomorphic flows with singularity.* Publications mathematiques de l'I.H.E.S., tome 48 (1978), p. 5-38.