НЕКОТОРЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ЭКВИВАРИАНТНЫХ КОГОМОЛОГИЯХ МОМЕНТ-УГОЛ КОМПЛЕКСОВ

Г.ТАРОЯН

Аннотация. В данной работе вычисляются рациональные эквивариантные когомологии момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ для нетривиального симплициального действия группы $\mathbb{Z}_p$ на симплициальном комплексе $\mathcal{K}$ с p вершинами. Для случая дискретного комплекса $\mathcal{K}$ из p вершин проведено вычисление с целыми коэффициентами $\mathbb{Z}$.

1. Вводные понятия

Пусть p нечётное простое число. А все пространства локально-конечные клеточные комплексы. Будем рассматривать пространства с действием группы $\mathbb{Z}_p$ сохраняющим структуру на когомологиях, формализуем это интуитивное понятие в следующем определении.

Определение 1.1. Назовем пространство с действием группы $\mathbb{Z}_p$ когомологически согласованным, если разложение

$$H^*(X) = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Tors}$$

согласовано с действием группы $\mathbb{Z}_p$, переставляющим слагаемые в свободной части.

Приведём без доказательства следующий известный факт

Теорема 1.2. [1, II.3.1] *Для когомологий группы $\mathbb{Z}_p$ порождённой элементом σ с коэффициентами в модуле A имеет место следующая формула*

$$H^n(\mathbb{Z}_p; A) = \begin{cases} \{a \in A : Na = 0\}/(\sigma - 1)A, & \text{если } n = 1, 3, 5, \dots \\ A^{\mathbb{Z}_p}/NA, & \text{если } n = 2, 4, 6, \dots \\ A^{\mathbb{Z}_p}, & \text{если } n = 0 \end{cases}$$

где N - это норма группы $\mathbb{Z}_p$ (т.е. элемент $1+\sigma+\sigma^2+...+\sigma^{p-1}$ группового кольца)

Напомним также основные определения связанные со спектральной последовательности Картана-Лере, которая будет ключевым инструментом вычислений в этой работе.

Конструкция 1.3. Спектральная последовательность Картана-Лере. Если группа π свободно и дискретно действует на пространстве X, тогда существует мультипликативная когомологическая спектральная последовательность сильно сходящаяся к $H^*(X/\pi)$ со вторым листом

$$\mathrm{E}_2^{s,q} = H^s(\pi, H^q(X))$$

За более подробной информацией об этой спектральной последовательности мы отсылаем к книге Брауна [1].

2. Выражение для рациональных эквивариантных когомологий

Используя теорему 1.2 и конструкцию 1.3 для пространств из определения 1.1 мы получаем известное утверждения о рациональных эквивариантных когомологиях относительно действий конечных групп. Отметим, что в некоторых частных случаях этот инструмент позволяет получить чуть большую информацию, мы остановимся на этом в примерах (см. пример 4.2).

Теорема 2.1. *Для пространства X из определения 1.1 $\mathbb{Z}_p$-эквивариантные когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Q}$ - это инвариантная часть рациональных когомологий.*

$$H^*_{\mathbb{Z}_p}(X) = H^*(X)^{\mathbb{Z}_p}$$

Доказательство. Для того, чтобы усмотреть это достаточно заметить, что когомологии $H^{q>0}(\mathbb{Z}_p, H^s(X))$ при таком действии это всегда конечные группы (это явно следует из формулы в теореме 1.2). Это в свою очередь влечёт вырождение во втором члене спектральной последовательности 1.3. Что, снова по 1.2, даёт результат теоремы. $\square$

Проиллюстрируем это рассуждение:

$$\begin{array}{c|cccccc}
l & (\mathbb{Z}^{\beta^l})^{\mathbb{Z}_p} & * & * & * & * & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \\
1 & (\mathbb{Z}^{\beta^1})^{\mathbb{Z}_p} & * & * & * & * & \ldots \\
0 & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z}_p & 0 & \mathbb{Z}_p & \ldots \\
\hline
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots
\end{array}$$

Где β^i обозначают числа Бетти в размерности i.

3. Применение к момент-угол комплексам

Теперь сформулируем утверждение, которое позволит применить метод спектральной последовательности Картана-Лере к некоторому специальному классу момент-угол комплексов. Здесь ключевую роль играет теорема Бухштабера-Панова, позволяющая выразить когомологии $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ через когомологии полных подкомплексов $\mathcal{K}$:

Теорема 3.1. [2, 4.5.8] *Когомологии момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ выражаются по формуле*

$$H^l(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \bigoplus_{J \subset [p]} \widetilde{H}^{l-|J|-1}(\mathcal{K}_J) \tag{3.1}$$

Предложение 3.2. [3, 2.6] *Изоморфизм в теореме 3.1 является изоморфизмом $\mathbb{Z}\operatorname{Aut}\mathcal{K}$-алгебр.*

Приведём набросок доказательства.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ - это функтор из категории симплициальных комплексов в категорию топологических пространств, а когомологии соответсвенно функтор из категории топологических пространств в категорию градуированных колец, то данное разложение сохраняется при симплициальных автоморфизмах $\mathcal{K}$ □

Теперь введём специальный тип симплициальных комплексов, которые будем рассматривать далее.

Определение 3.3. Назовём симплициальный комплекс $\mathbb{Z}_p$-однородным, если $\mathbb{Z}_p$ транзитивно действует на множестве его вершин.

Замечание. Отметим, что если $\mathbb{Z}_p$-однородный комплекс не является симплексом, то в каждой размерности он содержит кратное p число симплексов.

Обозначение. Пусть $h(\mathcal{K})$ обозначает когомологическую размерность комплекса $\mathcal{K}$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 3.4. *Пусть $\mathcal{K}$ - это $\mathbb{Z}_p$-однородный комплекс, также являющийся когомологически согласованным пространством. Тогда числа Бетти $\beta^*_{\mathbb{Z}_p}$ $\mathbb{Z}_p$-эквивариантных когомологий выражаются по формуле*

$$\beta^l_{\mathbb{Z}_p} = \begin{cases} \beta^l/p, & \text{если } l \neq p + h(\mathcal{K}) + 1, \\ (\beta^l - 1)/p + 1, & \text{если } l = p + h(\mathcal{K}) + 1 \end{cases}$$

через числа Бетти β^* сингулярных когомологий.

Доказательство. Доказательство основано на том, что в формуле 3.1 в случае когда $J \neq [p]$ предложение 3.2 устанавливает, что действие на когомологиях происходит покоординатными циклическими перестановками. Соответственно инвариантная часть в таком случае имеет ранг в p раз меньший исходного.Если же $J = [p]$, то на когомологиях в размерностях меньших старшей на свободной части действие вновь будет циклическим покоординатными, а в старшей размерности будет стабилизировать фундаментальный класс, это и даёт формулу 3.4. □

4. Примеры

В заключительной части рассмотрим несколько примеров применения теоремы 3.4.

Пример 4.1. (p-угольник) Для p-угольника все условия теоремы 3.4 очевидно выполнены, а значит верна следующая формула:

$$\beta^l_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \begin{cases} 1, & \text{если } l = 0, p+1 \\ \frac{(l-2)\binom{p-2}{l-1}+(p-l)\binom{p-2}{p-l+1}}{p}, & \text{если } 3 \leqslant l \leqslant p \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пример 4.2. (Дискретный комплекс)
Для этого случая есть возможность сформулировать более сильный результат и вычислить для некоторых размерностей когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$. Для этого необходимо проанализировать более подробно спектральную последовательность Картана-Лере для накрытия

$$\mathbb{Z}_p \to E\mathbb{Z}_p \times X \to (X)_{\mathbb{Z}_p}$$

Как легко понять единственной строкой в спектральной последовательности содержащей члены вне первого столбца будет нулевая строка (см. иллюстрацию)

$$\begin{array}{c|cccccc}
p+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
p & \mathbb{Z}^{p-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z}_p & 0 & \mathbb{Z}_p & \dots \\
\hline
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots
\end{array}$$

Далее заметим, что в размерности 0,1 и 2 спектральная последовательность вырождается. Таким образом $E^2_\infty = \mathbb{Z}_p$, также заметим, что и в размерности $p+2$ и далее она также вырождена и там когомологии совпадают с когомологиями $B\mathbb{Z}_p$. А далее используя мультипликативность спектральной последовательности 1.3 мы получаем, что посокольку образующая кольца $B\mathbb{Z}_p$ - u выживает в E_∞, равно как и $u^{\frac{p+3}{2}}$, то все дифференциалы тривиальны, а значит имеет место следующая

Лемма 4.3.

$$H_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong (H(\mathcal{Z}_\mathcal{K})^{\mathbb{Z}_p}) \oplus H(B\mathbb{Z}_p)$$

Их числа Бетти вычисляются по формуле:

$$\beta^l_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \begin{cases} 1, & \text{если } l = 0 \\ \frac{(l-2)\binom{p}{l-1}}{p}, & \text{если } 3 \leqslant l \leqslant p \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Замечание. В заключение отметим, что доказательство изоморфизма в лемме 4.3 можно провести и для случая произвольного p (а не только простого) тем же способом.

Список литературы

[1] Brown, K.S. *Cohomology of Groups.* Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 2012.

[2] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Toric Topology.* Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[3] Fu, Xin; Grbić, Jelena. *Simplicial G-complexes and representation stability of polyhedral products.* arXiv:1803.11047, 2018.

Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра высшей геометрии и топологии

Email address: tgv628@yahoo.com