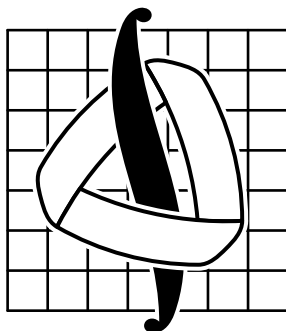


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет
Кафедра высшей геометрии и топологии



Устиновский Юрий
КУРСОВАЯ РАБОТА

Топология пересечения квадрик в \mathbb{R}^n

Научный руководитель — Панов Т. Е.

1. Предварительные определения.

1.1. Момент-угол многообразия \mathcal{Z}_P .

Пусть многогранник P задан системой неравенств в \mathbb{R}^n :

$$(x, a_i) + b_i \geq 0, \quad x, a_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1 \dots m$$

В таком случае P отождествляется с пересечением положительного ортанта \mathbb{R}_{\geq}^m и образа вложения $i_P : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$, $i_P(x) = A_P(x) + b_P$, где A_P — матрица размера $m \times n$, по строкам которой записаны вектора a_i , а b_P — вектор-столбец из b_i .

Отметим, что может случиться так, что некоторые из неравенств, задающих многогранник P , являются «лишними», то есть не определяют настоящих гиперграней многогранника, в таком случае мы все-равно будем говорить, что многогранник P имеет m гиперграней, те же из них, которые отвечают «лишним» неравенствам, мы будем называть «призрачными».

Определение 1.1. Момент-угол многообразием \mathcal{Z}_P , ассоциированным с простым многогранником P , называется топологическое пространство, определяемое из следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_P & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \\ \downarrow \pi & & \downarrow \mu \\ P & \xrightarrow{i_P} & \mathbb{R}_{\geq}^m \end{array} \quad (1)$$

где $\mu : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}^m$ — отображение моментов: $\mu(z_1, \dots, z_m) = (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2)$.

Другими словами, \mathcal{Z}_P есть прообраз многогранника $P \subset \mathbb{R}_{\geq}^m$ при проекции \mathbb{C}^m на пространство орбит стандартного покоординатного действия m -мерного тора T^m . Таким образом, на \mathcal{Z}_P имеется естественное действие T^m , пространство орбит которого отождествляется с многогранником P .

Непосредственно из определения следует, что пространство \mathcal{Z}_P может быть задано как пересечение вещественных квадрик в \mathbb{C}^m :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m c_{1,i} (|z_i|^2 - b_i) = 0, \\ \dots \\ \sum_{i=1}^m c_{m-n,i} (|z_i|^2 - b_i) = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Где $C_P = \{c_{i,j}\}$ — матрица размера $(m-n) \times m$, строки которой составляют базис линейных соотношений строк матрицы A_P , в частности $C \cdot A_P = 0$.

Хотя вид уравнений, задающих \mathcal{Z}_P , зависит от явной геометрической реализации многогранника P , топологический тип пространства \mathcal{Z}_P определяется лишь комбинаторным типом P . Доказательство этого факта можно найти в [Б-П].

Утверждение 1.1. Пусть P и Q — два многогранника. Тогда $\mathcal{Z}_{P \times Q} = \mathcal{Z}_P \times \mathcal{Z}_Q$.

Доказательство. В качестве матрицы $C_{P \times Q}$, строки которой образуют базис линейных соотношений матрицы $A_{P \times Q}$, может быть выбрана блочная матрица

$$\begin{pmatrix} C_P & 0 \\ 0 & C_Q \end{pmatrix}$$

Тогда система (2), задающая $\mathcal{Z}_{P \times Q}$, распадется на две независимые системы, каждая из которых определяет \mathcal{Z}_P и \mathcal{Z}_Q соответственно. \square

Попытаемся за счет удачного выбора матрицы C привести систему (2) к наиболее удобному виду. Для этого нам понадобится следующее

Утверждение 1.2. Найдутся такие $\lambda_i > 0$, $i = 1 \dots m$, что имеет место равенство $\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i = 0$.

В силу этого утверждения можно так перенормировать a_i , что новые нормальные вектора гиперграней многогранника P будут удовлетворять соотношению $\sum_{i=1}^m a_i = 0$. Это соотношение мы и выберем в качестве $m - n$ -ой строчки матрицы C . Тогда система (2) примет вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m c_{1,i}(|z_i|^2 - b_i) = 0, \\ \dots \\ \sum_{i=1}^m c_{m-n-1,i}(|z_i|^2 - b_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^m |z_i|^2 = q. \end{cases}$$

Заметим, что $q > 0$, так как иначе множество, задаваемое системой (2), либо пусто, либо состоит из одной точки. Поэтому вычтя $(m - n)$ -ое уравнение из остальных можно добиться того, что свободные члены первых $m - n - 1$ -ого обнулится. Окончательно после перенормировки система примет вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \Lambda_i |z_i|^2 = 0, & \Lambda_i \in \mathbb{R}^{m-n-1} \\ \sum_{i=1}^m |z_i|^2 = 1. \end{cases} \quad (3)$$

Хотя приведенное выше определение позволяет строить топологические пространства \mathcal{L}_P по любому многограннику P , особый интерес представляют пространства, отвечающие простым многогранникам. Это вызвано тем, что, как мы покажем дальше, простота P влечет невырожденность системы уравнений (3), а значит и наличие на \mathcal{L}_P структуры гладкого многообразия.

1.2. Диаграммы Гейла.

Объекты, задаваемые системами вида (3), и будут предметом нашего изучения. Для дальнейшего полезно будет установить связь между комбинаторным устройством многогранника P и комбинаторикой расположения векторов Λ_i в \mathbb{R}^{m-n-1} .

Определение 1.2. *Диаграммой Гейла n -мерного многогранника P с набором гиперграней F_1, \dots, F_m называется набор (возможно совпадающих) векторов $\Lambda_i \in \mathbb{R}^{m-n-1}$, $i = 1, \dots, m$ удовлетворяющих следующему свойству:*

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} F_i \neq \emptyset \text{ тогда и только тогда когда } 0 \in \text{Conv}_{i \notin \mathcal{I}}(\Lambda_i),$$

где $\mathcal{I} \subset [m]$ —набор индексов, Conv —выпуклая оболочка в \mathbb{R}^{m-n-1} .

Лемма 1.3. *Набор векторов $\Lambda_i \in \mathbb{R}^{m-n-1}$ из системы (3) образует диаграмму Гейла многогранника P .*

Доказательство. отождествим P со своим образом при отображении $i_P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Пусть $\mathcal{I} \subset [m]$ такой набор индексов, что $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} F_i \neq \emptyset$. Тогда P пересекается с множеством $\mathbb{R}(\mathcal{I}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid x_i = 0 \text{ как только } i \in \mathcal{I}\}$, откуда (3) имеет решение \vec{z} такое, что $z_i = 0$ при $i \in \mathcal{I}$, последнее, в свою очередь, в точности означает, что $0 \in \text{Conv}_{i \notin \mathcal{I}}(\Lambda_i)$. Обратное рассуждение аналогично. \square

Следствие 1.4. *У любого многогранника P существует диаграмма Гейла.*

Выясним теперь какие ограничения накладывают условия простоты многогранника P на вектора Λ_i .

Утверждение 1.5. Набор векторов $\Lambda_i \in \mathbb{R}^{m-n-1}$, $i = 1, \dots, m$ является диаграммой Гейла непустого n -мерного простого многогранника P , тогда и только тогда, когда Λ_i удовлетворяют следующим условиям невырожденности:

- (i) $0 \in \text{Conv}_{i=1, \dots, m}(\Lambda_i)$
- (ii) Если $0 \in \text{Conv}_{i \in \mathcal{I}}(\Lambda_i)$, то $|\mathcal{I}| \geq m - n$

Доказательство. Получается непосредственным применением леммы 1.3. □

Утверждение 1.6. Если набор векторов Λ_i удовлетворяет двум условиям невырожденности, то множество решений системы (3) является гладким подмногообразием в \mathbb{C}^m .

Доказательство. отождествим \mathbb{C}^m с \mathbb{R}^{2m} , зафиксировав в качестве координат вещественную и мнимую части: $z_j = x_j + iy_j$. Нам достаточно проверить, что в точках, удовлетворяющих системе (3), матрица J , состоящая из частных производных, имеет максимальный ранг $m - n$.

$$J = 2 \begin{pmatrix} \Lambda_1 x_1 & \Lambda_1 y_1 & \Lambda_2 x_2 & \Lambda_2 y_2 & \cdots & \Lambda_m x_m & \Lambda_m y_m \\ x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & \cdots & x_m & y_m \end{pmatrix}$$

Пусть точка $\vec{z} = (z_1, \dots, z_m)$ — удовлетворяет нашей системе, $\mathcal{I} = \{i \mid |z_i| = 0\}$. Из леммы 1.3 имеем: $0 \in \text{Conv}_{i \notin \mathcal{I}}(\Lambda_i)$. Заметим, что аффинная оболочка $L = \langle \Lambda_i \mid i \notin \mathcal{I} \rangle$, совпадает со всем \mathbb{R}^{m-n-1} . Действительно, в противном случае $0 \in L \subsetneq \mathbb{R}^{m-n-1}$ содержится в выпуклой оболочке не более чем $\dim L + 1$ векторов диаграммы Гейла, что противоречит второму условию невырожденности.

Отсюда следует, что матрица J имеет $m - n$ линейно-независимых столбцов, соответствующих аффинному базису в \mathbb{R}^{m-n-1} из векторов Λ_i отвечающих ненулевым координатам вектора \vec{z} . □

Итак, топологическое пространство \mathcal{Z}_P , построенное по простому многограннику P , допускает структуру гладкого многообразия.

2. Многогранное разбиение многообразий \mathcal{Z}_P .

2.1. Вещественные аналоги момент-угол многообразий.

Параллельно с изучением многообразий \mathcal{Z}_P можно рассмотреть вещественный аналог приведённой конструкции.

Определение 2.1. Вещественным момент-угол многообразием \mathcal{R}_P , ассоциированным с простым многогранником P , называется многообразие определяемое из следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_P & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \downarrow \pi & & \downarrow \mu \\ P & \xrightarrow{i_P} & \mathbb{R}_{\geq}^m \end{array} \quad (4)$$

где $\mu : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}^m$ — отображение моментов: $\mu(x_1, \dots, x_m) = (|x_1|^2, \dots, |x_m|^2)$.

Аналогично действию T^m на \mathcal{Z}_P , на \mathcal{R}_P имеется действие группы \mathbb{Z}_2^m , пространство орбит которого отождествляется с многогранником P .

Дословно повторяя рассуждения первой части, мы получаем, что \mathcal{R}_P может быть задано системой в \mathbb{R}^m

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \Lambda_i x_i^2 = 0, & \Lambda_i \in \mathbb{R}^{m-n-1} \\ \sum_{i=1}^m x_i^2 = 1, \end{cases} \quad (5)$$

в которой вектора Λ_i составляют диаграмму Гейла многогранника P , притом простота P снова обеспечивает невырожденность этой системы.

Из диаграммы (4) мы видим, что топологическое пространство \mathcal{R}_P получается из $i_P(P) \subset \mathbb{R}_{\geq}^m$ последовательным отражением относительно координатных гиперплоскостей. Тем самым, \mathcal{R}_P склеивается из 2^m копий многогранника P .

Пример. Пусть $P = \Delta^n$ — n -мерный симплекс. Тогда Δ^n задается одним уравнением в \mathbb{R}_{\geq}^{n+1} :

$$x_1 + \dots + x_{n+1} = 1$$

Система (5) в этом случае примет вид

$$x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$$

Таким образом, $\mathcal{R}_{\Delta^n} = S^n$ — n -мерная сфера, получающаяся склейкой 2^{n+1} n -мерных симплексов.

2.2. Связь вещественных и комплексных момент-угол многообразий.

Рассмотрим момент-угол многообразие, ассоциированное с простым многогранником P . Тогда, как нам известно, \mathcal{Z}_P задается системой в \mathbb{C}^m

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \Lambda_i |z_i|^2 = 0, & \Lambda_i \in \mathbb{R}^{m-n-1} \\ \sum_{i=1}^m |z_i|^2 = 1. \end{cases}$$

Отождествим \mathbb{C}^m с \mathbb{R}^{2m} , фиксируя в качестве координат действительную и мнимую части $z_j = x_j + iy_j$. Тогда система, задающая \mathcal{Z}_P , примет вид

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \Lambda_i (x_i^2 + y_i^2) = 0, & \Lambda_i \in \mathbb{R}^{m-n-1} \\ \sum_{i=1}^m (x_i^2 + y_i^2) = 1, \end{cases}$$

которая очевидно является системой вида (5).

Итак всякое многообразие \mathcal{Z}_P является одновременно и вещественным момент-угол многообразием \mathcal{R}_Q .

Опишем связь между многогранниками P и Q более подробно. В силу леммы 1.3 набор векторов $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m\}$ является диаграммой Гейла многогранника P . Аналогично диаграммой многогранника Q является набор $\{\Lambda_1, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m, \Lambda_m\}$. Тем самым, многогранник Q получается из многогранника P операцией «удвоения» диаграммы Гейла. Отметим, что простота P автоматически обеспечивает простоту многогранника Q .

Комбинируя это рассуждение с фактом наличия многогранного разбиения многообразий \mathcal{R}_P , мы получаем следующее

Утверждение 2.1. *Момент-угол многообразие \mathcal{Z}_P , ассоциированное с простым многогранником P ($\dim P = n$, число гиперграней $P = m$), допускает разбиение на 2^{2^m} копий многогранника Q , который получается из P операцией «удвоения» диаграммы Гейла, в частности имеет $2m$ гиперграней, $\dim Q = m + n$.*

3. Гипотеза о торическом ранге.

3.1. Формулировка.

Пусть X — конечномерное топологическое пространство. Введем обозначения: $h_i(X) = \dim H_i(X, \mathbb{Q})$ — i -ое число Бетти, $h(X) = \sum h_i(X)$. Гипотеза Гальперина-Карлссона о торическом ранге утверждает

Гипотеза. *Если тор T^r свободно действует на конечномерном пространстве X , то $h(X) \geq 2^r$.*

Момент-угол многообразия \mathcal{Z}_P предоставляют большую серию многообразий с действием (не свободным) m -мерного тора T^m , при этом ранг свободно действующего подтора в T^m не превосходит $m-n$, так как любой из прообразов вершины многогранника P при проекции \mathcal{Z}_P на пространство орбит действия T^m имеет стабилизатор T^n (здесь, как всегда, $\dim P = n$, m — число гиперграней многогранника P). На самом деле верно следующее: на \mathcal{Z}_P всегда имеется *почти свободное* действие $m-n$ -мерного тора, подробности можно найти в [Б-П] (глава 8, параграф 5).

Мы покажем, что $h(\mathcal{Z}_P) \geq 2^{m-n}$, тем самым, гипотеза о торическом ранге выполняется для момент-угол многообразий. На самом деле мы докажем большее, а именно $h(\mathcal{R}_P) \geq 2^{m-n}$. Согласно замечанию в конце раздела 2, всякое многообразие \mathcal{Z}_P является одновременно и вещественным момент-угол многообразием \mathcal{R}_Q , при этом (число граней P) — $\dim P =$ (число граней Q) — $\dim Q$, поэтому неравенство для многообразий \mathcal{R}_P влечет требуемое неравенство для многообразий \mathcal{Z}_P .

3.2. Доказательство.

Лемма 3.1. Пусть M — многообразие с краем, а многообразие X получается склейкой двух копий M вдоль общей границы. Тогда $h(X) \geq h(\partial M)$.

Доказательство. Обозначим верхнюю и нижнюю половины X соответственно через M_1 и M_2 . Граница любого многообразия имеет тривиальное нормальное расслоение, поэтому существует окрестность U подмногообразия $\partial M \subset X$, диффеоморфная $(-\varepsilon; \varepsilon) \times \partial M$. Рассмотрим покрытие X двумя открытыми множествами $U_1 = U \cup M_1$, $U_2 = U \cup M_2$. Напишем длинную точную последовательность Майера-Вьеториса, отвечающую этому покрытию, заменив гомологии пространств $U_1 \cap U_2 = U$, U_1 , U_2 на гомологии гомотопически эквивалентных им пространств ∂M , M_1 и M_2 соответственно:

$$\dots \xrightarrow{\delta_*^{(k+1)}} H_k(\partial M) \xrightarrow{p_*^{(k)}} H_k(M_1) \oplus H_k(M_2) \xrightarrow{g_*^{(k)}} H_k(X) \xrightarrow{\delta_*^{(k)}} H_{k-1}(\partial M) \xrightarrow{p_*^{(k-1)}} \dots$$

Отображение p_* действует по правилу $p_*(c) = (i_*(c), -j_*(c))$, где i_* , j_* индуцированы вложениями края ∂M в пространства M_1 и M_2 соответственно. Так как многообразия M_1 и M_2 диффеоморфны M , а при отождествлении гомологий M_1 и M_2 с гомологиями M отображения i_* и j_* совпадают, то отсюда следует, что $\dim(\operatorname{im} p_*^{(k)}) \leq h_k(M)$. Используя это неравенство, оценим снизу k -ое число Бетти пространства X :

$$\begin{aligned} h_k(X) &= \dim(\operatorname{im} \delta_*^{(k)}) + \dim(\ker \delta_*^{(k)}) = \dim(\ker p_*^{(k-1)}) + \dim(\operatorname{im} g_*^{(k)}) = h_{k-1}(\partial M) - \\ &- \dim(\operatorname{im} p_*^{(k-1)}) + 2h_k(M) - \dim(\operatorname{im} p_*^{(k)}) \geq h_{k-1}(\partial M) + h_k(M) - h_{k-1}(M). \end{aligned}$$

Суммируя $h_k(X)$, получаем:

$$h(X) = \sum h_k(X) \geq \sum (h_{k-1}(\partial M) + h_k(M) - h_{k-1}(M)) = \sum h_k(\partial M) = h(\partial M)$$

Что и требовалось. □

Теперь мы можем доказать основное утверждение.

Теорема 3.2. Гомологии всякого вещественного момент-угол многообразия \mathcal{R}_P удовлетворяют неравенству $h(\mathcal{R}_P) \geq 2^{m-n}$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по размерности n многогранника P .

При $n = 1$ утверждение верно. Действительно, единственный настоящий многогранник в этой размерности это отрезок, а соответствующее вещественное момент-угол многообразие, согласно примеру, разобранным выше, есть окружность S^1 , если же допустить в задании отрезка неравенствами k «призрачных» граней, то соответствующее многообразие будет представлять из себя несвязное объединение 2^k копий окружности S^1 , и его гомологии тоже будут удовлетворять требуемому неравенству.

Пусть утверждение доказано для многогранников размерности $n-1$, а P — некоторый n -мерный многогранник с t гранями F_1, \dots, F_m . Напомним, что \mathcal{R}_P включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_P & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \downarrow \pi & & \downarrow \mu \\ P & \xrightarrow{i_P} & \mathbb{R}_{\geq}^m \end{array} \quad (6)$$

Здесь возможны два случая:

1) Все гиперграни многогранника P «призрачные». Тогда многогранник, определяемый соответствующими уравнениями в \mathbb{R}_{\geq}^m , 0-мерен, а значит многообразие \mathcal{Z}_P есть просто объединение 2^m точек — удовлетворяют утверждению теоремы.

2) У многогранника P есть хотя бы одна «настоящая» гипергрань, без ограничения общности можно считать, что это F_1 . Обозначим через $\mathbb{R}_+^m = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid x_1 \geq 0\}$ полупространство в \mathbb{R}^m , а через M многообразие с краем $M = \mathcal{Z}_P \cap \mathbb{R}_+^m$. Тогда, из диаграммы (6) и вида отображения моментов μ , следует, что вещественное момент-угол многообразие \mathcal{Z}_P получается склейкой двух экземпляров многообразия M вдоль границы $\mathcal{Z}_P = M \cup_{\partial M} M$. После применения леммы 3.1 получаем неравенство:

$$h(\mathcal{Z}_P) \geq h(\partial M). \quad (7)$$

Опишем подробнее устройство ∂M . Согласно определению M , его граница ∂M есть $\mathcal{Z}_P \cap \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid x_1 = 0\}$ или, что то же самое, $\pi^{-1}(F_1)$ — прообраз гиперграни F_1 при проекции \mathcal{Z}_P на пространство орбит действия группы \mathbb{Z}_2^n . Далее $n-1$ -мерный многогранник F_1 задается в \mathbb{R}^{n-1} $m-1$ неравенством, а значит имеет $m-1$ гипергрань (возможно некоторые из них «призрачные»). Теперь заметим, что непосредственно из определения следует, что $\pi^{-1}(F_1) = \mathcal{Z}_{F_1}$ поэтому, применив к этому многообразию предположение индукции, заключаем:

$$h(\partial M) = h(\mathcal{Z}_{F_1}) \geq 2^{(m-1)-(n-1)}$$

Откуда с учетом неравенства (7) окончательно получаем:

$$h(\mathcal{Z}_P) \geq h(\partial M) \geq 2^{m-n}.$$

Переход индукции доказан. □

4. Топологический тип некоторых момент-угол многообразий.

4.1. Формулировка. Обзор результатов.

Оказывается, что для большого семейства многогранников многообразия \mathcal{Z}_P имеют довольно простое топологическое устройство. Будем говорить, что \mathcal{Z}_P имеет тип *связной суммы произведений сфер*, если \mathcal{Z}_P гомеоморфно $\#_{i=1}^k S^{n_i} \times S^{m+n-n_i}$ (здесь $\#$ означает взятие связной суммы). Так, в статье [LdM] (Theorem 2) показано, что момент-угол многообразия \mathcal{Z}_P , отвечающее n -мерному простому многограннику P с $n+3$ гипергранями, является либо произведением трех сфер (в случае, когда $P = \Delta_{n_1} \times \Delta_{n_2} \times \Delta_{n_3}$), либо имеет тип связной суммы произведений сфер (во всех остальных случаях). Основной целью этого раздела является доказательство следующей теоремы.

Теорема 4.1. *Если \mathcal{Z}_P гомеоморфно $\#_{i=1}^k S^{n_i} \times S^{m+n-n_i}$, и многогранник P' получается из P срезанием вершины, то многообразие $\mathcal{Z}_{P'}$ гомеоморфно*

$$(\#_{i=1}^k S^{n_i+1} \times S^{m+n-n_i}) \# (\#_{i=1}^k S^{n_i} \times S^{m+n-n_i+1}) \# (\#_{j=1}^{m-n} C_{m-n}^j S^{j+2} \times S^{m+n-j-1})$$

Доказательство этой теоремы в случае, когда P —многоугольник, приведено в [MG] (Theorem 3.4). Кроме того, в статье [B-M] (Theorem 6.3) отмечено, что многообразие \mathcal{Z}_P имеет тип связной суммы произведений сфер для всех многогранников P , получающихся последовательным срезанием вершин симплекса. Это утверждение непосредственно вытекает из нашей теоремы, так как после первого срезания вершины мы получим многогранник $Q = I \times \Delta_{n-1}$, таким образом, \mathcal{Z}_Q удовлетворяет условиям теоремы, конструкцию из которой очевидным образом можно итерировать.

Из теоремы следует, что множество многогранников P , задающих момент-угол многообразия \mathcal{Z}_P , имеющие топологический тип связной суммы произведений сфер, инвариантно относительно операции срезания вершины. Этот факт позволяет строить целые наборы семейств таких многогранников. Так, стартовав, например, с произведения симплексов $\Delta_a \times \Delta_b$ или с многогранника P размерности n с $n+3$ гипергранями, не являющегося произведением трех симплексов, и начав последовательно срезать у них различные вершины, мы получим много новых момент-угол многообразий, имеющих топологический тип связной суммы произведений сфер.

В недавней статье [G-M] предъявлена еще одна операция над многогранниками, сохраняющая указанное выше свойство. А именно, там доказано, что, если многогранник P определяет момент-угол

многообразия являющиеся связной суммой произведений сфер, и многогранник Q получается из P операцией удвоения любой из вершин его диаграммы Гейла, то Q тоже удовлетворяет этому свойству.

Хотя многогранники P задающие многообразия \mathcal{Z}_P , являющиеся связными суммами произведений сфер, образуют довольно большой класс, имеется множество примеров, когда это не так. Простейшим из них может служить трехмерный куб со срезанной вершиной (см. [В-М] Example 11.5).

Мы проведем рассуждения аналогичные рассуждениям для случая многоугольника в статье [MG] в общем случае и покажем, что утверждение теоремы 4.1 выполняется и для произвольного многогранника P , удовлетворяющего условию. Для этого мы сформулируем необходимые утверждения о связных суммах многообразий и опишем эквивариантные перестройки, происходящие с момент-угол многообразием \mathcal{Z}_P при срезании вершины многогранника P .

4.2. Связные суммы вдоль подмногообразий.

Всюду в этой части мы следуем работе [MG]. Все многообразия и вложения ниже предполагаются кусочно-линейными.

Определение 4.1. Пусть M и N замкнутые многообразия размерности m , а X замкнутое многообразие размерности $n < m$ с фиксированными вложениями $X \times D^{m-n}$ в M и N . Удалим внутренность $X \times D^{m-n}$ из многообразий M и N склеим полученные многообразия при помощи гомеоморфизма $f : X \times S^{m-n-1} \rightarrow X \times S^{m-n-1}$ вида $f(x, t) = (x, F(x)t)$, где $F : X \rightarrow SO(m-n)$. Полученное многообразие мы будем называть *связной суммой многообразий M и N вдоль подмногообразия X* . Обозначение $M \#_X N$.

В дальнейшем мы будем полагать $F : X \rightarrow SO(m-n)$ отображением в точку $\text{id} \in SO(m-n)$.

Аналогичное определение можно дать для многообразий с границей, с тем лишь изменением, что фиксированы вложения $X \times D^{m-n-1}$ в ∂M и ∂N . Отметим, что если M и N — многообразия с границей, то $\partial(M \#_X N) = \partial M \#_X \partial N$.

Пример. $S^n \#_{S^p} S^n \cong S^{p+1} \times S^{n-p-1}$, $0 \leq p \leq n-1$.

Действительно, нам необходимо найти $\partial(D^{n+1} \#_{S^p} D^{n+1})$. Сфера S^p , вложенная в каждое из слагаемых, ограничивает там диск D^{p+1} . Таким образом, нам нужно соединить $D^{p+1} \times D^{n-p}$ с $D^{p+1} \times D^{n-p}$ вдоль $S^p \times D^{n-p}$, где вложение по первому сомножителю происходит в качестве границы, а по второму тождественно. Откуда $D^{p+1} \times D^{n-p} \cup_{S^p \times D^{n-p}} D^{p+1} \times D^{n-p} \cong S^{p+1} \times D^{n-p}$. Тем самым, $S^n \#_{S^p} S^n \cong \partial(D^{n+1} \#_{S^p} D^{n+1}) \cong S^{p+1} \times S^{n-p-1}$.

Теперь сформулируем необходимые факты о связных суммах.

Теорема 4.2. Пусть $N = \#_{i=0}^r S^{p_i} \times D^{n-p_i-1}$, $r > 0$, $n - p_i \geq 3$. Пусть M — n -мерное многообразие с границей. Пусть, кроме того, имеются вложения N в ∂M и в ∂D^n . Тогда $M \cup_N D^n \cong (\dots (M \#_{S^{p_0}} D^n) \#_{S^{p_1}} \dots) \#_{S^{p_r}} D^n$.

Следствие 4.3. В предположениях предыдущей теоремы

$$D^n \cup_N D^n \cong \#_{i=0}^r S^{p_i+1} \times D^{n-p_i-1}.$$

Лемма 4.4. Пусть $p \leq n-5$ и даны вложения

1) $S^p \times D^{n-p-2} \times T^1 \rightarrow \partial(D^{n-1} \times T^1)$, которое есть произведение вложения $S^p \times D^{n-p-2} \rightarrow \partial D^{n-1}$ и гомеоморфизма $T^1 \rightarrow T^1$.

2) $S^p \times D^{n-p-2} \times T^1 \rightarrow D^n$, которое является произведением вложений $S^p \rightarrow \partial D^{p+1}$ и $D^{n-p-2} \times T^1 \rightarrow D^{n-p-1}$.

Тогда

$$D^n \#_{S^p \times T^1} D^{n-1} \times T^1 \cong S^{p+1} \times D^{n-p-1} \#_{S^{p+2}} \times D^{n-p-2}.$$

Следствие 4.5. Для вложений из предыдущей леммы имеем:

$$S^{n-1} \#_{S^p \times T^1} S^{n-2} \times T^1 \cong S^{p+1} \times S^{n-p-2} \#_{S^{p+2}} \times S^{n-p-3}.$$

Чтобы сформулировать последующие результаты, необходимо описать вложение k -мерного тора T^k в $\text{Int } D^{k+1}$, которое мы будем считать стандартным. T^1 можно вложить в $\text{Int } D^2$, индуктивно определим стандартное вложение T^k как границу замкнутой трубчатой окрестности $V(T^{k-1})$ стандартно вложенного $k-1$ -мерного тора $T^{k-1} \subset \text{Int } D^k \subset \text{Int } D^{k+1}$. Чтобы избежать произвола в этой конструкции, можно отождествить все $\text{Int } D^n$ со стандартным евклидовым пространством и все трубчатые окрестности рассматривать как метрические окрестности указанных множеств.

Теорема 4.6. Пусть $p \leq n - k - 4$ и даны вложения

1) $S^p \times D^{n-p-k-1} \times T^k \rightarrow D^{n-k} \times T^k$, являющиеся произведением вложения $S^p \times D^{n-p-k-1} \rightarrow \partial D^{p+1} \times D^{n-p-k-1}$ и гомеоморфизма $T^k \rightarrow T^k$.

2) $S^p \times D^{n-p-k-1} \times T^k \rightarrow D^n$, которое есть произведение вложения $S^p \times D^{n-p-k-2} \rightarrow \partial D^{p+1} \times D^{n-p-k-2}$ и вложения трубчатой окрестности стандартного тора $T^k \subset D^{k+1}$.

Тогда

$$(D^{n-k} \times T^k) \#_{S^p \times T^k} D^n \cong \#_{j=0}^k C_k^j S^{p+1+j} \times D^{n-p-j-1}.$$

Теорема 4.7. Пусть дано стандартное вложение $T^k \subset D^{k+1} \subset D^n$, $n - k \geq 4$. Тогда

$$D^n \#_{T^k} D^n \cong \#_{j=1}^k C_k^j S^{j+1} \times D^{n-j-1}.$$

Теорема 4.8. Пусть даны вложения

1) $T^{m-n} \times D^{2n} \times T^1 \rightarrow D^{m-n+1} \times D^{2n} \times T^1$, являющиеся стандартным вложением тора по первому из сомножителей и тождественным отображением по остальным.

2) $T^{m-n} \times D^{2n} \times T^1 \rightarrow T^{m-n} \times D^{2n} \times D^2$, где отображение по первым двум из сомножителей тождественно, а по последнему является вложением $T^1 \rightarrow \partial D^2$.

Тогда

$$D^{m+n+1} \times T^1 \#_{T^{m-n} \times T^1} T^{m-n} \times D^{2n+2} \cong \#_{j=1}^{m-n} C_{m-n}^j S^{j+2} \times D^{m+n-j}.$$

4.3. Эквивариантные перестройки момент-угол многообразий.

В этом разделе мы опишем перестройки, происходящие с момент-угол многообразием \mathcal{X}_P при срезании вершины простого многогранника P .

Пусть P — n -мерный простой многогранник с m гипергранями, P' — многогранник, получающийся из P срезанием вершины v . Таким образом, P' имеет одну дополнительную гипергрань Δ_v , являющуюся $n - 1$ -мерным симплексом. Введем в рассмотрение, кроме того, многогранник \tilde{P} , получающийся из P добавлением одной «призрачной» гипергранни вблизи срезанной вершины v . Очевидно, что $\mathcal{X}_{\tilde{P}} = \mathcal{X}_P \times T^1$.

Обозначим через π_Q проекцию \mathcal{X}_Q на пространство обриту действия тора — многогранник Q . Непосредственно из определения находим, что $\pi_{\tilde{P}}^{-1}(v) = T^{m-n+1}$ — прообраз вершины в $\mathcal{X}_{\tilde{P}}$. Аналогично для гипергранни Δ_v многогранника P' имеем: $\pi_{P'}^{-1}(\Delta_v) = S^{2n-1} \times T^{m-n}$. Рассмотрим открытые окрестности вершины $v \in \tilde{P}$ и гипергранни $\Delta_v \subset P'$: $U(v) \cong \mathbb{R}_{\geq}^n$ и $U(\Delta_v) \cong \Delta_v \times \mathbb{R}_{\geq}$ соответственно. Обозначим через $V(\tilde{P}) = \tilde{P} \setminus U(v)$ и $V(P') = P' \setminus U(\Delta_v)$ дополнения к соответствующим открытым множествам.

Утверждение 4.9. Прообразы $\pi_{\tilde{P}}^{-1}(V(\tilde{P}))$ и $\pi_{P'}^{-1}(V(P'))$ множеств $V(\tilde{P})$ и $V(P')$ гомеоморфны.

Доказательство. отождествим $V(\tilde{P})$ и $V(P')$ со своими образами при вложении в \mathbb{R}_{\geq}^m .

Рассмотрим отображение $\mathbb{R}_{\geq}^m \times T \rightarrow \mathbb{C}$, $(\rho, \varphi) \mapsto \rho e^{i\varphi}$. Рассмотрим произведение таких отображений:

$$s : \mathbb{R}_{\geq}^m \times T^m \rightarrow \mathbb{C}^m.$$

По каждому набору индексов $\mathcal{I} \subset [m]$ определим торическую подгруппу ранга $|\mathcal{I}|$:

$$T^{\mathcal{I}} = \{t = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in T^m \mid \varphi_i = 0 \text{ при } i \in \mathcal{I}\} \subset T^m.$$

Пусть $r \in \mathbb{R}_{\geq}^m$, через $r \in \mathbb{R}_{\geq}^m$, через $\mathcal{I}(r) \subset [m]$ обозначим множество ненулевых координат вектора r .

Скажем, что $(r_1, t_1) \sim (r_2, t_2)$, если $r_1 = r_2$ и $t_1^{-1} \cdot t_2 \in T^{\mathcal{I}(r_1)}$. Заметим, что по нашему определению $(r_1, t_1) \sim (r_2, t_2)$ тогда и только тогда, когда $s(r_1, t_1) = s(r_2, t_2)$.

Обозначим через $\pi : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}^m$ стандартное отображение моментов. Непосредственно из определения следует, что для любого подмножества $X \subset \mathbb{R}_{\geq}^m$ его прообраз $\pi^{-1}(X)$ гомеоморфен факторпространству $X \times T^m / \sim$ по введенному выше отношению эквивалентности, ограниченному на $X \times T^m$.

Осталось применить описанную конструкцию к подмножествам $V(\tilde{P}), V(P') \subset \mathbb{R}_{\geq}^m$ и заметить, что множества $V(\tilde{P})$ и $V(P')$ гомеоморфны, а отношения эквивалентности индуцируемые на $V(\tilde{P}) \times T^m$ и $V(P') \times T^m$ совпадают. \square

В силу этого утверждения многообразие $\mathcal{Z}_{P'}$ получается из $\mathcal{Z}_{\bar{P}} \cong \mathcal{Z}_P \times T^1$ удалением «эквивариантного» диска $\pi_{\bar{P}}^{-1}(U(v)) \cong T^{m-n+1} \times \text{Int } D^{2n}$ и приклейкой «эквивариантной» ручки $\pi_{P'}^{-1}(U(\Delta_v)) \cong T^{m-n} \times S^{2n-1} \times \text{Int } D^2$.

$$\mathcal{Z}_{P'} \cong (\mathcal{Z}_P \times T^1) \setminus (T^{m-n} \times \text{Int } D^{2n} \times T^1) \cup_{T^{m-n} \times S^{2n-1} \times T^1} (T^{m-n} \times S^{2n-1} \times D^2)$$

Так как $D^{2n} \times T^1 \cup_{S^{2n-1} \times T^1} S^{2n-1} \times D^2 \cong S^{2n+1}$, то последнее равенство в терминологии из предыдущего раздела можно переписать следующим образом:

$$\mathcal{Z}_{P'} \cong (\mathcal{Z}_P \times T^1) \#_{T^{m-n} \times T^1} (T^{m-n} \times S^{2n+1}). \quad (8)$$

Отметим, что в действительности верно более сильное утверждение. А именно, эквивариантные подмножества $T^{m-n+1} \times \text{Int } D^{2n}$ и $T^{m-n} \times S^{2n-1} \times \text{Int } D^2$ можно выбрать таким образом, что описанная эквивалентность будет иметь место в категории гладких многообразий, подробности см. в [В-М] (Theorem 4.1).

4.4. Доказательство.

В этой части мы приведем основные шаги доказательства теоремы 4.1, за техническими деталями отсылаем читателя к доказательству, проведенному в [MG] для случая многоугольника.

Итак, пусть $\mathcal{Z}_P \cong \#_{i=1}^k S^{n_i} \times S^{m+n-n_i}$. Прежде всего, заметим, что в задании многогранника P неравенствами отсутствуют «призрачные» грани, так как иначе многообразие \mathcal{Z}_P распалось бы в произведение окружности S^1 и некоторого другого многообразия. Отсюда следует (см. [В-М] Лемма 0.10), что \mathcal{Z}_P 2-связно.

Согласно (8) нас интересует

$$((\#_{i=1}^k S^{n_i} \times S^{m+n-n_i}) \times T^1) \#_{T^{m-n} \times T^1} (T^{m-n} \times S^{2n+1}),$$

или, что то же самое,

$$\partial((V \times T^1) \#_{T^{m-n} \times T^1} (T^{m-n} \times D^{2n+2})),$$

где $V = \#_{i=1}^k D^{n_i+1} \times S^{m+n-n_i}$.

Согласно следствию 4.5, $V \cong (D^{m+n+1})_1 \#_X (D^{m+n+1})_2$, где $X = \#_{i=1}^k D^{n_i+1} \times S^{m+n-n_i-1}$. Можно считать, что $D^{2n} \times T^{m-n} \subset (D^{n+m})_1 \subset (D^{n+m+1})_1 \subset V$, где все включения кусочно-линейные. Чтобы найти $(V \times T^1) \#_{T^{m-n} \times T^1} (T^{m-n} \times D^{2n+2})$, вычислим сначала

$$((D^{m+n+1})_1 \times T^1) \#_{T^{m-n} \times T^1} (T^{m-n} \times D^{2n+2}).$$

Последнее согласно теореме 4.8 есть $N_1 \cong \#_{j=1}^{m-n} C_{m-n}^j S^{j+2} \times D^{m+n-j}$. Итак, теперь интересующую нас связную сумму можно переписать следующим образом:

$$((D^{m+n+1})_2 \times T^1) \cup_Y N_1,$$

где $Y = X \times T^1$. Можно проверить, что вложение $Y \subset N_1$ можно выбрать таким образом, что $Y = X \times T^1 \subset D^{m+n} \times D^2$, поэтому

$$((D^{m+n+1})_2 \times T^1) \cup_Y N_1 = N_1 \# N_2,$$

где $N_2 = ((D^{m+n+1})_2 \times T^1) \cup_Y (D^{m+n} \times D^2)$. Чтобы найти N_2 , достаточно разбить $(D^{n+m+1})_2$ на клетки C_k , по одной для каждого слагаемого вида $D^k \times S^{m+n-k} \subset X$, так, что $X \cap C_k = D^k \times S^{m+n-k}$, и воспользоваться леммой 4.4.

Окончательно имеем:

$$N_2 = (\#_{i=1}^k D^{n_i+2} \times S^{m+n-n_i}) \# (\#_{i=1}^k D^{n_i+1} \times S^{m+n-n_i+1}),$$

откуда

$$\mathcal{Z}_{P'} \cong \partial(N_1 \# N_2) \cong (\#_{i=1}^k S^{n_i+1} \times S^{m+n-n_i}) \# (\#_{i=1}^k S^{n_i} \times S^{m+n-n_i+1}) \# (\#_{j=1}^{m-n} C_{m-n}^j S^{j+2} \times S^{m+n-j-1}).$$

Теорема 4.1 доказана.

Список литературы

- [Б-П] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, Издательство МЦНМО, Москва, 2004.
- [B-M] Frédéric Bosio and Laurent Meersman. *Real quadrics in \mathbb{C}^n , complex manifolds and convex polytopes*, Acta Math., 197 (2006), 53-127.
- [G-M] Gitler, S., López de Medrano, S., *Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums*, arXiv:0901.2580v1 [math.GT] 16 Jan 2009.
- [LdM] López de Medrano, S., *Topology of the intersection of quadrics in \mathbb{R}^n* , in *Algebraic Topology* (Arcata, CA, 1986), Lecture Notes in Math., 1370, 280-292. Springer, Berlin 1989.
- [MG] McGavran D., *Adjacent connected sums and torus actions*, Trans. Amer. Math. Soc., 251 (1979), 235-254.