Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра высшей геометрии и топологии

Дипломная работа
студента 5 курса
Устиновского Юрия Михайловича

“Геометрические структуры на момент-угол-многообразиях”

Научный руководитель —Панов Т. Е.

Москва, 2011 г.

Введение

Изучение действий групп на топологических пространствах вообще и на многообразиях в частности является классической и очень обширной областью алгебраической топологии. В последние десятилетия особый интерес к пространствам с действием торов T^m обусловлен взаимным проникновением идей и методов большого числа различных разделов математики: комбинаторики, коммутативной алгебры, эквивариантной топологии, алгебраической и симплектической геометрии. В духе развития связей между описанными областями и построена настоящая работа.

Часть 1 посвящена общей топологической гипотезе о торическом ранге, одной из важных и интересных гипотез эквивариантной топологии. Она была сформулирована Гальпериным [Ha] для действия торов T^m и Карлссоном [Ca] для действия конечных групп $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^m$. Сама гипотеза дает нижнюю оценку на ранг кольца когомологий пространства со свободным действием группы:

Гипотеза. *Пусть на конечномерном CW — комплексе X свободно действует тор T^m (соответственно группа $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^m$), тогда*

$$\operatorname{hrk}(X,k) := \sum_i \dim_k H^i(X,k) \geqslant 2^m,$$

где $k=\mathbb{Q}$ (соответственно $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).

Мы докажем неравенства, влекущие гипотезу в случае $m \leqslant 3$ для произвольных комплексов X, повторяя, тем самым, результат [Pu]. Основной идеей в доказательстве обоих утверждений является анализ спектральной последовательности Лере-Серра расслоения $\pi\colon X \to X/T^m$ для построения подходящих моделей для вычисления групп когомологий $H^*(X,\mathbb{Q})$. Возникающие при этом объекты оказываются тесно связаны с гипотезой Хоррокса [Har79, prob. 24], хорошо известной в коммутативной алгебре и имеющей элементарное доказательство при небольших m.

В Части 2 определяются *момент-угол-комплексы* $\mathcal{Z}_K$ — одни из ключевых объектов *торической топологии.* Эти пространства параметризуются симплициальными комплексами K и допускают естественное действие тора T^m. Первоначальная конструкция момент-угол-комплексов восходит к работе Дэвиса–Янушкевича [DJ]. В последствии в работе [BP](Конструкция 7.14) пространства $\mathcal{Z}_K$ были описаны, как результаты склейки полидисков $(D^2)^k \times T^{m-k}$. Так как на пространствах $\mathcal{Z}_K$ имеется действие тора T^m, естественно задать следующие вопросы: 1) Подтор $T^r \subset T^m$ какого ранга может действовать на пространстве $\mathcal{Z}_K$ свободно? 2) Если тор $T^r \subset T^m$ действует на пространстве $\mathcal{Z}_K$ свободно, выполняется ли для этого действия гипотеза о торическом ранге? Оценке максимального r из первого вопроса и доказательству положительного ответа на второй вопрос и посвящена часть 2 этой работы. В процессе доказательства мы используем интересную саму по себе комбинаторную операцию, которую называем операцией *удвоения.* В контексте торической топологии эта операция появилась в работе [BBCG] и была успешно использована, например, в статье [Er].

Для широкого класса симплициальных комплексов пространства $\mathcal{Z}_K$ допускают довольно тонкие геометрические структуры. В Части 3 мы подробно изучим возможность введения на момент-угол-комплексах гладких и комплексных структур. Мы покажем, что для симплициальных комплексов, происходящих из полных симплициальных вееров, пространства $\mathcal{Z}_K$ допускают структуры гладких многообразий. Важность этого класса комплексов демонстрируется структурными результатами работы Данилова [Da] о торических многообразиях. Далее, для четномерных момент-угол-многообразий мы приведем конструкцию, позволяющую по дополнительным данным строить на них комплексные структуры, и изучим важные инварианты этих комплексных структур — числа Ходжа. Примеры комплексных многообразий, которые нам удается построить таким образом включают, в себя первые примеры некэлеровых многообразий: многообразия Хопфа и Калаби–Экманна.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю Тарасу Евгеньевичу Панову за постановку задач, и постоянное внимание к работе. Также автор благодарен Виктору Матвеевичу Бухштаберу, Александру Александровичу Гайфуллину и Андрею Александровичу Кустареву за плодотворные обсуждения и ценные замечания.

1. Гипотеза о торическом ранге

1.1. **Главные T^m-расслоения.** Пусть X — конечномерный CW комплекс со свободным действием m -мерного тора T^m. Нашей ближайшей целью является построение удобной модели для вычисления когомологий пространства X. По видимому, все излагаемые ниже результаты верны и в предположении конечности стабилизаторов всех точек, однако мы ограничимся случаем свободных действий.

Лемма 1.1. *Набор (X, M, T^m, π), где $M = X/T^m$, а $\pi\colon X \to M$ — проекция на пространство орбит, является локально-тривиальным, гомологически простым расслоением.*

Доказательство. Так как π — проекция на пространство орбит свободного действия компактной группы, то автоматически (X, M, T^m, π) оказывается главным T^m-расслоением.

Докажем теперь гомологическую простоту этого расслоения. Выберем произвольную петлю $\gamma\colon S^1 \to M$ и рассмотрим расслоение $\gamma^*\pi$ над S^1. Главное T^m-расслоение над произвольным пространством Y классифицируется некоторым элементом из группы $H^2(Y, \mathbb{Z}^m)$. Так как группа $H^2(S^1, \mathbb{Z}^m)$ нулевая, то расслоение $\gamma^*\pi$ тривиально и действие всякого элемента $[\gamma] \in \pi_1(M)$ на когомологиях слоя тоже тривиально. $\square$

Лемма 1.2. [Hof, Th. 1.6] *Спектральная последовательность Лере-Серра расслоения (X, M, T^m, π), вычисляющая $H^*(X, \mathbb{Q})$, вырождается в члене E_3 и дифференциал d_2 определяется характеристическим классом $\tau \in H^2(M, \mathbb{Z}^m)$ главного T^m-расслоения $X \to M$.*

Доказательство. Согласно лемме 1.1 спектральная последовательность Лере-Серра расслоения $T^m \to X \to M$ сходится к когомологиям X. Рассмотрим эту последовательность с коэффициентами в $\mathbb{Q}$. В случае универсального T^m-расслоения $ET^m \to BT^m$ дифференциал в клеточных коцепях $C^*(ET^m)$ повышает фильтрацию степенями базы не более чем на 2. Следовательно, дифференциал в исходной алгебре клеточных коцепей $C^*(X)$ также увеличивает фильтрацию не более чем на 2, так как существует классифицирующее отображение, являющееся вложением, $\iota\colon M \to BT^m$, индуцирующее сюръективное отображение на уровне коцепей $C^*(ET^m) \to C^*(X)$. Итак, все старшие дифференциалы $d_i, i \geqslant 3$ тривиальны, тем самым $E_3 = E_\infty$.

Поскольку дифференциал d_2 спектральной последовательности удовлетворяет правилу Лейбница, то достаточно задать его на мультипликативных образующих $E_2 = H^*(T^m, \mathbb{Q}) \otimes H^*(M, \mathbb{Q})$. По соображениями размерности $d^2|_{E^{*,0}} = 0$, поэтому осталось найти $d_2\colon H^1(T^m, \mathbb{Q}) \to H^2(M, \mathbb{Q})$. Легко проверить, что для универсального расслоения $ET^m \to BT^m$ d_2 является изоморфизмом, поэтому в силу естественности спектральной последовательности $d_2\colon H^1(T^m, \mathbb{Q}) \to H^2(M, \mathbb{Q})$ совпадает с $i^*\colon H^2(BT^m, \mathbb{Q}) \to H^2(M, \mathbb{Q})$, где $i\colon M \to BT^m$ — классифицирующее отображение. Осталось заметить, что характеристический класс $\tau \in H^2(M, \mathbb{Z}^m)$ как раз соответствует отображению $i^*\colon H^2(BT^m, \mathbb{Z}) \to H^2(M, \mathbb{Z})$. $\square$

Эта лемма позволяет построить аддитивную модель для когомологий пространства со свободным действием тора, которую мы в дальнейшем будем использовать.

Следствие 1.3. *Имеет место изоморфизм векторных пространств*

$$H^*(X, \mathbb{Q}) \simeq H^*\big[H^*(M, \mathbb{Q}) \otimes H^*(T^m, \mathbb{Q}), d\big]. \tag{1}$$

Оказывается, что во многих случаях этот изоморфизм предоставляет мультипликативную модель пространства со свободным действием тора.

Предложение 1.4. *Пусть $X \to M$ — главное торическое расслоение. Если пространство M — формально, то имеет место изоморфизм алгебр*

$$H^*(X, \mathbb{Q}) \simeq H^*\big[H^*(M, \mathbb{Q}) \otimes H^*(T^m, \mathbb{Q}), d\big]. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}(M)$ — минимальная модель пространства M. Тогда согласно [FHT, Prop. 15.15] моделью алгебры когомологий пространства X является дифференциальная алгебра $\mathcal{M}(M) \otimes \Lambda(u_1, \dots, u_m)$ с дифференциалом d, заданным на Λ^1 так, что отображение $d\colon \Lambda^1 \to \mathcal{M}(M)^2$ реализует характеристический класс $\tau \otimes \mathbb{Q}$.

Так как пространство X формально, то существует квази-изоморфизм $\varphi\colon \mathcal{M}(M) \to H^*(M, \mathbb{Q})$. Согласно теореме [FHT, Lemma 14.2] φ продолжается до квази-изоморфизма

$$\varphi \otimes \mathrm{id}\colon \big[\mathcal{M}(M) \otimes \Lambda(u_1, \dots, u_m), d\big] \to \big[H^*(M, \mathbb{Q}) \otimes \Lambda(u_1, \dots, u_m), d\big].$$

Тем самым, алгебра $H^*\big[H^*(M, \mathbb{Q}) \otimes \Lambda(u_1, \dots, u_m), d\big]$ изоморфна алгебре когомологий $H^*(X, \mathbb{Q})$, что и требовалось. $\square$

1.2. **Гипотеза Хоррокса.** Обозначим алгебру $H^*(M,\mathbb{Q})$ за $\mathcal{A}^*$, а внешнюю алгебру $H^*(T^m,\mathbb{Q})$ за $\Lambda^*(u_1,\dots,u_m)$. Изоморфизм (1) позволяет свести исходную топологическую задачу оценки ранга когомологий пространства со свободным действием тора к чисто алгебраической задаче вычисления когомологий дифференциальной градуированной алгебры

$$\mathcal{B} = \big(\mathcal{A}^* \otimes \Lambda^*(u_1,\dots,u_m), d\big).$$

Дифференциал d задан на компоненте Λ^1, равен 0 на $\mathcal{A}$ и продолжен до дифференцирования алгебры по правилу Лейбница. Отображение $d\colon \Lambda^1(u_1,\dots,u_m) \to \mathcal{A}^2$ естественным образом задает на алгебре $\mathcal{A}$ структуру модуля над кольцом многочленов $\mathbb{Q}[v_1,\dots,v_m]$. При топологической интерпретации это стандартная структура $H^*_{T^m}(pt)$-модуля в эквивариантных когомологиях $H^*_{T^m}(X,\mathbb{Q}) = H^*(M,\mathbb{Q})$. Интересующая нас алгебра $\mathcal{B}$ совпадает с резольвентой для вычисления градуированного модуля $\mathrm{Tor}^*_{\mathbb{Q}[v_1,\dots,v_m]}(\mathcal{A},\mathbb{Q})$, в частности $H^*(\mathcal{B}) = \mathrm{Tor}^*_{\mathbb{Q}[v_1,\dots,v_m]}(\mathcal{A},\mathbb{Q})$.

В связи с естественным возникновением модулей $\mathrm{Tor}^*_{\mathbb{Q}[v_1,\dots,v_m]}(\mathcal{A},\mathbb{Q})$ сформулируем гипотезу Хоррокса, выдвинутую впервые в работах [BE, p. 453], [Har79, prob. 24]. Данная формулировка не является наиболее общей, однако именно в такой общности она будет применена в нашем случае. Поскольку все модули рассматриваются над одной и той же алгеброй $\mathbb{Q}[v_1,\dots,v_m]$, соответствующий индекс у Tor —модулей будет опускаться; модули предполагаются градуированными, а морфизмы уважающими градуировку.

Гипотеза. *Пусть M — конечномерный модуль над кольцом многочленов $\mathbb{Q}[v_1,\dots,v_m]$, тогда*

$$\dim \mathrm{Tor}^i(M,\mathbb{Q}) \geqslant \binom{m}{i}, \qquad i = 0,\dots,m.$$

Также часто формулируется ослабленный вариант гипотезы:

Гипотеза. *Пусть M — конечномерный модуль над кольцом многочленов $\mathbb{Q}[v_1,\dots,v_m]$, тогда*

$$\dim \mathrm{Tor}^*(M,\mathbb{Q}) \geqslant 2^m. \tag{3}$$

Предложение 1.5. *Из слабого варианта гипотезы Хоррокса следует гипотеза о торическом ранге.*

Доказательство. Пусть действие $T^m : X$ удовлетворяет условиям гипотезы о торическом ранге. Тогда согласно (1) имеет место изоморфизм векторных пространств

$$H^*(X,\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Tor}^*(\mathcal{A},\mathbb{Q}),$$

где $\mathcal{A} = H^*(X/T^m,\mathbb{Q})$. Так как пространство X — конечный CW-комплекс, то пространство X/T^m тоже конечно, следовательно $\dim\mathcal{A} < \infty$, поэтому согласно слабой гипотезе Хоррокса 3

$$\dim H^*(X,\mathbb{Q}) = \dim \mathrm{Tor}^*(\mathcal{A},\mathbb{Q}) \geqslant 2^m,$$

что и требовалось. □

Ниже мы дадим доказательство двух неравенств гипотезы Хоррокса и применим их для получения оценок слабой гипотезы Хоррокса в нескольких частных случаях.

Лемма 1.6. *Пусть M — конечномерный модуль над кольцом многочленов $\mathbb{Q}[v_1,\dots,v_m]$, тогда*

1) $\dim \mathrm{Tor}^1(M,\mathbb{Q}) \geqslant m$,
2) $\dim \mathrm{Tor}^m(M,\mathbb{Q}) \geqslant 1$.

Доказательство. Докажем сначала первую часть. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathcal{I} \to \bigoplus_{i=1}^{k} F_i \to M \to 0,$$

где $k = \dim \mathrm{Tor}^0(M,\mathbb{Q})$ — минимальное число образующих модуля M, F_i — свободные модули ранга 1, $\mathcal{I}$ — ядро естественной проекции. Лемма утверждает, что минимальное число образующих $\mathcal{I}$ не меньше m. Действительно, пусть $f_1,\dots,f_s \in \bigoplus_{i=1}^k F_i$ — образующие модуля $\mathcal{I}$, тогда $\varphi_1 = \mathrm{pr}_1(f_1),\dots,\varphi_s = \mathrm{pr}_1(f_s)$ порождают некоторый однородный идеал $\mathcal{J}$ в F_1, причем $\mathcal{J}$ собственный в силу минимальности k, а $\dim F_1/\mathcal{J} \leqslant \dim M < \infty$.

Итак, задача свелась к оценке минимального числа однородных образующих идеала $\mathcal{J} \subsetneq \mathbb{Q}[v_1,\dots,v_m]$ такого, что $\dim \mathbb{Q}[v_1,\dots,v_m]/\mathcal{J} < \infty$. Согласно стандартному результату из коммутативной алгебры [Har77, Th. 7.2], размерность пересечения конических гиперповерхностей $\varphi_i(v_1,\dots,v_m) = 0$, $i = 1,\dots,s$ в $\mathbb{C}^m$ не меньше $m-s$, с другой стороны $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Q}[v_1,\dots,v_m]/\mathcal{J})\otimes\mathbb{C} = \{0\}$, так как все элементы положительной градуировки в $\mathbb{C}[v_1,\ldots,v_m]/\mathcal{J}$ нильпотентны. Следовательно $s \geqslant m$, что и требовалось доказать.

Для доказательства второй части рассмотрим в M какой-нибудь элемент максимальной градуировки $a \in M$, тогда элемент $a \cdot u_1 \wedge \ldots \wedge u_m$ будет являться коциклом в $M \otimes \Lambda^m(u_1,\ldots,u_m)$ и представлять ненулевой класс в $\mathrm{Tor}^m(M,\mathbb{Q})$. □

Теорема 1.7. *Пусть M — конечномерный модуль над кольцом многочленов $S(v_1,\ldots,v_m)$, тогда в случае четного m имеем* $\dim \mathrm{Tor}^*(M,\mathbb{Q}) \geqslant 3m-2$, *а в случае нечетного m* $\dim \mathrm{Tor}^*(M,\mathbb{Q}) \geqslant 3m-1$.

Доказательство. Лемма 1.6 утверждает, что $\dim \mathrm{Tor}^m(M,\mathbb{Q}) \geqslant 1$, поэтому, согласно свойствам функтора Tor для всех $i = 0,\ldots m$ $\mathrm{Tor}^i(M,\mathbb{Q}) \geqslant 1$, так как в противном случае свободная резольвента модуля M обрывается раньше, чем в члене m. Отсюда и из утверждения $\mathrm{Tor}^1(M,\mathbb{Q}) \geqslant m$ следует, что

$$S_{odd} := \sum_{i=2k+1} \dim \mathrm{Tor}^i(M,\mathbb{Q}) \geqslant m + [\frac{m-1}{2}].$$

С другой стороны, гомологическая эйлерова характеристика $\chi_h(\mathrm{Tor}^*(M,\mathbb{Q})) = \sum(-1)^i \dim \mathrm{Tor}^i(M,\mathbb{Q})$ равна 0:

$$\chi_h(\mathrm{Tor}^*(M,\mathbb{Q})) = \chi_h(M \otimes \Lambda(u_1,\ldots,u_m)) = 0.$$

Следовательно $\dim \mathrm{Tor}^*(M,\mathbb{Q}) = S_{odd} + S_{even} = 2S_{odd} \geqslant 2m + 2[\frac{m-1}{2}]$, где $S_{even} := \sum_{i=2k} \dim \mathrm{Tor}^i(M,\mathbb{Q})$. Что и требовалось доказать. □

Согласно предложению 1.5 те же неравенства выполняются и для оценки ранга кольца когомологий со свободным действием r-мерного тора T^r, в частности гипотеза о торическом ранге выполнена для $r \leqslant 3$:

Следствие 1.8. *Пусть тор T^m свободно действует на конечномерном пространстве X, тогда при четном m*

$$\mathrm{hrk}(X,\mathbb{Q}) \geqslant 3m-2,$$

при нечетном m

$$\mathrm{hrk}(X,\mathbb{Q}) \geqslant 3m-1.$$

2. Гипотеза о торическом ранге для момент-угол-комплексов

В этой части мы определим момент-угол-комплексы — широкий класс пространств с естественным действием действием тора T^m и проверим выполнение гипотезы о торическом ранге для свободного действия подторов в T^m.

Определение 1. Рассмотрим пару клеточных комплексов (X,A). Для подмножества $\omega \subset [m]$ определим

$$(X,A)^\omega := \{(x_1,\ldots,x_m) \in X^m | x_i \in A \text{ при } v_i \notin \omega\}.$$

Рассмотрим теперь симплициальный комплекс K на множестве $[m]$. *K-степенью* пары (X,A) называется топологическое пространство

$$(X,A)^K := \bigcup_{\omega \in K} (X,A)^\omega.$$

Определение 2. [BP, 7.14] Пусть дан симплициальный комплекс K на множестве вершни $[m]$. *Момент-угол-комплексом $\mathcal{Z}_K$* называется K-степень

$$\mathcal{Z}_K := (D^2, S^1)^K.$$

Отметим, что в определении 2 комплекс K не обязан содержать все $[m]$ вершин, отсутствующие вершины мы будем называть *пустыми.* Имеется альтернативное определение пространств $\mathcal{Z}_K$ для симплициальных комплексов K_P двойственных к границам простых многогранников P, про котором $\mathcal{Z}_K$ задается пересечением квадратичных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^m$, соответствующие момент-угол-комплексы оказываются гладкими многообразиями и обозначаются $\mathcal{Z}_P$.

Далее мы будем иметь дело еще с несколькими важными примерами K-степеней

Примеры 1.

- Вещественные аналоги момент-угол-комплексов: $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K = (I^1, S^0)^K$.
- Дополнения к набору координатных подпространств: $U(K) = (\mathbb{C}, \mathbb{C}^*)^K$

- Фактор-пространство $U(K)$ по естественному действию T^m: $U(K)/T^m = (\mathbb{R}_{\geqslant}, \mathbb{R}_{>})^K$
- Кубическая реализация конуса над комплексом K: $cc(K) = ([0;1], 1)^K \simeq \mathrm{cone} K$

На пространстве $\mathcal{Z}_K$ имеется стандартное покоординатное действие m-мерного тора. Это действие несвободно, но при некоторых r возможно выбрать подтор $T^r \subset T^m$, действующий на пространстве $\mathcal{Z}_K$ почти свободно. Мы хотим оценить сверху максимальный ранг r такого подтора и найти нижнюю границу для $\mathrm{hrk}(\mathcal{Z}_K, \mathbb{Q})$.

Лемма 2.1. *Пусть K — $(n-1)$-мерный симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Тогда ранг подтора $T^r \subset T^m$, действующего на $\mathcal{Z}_K$ почти свободно, не превосходит $m-n$.*

Доказательство. Для подмножества $\omega \subset [m]$ положим $T^\omega = (T, e)^\omega$ (см. определение K-степеней), где $e \in T$ единица группы. Легко видеть, что стабилизаторы точек в $\mathcal{Z}_K$ имеют вид T^ω, $\omega \in K$. Следовательно $T^r \subset T^m$ действует почти свободно тогда и только тогда, когда пересечение $T^r \cap T^\omega$ конечно для каждого симплекса $\omega \in K$.

Рассмотрим симплекс σ размерности $(n-1)$. Так как пересечение $T^r \cap T^\sigma$ двух подторов в T^m конечно, то

$$\mathrm{rk}\, T^r + \mathrm{rk}\, T^\sigma \leqslant \mathrm{rk}\, T^m,$$

поэтому $r \leqslant m - n$.□ □

Замечание. На самом деле для каждого $(n-1)$-мерного комплекса K найдется подтор $T^r \subset T^m$ ранга в точности $r = m - n$, действующий на $\mathcal{Z}_K$ почти свободно, [DJ, §7.1].

Оказывается, что момент-угол-комплексы и их вещественные аналоги могут связаны напрямую при помощи интересной комбинаторной операции – операции удвоения симплициальных комплексов. Об определениях, сформулированных ниже, автор узнал от авторов недавней работы [BBCG], в которой впервые операция удвоения была рассмотрена в контексте торической топологии.

Определение 3. Пусть K — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m] = \{v_1, \ldots, v_m\}$. *Удвоением* K называется комплекс $L(K)$ на множестве вершин $[2m] = \{v_1, v_1', \ldots, v_m, v_m'\}$ определяемый следующим условием: $\omega \subset [2m]$ является минимальным (по включению) недостающим симплексом комплекса $L(K)$ тогда и только тогда, когда ω имеет вид $\{v_{i_1}, v_{i_1}', \ldots, v_{i_k}, v_{i_k}'\}$, где $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$ недостающий симплекс комплекса K.

Отметим, что если комплекс $K = \partial P^*$ является границей многогранника двойственного к простому многограннику P, то $L(K)$ совпадает с $L(P)^*$, (см. Определение 1 в [Us1]). Операция удвоения простых многогранников использовалась также в работе [G-L].

Примеры 2.

- Если $K = \Delta(m)$ есть $(m-1)$-мерный симплекс, то $L(K) = \Delta(2m)$.
- Если $K = \partial\Delta(m)$ граница $(m-1)$-мерного симплекса, то $L(K) = \partial\Delta(2m)$.

Легко видеть, что операция удвоения уважает джоин симплициальных комплексов, т.е. $L(K_1 * K_2) = L(K_1) * L(K_2)$.

Обозначим через $\mathrm{mdim}\, K$ минимальную размерность максимального по включению симплекса комплекса K. Таким образом, например, комплекс K является *чистым* тогда и только тогда, когда $\mathrm{mdim}\, K = \dim K$.

Следующая лемма напрямую следует из определений.

Лемма 2.2. *Пусть K — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, тогда* $\dim L(K) = m + \dim K$ *и* $\mathrm{mdim}\, L(K) = m + \mathrm{mdim}\, K$.

Оказывается, что операция удвоения естественным образом возникает при изучении связей между момент-угол-комплексами и их вещественными аналогами.

Лемма 2.3. *Пусть (X, A) — пара клеточных комплексов а K — симплициальный комплекс на множестве $[m]$. Рассмотрим пару пространств $(Y, B) = (X \times X, (X \times A) \cup (A \times X))$. Тогда:*

$$(Y, B)^K = (X, A)^{L(K)}.$$

В частности $\mathcal{Z}_K = \mathbb{R}\mathcal{Z}_{L(K)}$.

Доказательство. Для точки $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in Y^m$ положим

$$\omega_Y(\mathbf{y}) = \{v_i \in [m] \mid y_i \in Y \backslash B\} \subset [m].$$

Для точки $\mathbf{x} = (x_1, x'_1, \dots, x_m, x'_m) \in X^{2m}$ подмножество $\omega_X(\mathbf{x}) \subset [2m]$ определяется аналогично. Пусть $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) = ((x_1, x'_1), \dots, (x_m, x'_m)) \in Y^m = X^{2m}$. Из определения K-степеней следует что $\mathbf{y} \notin (Y, B)^K$ тогда и только тогда, когда $\omega_Y(\mathbf{y}) \notin K$. Покажем, что последнее эквивалентно условию $\omega_X(\mathbf{x}) \notin L(K)$, где $\mathbf{x} = (x_1, x'_1, \dots, x_m, x'_m)$.

Действительно, если $\omega_Y(\mathbf{y}) = \{v_{i_1}, \dots v_{i_k}\} \notin K$ то $\omega_X(\mathbf{x}) \supset \{v_{i_1}, v'_{i_1}, \dots, v_{i_k}, v'_{i_k}\} \notin L(K)$. Обратно, пусть $\omega_X(\mathbf{x}) \notin L(K)$, тогда по определению операции удвоения в комплексе $L(K)$ найдется недостающий симплекс вида $\{v_{i_1}, v'_{i_1}, \dots, v_{i_k}, v'_{i_k}\} \subset \omega_X(\mathbf{x})$, где $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\} \notin K$. Следовательно $\omega_Y(\mathbf{y})$ содержит недостающий симплекс комплекса K, что и требовалось.

Итак, окончательно имеем:

$$\mathbf{y} \notin (Y, B)^K \Leftrightarrow \mathbf{x} \notin (X, A)^{L(K)},$$

тем самым, утверждение леммы доказано. □

Пример 3. Пусть $K = \partial\Delta^2$. Тогда мы имеем стандартное разложение трехмерной сферы:

$$\mathcal{Z}_K = D^2 \times S^1 \cup S^1 \times D^2 = S^3.$$

С другой стороны $L(K) = \partial\Delta^4$ поэтому $\mathbb{R}\mathcal{Z}_{L(K)} = \partial I^4 = S^3$ есть граница четырехмерного куба. Таким образом, в соответствии с леммой $\mathcal{Z}_K = \mathbb{R}\mathcal{Z}_{L(K)}$.

Теперь мы можем сформулировать основной результат о когомологиях вещественных момент-угол-многообразий.

Теорема 2.4. *Пусть симплициальный комплекс K на множестве вершин $[m]$ с $\operatorname{mdim} K = n - 1$. Тогда*

$$\operatorname{hrk}(\mathbb{R}\mathcal{Z}_K, \mathbb{Q}) \geqslant 2^{m-n}.$$

Для начала сформулируем и докажем одну общую лемму.

Лемма 2.5. *Пусть пара клеточных пространств (X, A) такова, что у A есть окрестность $U(A)$ в X, вида $(U(A), A) \cong (A \times [0; 1), A \times \{0\})$. Обозначим за $Y = X_1 \bigcup_A X_2$ пространство, полученное склейкой двух копий X вдоль A. Тогда для ранга кольца когомологий пространства Y имеет место оценка снизу:*

$$\operatorname{hrk}(Y, \mathbb{Q}) \geqslant \operatorname{hrk}(A, \mathbb{Q}).$$

Доказательство. Пусть $Y = X_1 \cup X_2$ и $U_1(A)$, $U_2(A)$ — окрестности пространства A в X_1 и в X_2 соответственно. Рассмотрим покрытие $Y = W_1 \cup W_2$ открытыми множествами $W_1 = X_1 \cup U_2(A)$, $W_2 = X_2 \cup U_1(A)$ (в частности $W_i \cong_{he} X$; $W_1 \cap W_2 = U_1(A) \cup U_2(A) \cong A \times (-1, 1)$). Теперь рассмотрим длинную точную последовательность Майера-Вьеториса и оценим ранг кольца когомологий пространства Y:

$$\cdots \xrightarrow{p^*_{(k-1)}} H^{k-1}(W_1 \cap W_2) \xrightarrow{\delta^*_{(k)}} H^k(Y) \xrightarrow{g^*_{(k)}} H^k(W_1) \oplus H^k(W_2) \xrightarrow{p^*_{(k)}} \cdots$$

Отображение $p^*_{(k)}$ имеет вид $(i_1^*) \oplus (-i_2^*)$ где i_1 и i_2 вложения пространства $W_1 \cap W_2$ в W_1 и W_2 соответственно. Так как $W_1 = W_2$ и отображения i_1 и i_2 совпадают, то $\dim\ker p^*_{(k)} \geqslant \dim H^k(W_1) = \dim H^k(X)$. Применяя эти неравенства (напомним, что $W_1 \cap W_2 \cong_{he} A$), получаем:

$$\dim H^k(Y) = \dim\ker g^*_{(k)} + \dim\operatorname{im} g^*_{(k)} = \dim\operatorname{im}\delta^*_{(k)} + \dim\ker p^*_{(k)} \geqslant \dim H^{k-1}(A) -$$
$$- \dim\operatorname{im} p^*_{(k-1)} + \dim H^k(X) \geqslant \dim H^{k-1}(A) - \dim H^{k-1}(X) + \dim H^k(X).$$

Осталось лишь просуммировать эти неравенства по k:

$$\operatorname{hrk}(Y, \mathbb{Q}) = \sum \dim H^k(Y) \geqslant \sum \big(\dim H^{k-1}(A) - \dim H^{k-1}(X) + \dim H^k(X)\big) =$$
$$= \sum \dim H^{k-1}(A) = \operatorname{hrk}(A, \mathbb{Q}),$$

что и требовалось. □

Доказательство теоремы 2.4. Доказательство проведем индукцией по m. База индукции очевидна.

Предположим, что утверждение теоремы верно для всех комплексов с менее, чем m вершинами, а комплекс K имеет m вершин.

Вещественное момент-угол-многообразие естественным образом вкладывается в m-мерный куб:

$$\mathbb{R}\mathcal{Z}_K \subset [-1; 1]^m.$$

Обозначим за $(x_1, \ldots, x_m)$ координаты в $[-1;1]^m$. Без ограничения общности можно считать, что вершина v_1 принадлежит максимальному (по включению) симплексу комплекса K размерности $\operatorname{mdim} K = n-1$. Рассмотрим разложение $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K = M_+ \cup_X M_-$, где

$M_+ = \{\vec{x} \in \mathbb{R}\mathcal{Z}_K \subset \mathbb{R}^m \mid x_1 \geqslant 0\}$,
$M_- = \{\vec{x} \in \mathbb{R}\mathcal{Z}_K \subset \mathbb{R}^m \mid x_1 \leqslant 0\}$,
$X = \{\vec{x} \in \mathbb{R}\mathcal{Z}_K \subset \mathbb{R}^m \mid x_1 = 0\}$.

Легко видеть, что пара пространств (M_+, X) удовлетворяет предположению леммы 2.5, поэтому

$$\operatorname{hrk}(\mathbb{R}\mathcal{Z}_K, \mathbb{Q}) \geqslant \operatorname{hrk}(X, \mathbb{Q}).$$

Опишем пространство X более подробно. Обозначим за k число вершин комплекса $\operatorname{lk} v_1$. Тогда пространство X есть объединение 2^{m-k-1} копий пространства $\mathbb{R}\mathcal{Z}_{\operatorname{lk} v_1}$. Более того, так как вершина v_1 принадлежит максимальному по включению симплексу размерности $n-1$, то $\operatorname{mdim} \operatorname{lk} v_1 = n-2$. Таким образом, по предположению индукции

$$\operatorname{hrk}(X, \mathbb{Q}) = 2^{m-k-1} \operatorname{hrk}(\mathbb{R}\mathcal{Z}_{\operatorname{lk} v_1}, \mathbb{Q}) \geqslant 2^{m-k-1} \cdot 2^{k-(n-1)} = 2^{m-n}$$

Переход индукции доказан. □

Обратимся теперь к момент-угол-комплексам. Комбинируя результаты лемм 2.2 и 2.3, а также теоремы 2.4, мы получаем:

$$\operatorname{hrk}(\mathcal{Z}_K, \mathbb{Q}) = \operatorname{hrk}(\mathbb{R}\mathcal{Z}_{L(K)}) \geqslant 2^{2m - \operatorname{mdim} L(K) - 1} = 2^{m - \operatorname{mdim} K - 1} \geqslant 2^{m - \dim K - 1}.$$

Итак, *гипотеза о торическом ранге* выполнена для действия подторов в торе T^m, действующем стандартным образом на момент-угол-комплексах $\mathcal{Z}_K$.

Кольцо когомологий пространства $\mathcal{Z}_K$ было вычислено в [BP]. Одно из следствий этого вычисления и теоремы Хохстера утверждает (см. [BP], теорема 8.7):

Теорема 2.6.

$$H^*(\mathcal{Z}_K, \mathbb{Q}) \cong \bigoplus_{\omega \subset [m],\ p \geqslant -1} \tilde{H}^p(K_\omega, \mathbb{Q}),$$

где K_ω ограничение комплекса K на подмножество $\omega \subset [m]$.

Ввиду этой теоремы мы можем переформулировать наш основной результат исключительно в комбинаторных терминах.

Следствие 2.7. *Для всякого симплициального комплекса K на множестве вершин $[m]$ с $\operatorname{mdim} K = n-1$ выполнено неравенство:*

$$\dim \bigoplus_{\omega \subset [m]} \tilde{H}^*(K_\omega, \mathbb{Q}) \geqslant 2^{m-n}.$$

3. Гладкие и комплексные структуры на момент-угол-комплексах

В этой части мы подробнее остановимся на геометрии момент-угол-комплексов, а именно опишем широкий класс комплексов K, для которых момент-угол-комплексы $\mathcal{Z}_K$ допускают гладкие комплексно-аналитические структуры. После этого при некоторых ограничениях на эти структуры мы вычислим когомологии Дольбо $H^{p,q}(\mathcal{Z}_K)$, которые кодируют важные инварианты комплексных многообразий, обобщив, тем самым, результат Бореля, описавшего кольцо когомологии Дольбо многообразий Хопфа и Калаби-Экманна, на гораздо более широкий класс многообразий.

Сначала перечислим известные результаты касающиеся проблемы гладких структур на момент-угол-комплексах.

Теорема 3.1. [BP, Лемма 7.13] *Пусть K — триангуляция сферы S^n, тогда момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_K$ допускает структуру топологического многообразия.*

Теорема 3.2. [BP, Констр. 7.8] *Пусть $K = K_P$ — симплициальный комплекс, двойственный к границе простого многогранника P. Тогда на $\mathcal{Z}_{K_P}$ имеется каноническая структура гладкого многообразия.*

Ввиду перечисленных теорем возникает вопрос:

Вопрос. *Для каких триангуляций K сферы S^n топологическое многообразие $\mathcal{Z}_K$ может быть сглажено?*

Частичный ответ на этот вопрос будет дан ниже, а именно, мы докажем, что если комплекс $K = K_\Sigma$ соответствует полному симплициальному вееру Σ, то $\mathcal{Z}_{K_\Sigma}$ допускает структуру гладкого многообразия. Основной идеей является представление момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_{K_\Sigma}$ как фактор-пространства некоторого некомпактного многообразия по свободному собственному действию группы $R_\Sigma \simeq \mathbb{R}^d$.

С другой стороны, удивительным образом оказывается, что многие момент-угол-многообразия допускают структуру некэлеровых комплексных многообразий. Исторически первый пример компактного некэлерова многообразия был приведен Хайнцем Хопфом в 1948 году в работе [Hop], который построил комплексную структуру на многообразии $S^3 \times S^1$. Следующий по сложности пример был найден в работе Калаби и Экманна [CE] в 1953 году, в которой при помощи главного T^2-расслоения $S^{2p+1} \times S^{2q+1} \to \mathbb{C}P^p \times \mathbb{C}P^q$ комплексной структурой было снабжено произведение двух нечетномерных сфер. Последнее время в нескольких работах Лопеса де Медрано, Меерсманна, Верховски ([LV], [Me], [MV]) были описаны комплексные структуры на широком классе многообразий, заданных невырожденным пересечением вещественных квадрик в $\mathbb{C}^m$, который включает в себя и многообразия Хопфа и многообразия Калаби-Экманна. В работе Босио и Меерсманна [BM] авторы обратили внимание, что все эти пересечения квадрик являются момент-угол-многообразиями над комплексами K_P, двойственными к границе простых многогранников P. Поэтому естественно спросить:

Вопрос. *Для каких триангуляций K сферы S^n многообразие $\mathcal{Z}_K$ допускает комплексную структуру?*

Мы покажем, что, если Σ — полный симплициальный веер (не обязательно рациональный), K_Σ — соответствующий симплициальный комплекс и размерность многообразия $\mathcal{Z}_{K_\Sigma}$ четна, то момент-угол-комплекс допускает структуру комплексного многообразия. Многообразия, получаемые таким образом, за исключением тривиальных случаев, некэлеровы. Описанное семейство включают в себя как и упомянутые выше классические примеры (многообразия Хопфа и Калаби-Экманна), так и их обобщения предложенные в работах Лопеса де Медрано, Меерсманна, Верховски, Босио. В недавней работой Тамбо [Ta] при помощи несколько других методов были построены комплексные структуры на момент-угол-комплексах, отвечающих *рациональным* симплициальным веерам. Отметим, что, хотя множества гладких многообразий покрываемых нашим результатом и результатом Тамбо совпадают, наш подход позволяет построить на них большее количество комплексных структур.

3.1. **Гладкие структуры на момент-угол многообразиях.** В этой части мы покажем, что момент-угол-многообразия, отвечающие полным симплициальным веерам допускают гладкие структуры. Напомним, сначала, необходимые определения.

Набор векторов $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ задает выпуклый полиэдральный *конус*

$$\sigma = \{\mu_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \mu_k \boldsymbol{a}_k \colon \mu_i \in \mathbb{R},\ \mu_i \geqslant 0\}.$$

Конус называется *рациональным*, если его образующие могут быть выбраны принадлежащими целочисленной решетке $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$, и *строго выпуклым*, если он не содержит прямой. Конус называется *симплициальным* (соответственно *регулярным*), если его образующие являются частью базиса $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{Z}^n$)

Веер Σ — конечный набор $\{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ строго выпуклых конусов в $\mathbb{R}^n$ таких, что пересечение любых двух является гранью каждого. Веер Σ называется *рациональным* (соответственно *симплициальным*, *регулярным*), если составляющие его конуса рациональны (соответственно симплициальны, регулярны). Веер $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ называется *полным*, если $\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_s = \mathbb{R}^n$.

Пример 4. Важный класс полных симплициальных образуют веера, происходящие из *простых многогранников*. Более подробно, пусть многогранник P задан системой неравенств в $\mathbb{R}^n$:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, \boldsymbol{a}_i\rangle + b_i \geqslant 0, i = 1 \dots m\}, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{a}_i \in (\mathbb{R}^n)^*, b_i \in \mathbb{R}$. Пусть представление 4 многогранника P *общее*, то есть в каждой точке P пересекается не более n гиперплоскостей $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, \boldsymbol{a}_i\rangle + b_i = 0\}$. Тогда каждому вектору $\boldsymbol{a}_i$ соответствует гипергрань $F_i = P \cap H_i$ многогранника P (возможно пустая). Такое представление определяет *нормальный веер Σ_P многогранника P* в $(\mathbb{R}^n)^*$, а именно конуса Σ_P порождены такими наборами $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, что соответствующие гиперграни многогранника P пересекаются. Подробности этой конструкции можно найти в [Fu, Sec. 1.5]

Далее по умолчанию мы считаем, что Σ — полный симплициальный веер с m образующими $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$. Определим симплициальный комплекс K_Σ на множестве $[m]$, как набор подмножеств $I \subset [m]$ таких что вектора $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i\in I}$ порождают конус Σ; в таком случае мы будем говорить, что комплекс K_Σ соответствует вееру Σ. Отметим, что Σ полный тогда и только тогда, когда геометрическая реализация $|K_\Sigma|$

есть триангуляция сферы S^{n-1}. Вершины $v \in [m]$, которые не принадлежат K, мы будем называть *призрачными.*

Рассмотрим теперь линейное отображение

$$\Lambda_{\mathbb{R}} \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{e}_i \mapsto \boldsymbol{a}_i, \tag{5}$$

где вектора $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m$ образуют стандартный базис $\mathbb{R}^m$. Определим подгруппу в $\mathbb{R}^m_>$:

$$R_\Sigma := \exp(\ker \Lambda_{\mathbb{R}}) = \Big\{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m_> \colon \prod_{i=1}^m y_i^{\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{u}\rangle} = 1 \text{ для всех } \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\Big\}, \tag{6}$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ стандартное спаривание между пространством и его двойственным.

Рассмотрим действие группы $\mathbb{R}^m_>$ на $\mathbb{C}^m$ покоординатными умножениями. Напомним, что $U(K) := (\mathbb{C}, \mathbb{C}^\times)^K \subset \mathbb{C}^m$. Так как подмножество $U(K_\Sigma) \subset \mathbb{C}^m$ инвариантно относительно группы $\mathbb{R}^m_>$, то также определено действие подгруппы $R_\Sigma \colon U(K_\Sigma)$.

Определение 4. Действие группы G на топологическом пространстве X называется *собственным*, если отображение $h \colon G \times X \to X \times X$, $(g, x) \mapsto (gx, x)$ собственно, то есть прообраз всякого компактного множества компактен.

Теорема 3.3. *Пусть Σ — полный симплициальный веер в $\mathbb{R}^n$ с m образующими, а $K = K_\Sigma$ соответствующий симплициальный комплекс. Тогда*

(a) *группа R_Σ действует на $U(K)$ свободно и собственно, а пространство орбит $U(K)/R_\Sigma$ снабжается канонической структурой гладкого $(m+n)$-мерного многообразия;*
(b) *Многообразие $U(K)/R_\Sigma$ $\mathbb{T}^m$-эквивариантно гомеоморфно $\mathcal{Z}_K$.*

Тем самым, пространство $\mathcal{Z}_K$ допускает гладкую структуру.

Доказательство. Докажем сначала пункт (a). Доказательство свободности действия, приведенное ниже, повторяет рассуждения из [BP, Лемма 8.34]. Стабилизатор точки $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^m$ в $\mathbb{R}^m_>$ имеет вид $(\mathbb{R}_>, 1)^I$, где $I \subset [m]$ — множество нулевых координат $\boldsymbol{z}$. Если $\boldsymbol{z} \in U(K)$, то $I \in K$. Ограничение $\exp \Lambda_{\mathbb{R}}$ на каждую подгруппу вида $(\mathbb{R}_>, 1)^I$, $I \in K$ является вложением, поэтому группа $R_\Sigma = \ker(\exp \Lambda_{\mathbb{R}})$ пересекает стабилизатор каждой точки $\boldsymbol{z} \in U(K)$ лишь в единице, следовательно действие $R_\Sigma \colon U(K)$ свободно.

Докажем теперь собственность действия R_Σ на $U(K)$. Рассмотрим последовательности точек $\{g^i\} \in R_\Sigma, \{x^i\} \in U(K)$ такие, что $\{x^i\}$ и $\{y^i\} = \{g^i x^i\}$ сходятся в $U(K)$:

$$\{x^i\} \to \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m), \quad \{y_i\} \to \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m).$$

Нам необходимо доказать, что некоторая подпоследовательность в $\{g^i\}$ сходится в R_Σ. Всякая точка g^i в $\mathbb{R}_\Sigma$ представляется в виде

$$g^i = (\exp \gamma_1^i, \dots, \exp \gamma_m^i) \in R_\Sigma = \exp(\ker \Lambda_{\mathbb{R}}) \subset \exp \mathbb{R}^m.$$

Заменив, если необходимо, последовательность $\{g^i\}$ ее подпоследовательностью, мы можем считать, что для всякого $k = 1, \dots, m$ последовательность чисел γ_k^i имеет конечный или бесконечный предел (включая $\pm\infty$). Положим

$$I_+ = \{k | \gamma_k^i \to +\infty\} \subset [m], \quad I_- = \{k | \gamma_k^i \to -\infty\} \subset [m].$$

Так как множества $\{x^i\}$ и $\{y^i\}$ ограничены, то $x_j = 0$ при $j \in I_+$ и $y_j = 0$ при $j \in I_-$. Из определения $U(K)$ следует, что I_+ и I_- являются симплексами K. Обозначим за σ_+ и σ_- соответствующие конуса веера Σ. Так как $\sigma_+ \cap \sigma_- = \{0\}$, найдется линейная функция ξ на пространстве $\mathbb{R}^n$ такая, что $\xi(v) > 0$ при $v \in \sigma_+$, $v \neq 0$ и $\xi(v) < 0$ при $v \in \sigma_-, v \neq 0$. Напомним, что $g^i \in \exp\ker \Lambda_{\mathbb{R}}$, следовательно

$$0 = \xi\left(\sum_{k=1}^m \gamma_k^i \boldsymbol{a}_k\right) = \sum_{k=1}^m \gamma_k^i \xi(\boldsymbol{a}_k),$$

таким образом, множества I_+ и I_- пусты (иначе правая часть равенства стремится к $+\infty$). Тем самым последовательность g^i сходится к элементу в R_Σ, значит прообраз всякого компактного подмножества в $U(K) \times U(K)$ при отображении h секвинциально компактен, а значит и просто компактен, так как $R_\Sigma \times U(K)$ метризуемо.

Группа Ли $R(\Sigma)$ действует гладко, свободно и собственно на гладком многообразии $U(K)$, следовательно согласно стандартному результату [Le, Th. 7.10] пространство орбит допускает каноническую гладкую структуру.

Компактное подпространство в Хаусдорфовом локально компактном пространстве X пересекающее каждую орбиту собственного G -действия гомеоморфно пространству орбит X/G, поэтому чтобы доказать часть (b) достаточно показать, что каждая R_Σ -орбита $U(K)$ пересекает момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_K \subset U(K)$ в единственной точке.

Докажем сначала, что R_Σ-орбита всякой точки $\boldsymbol{y} \in U(K)/T^m = (\mathbb{R}_\geqslant, \mathbb{R}_>)^K$ пересекает кубическую реализацию $cc(K)$ конуса над комплексом K, $\mathcal{Z}_K/T^m = ([0;1],\{1\})^K$, в единственной точке. Предположим, что $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m_>$. Отождествим при помощи отображения exp мультипликативное действие $R_\Sigma \colon \mathbb{R}^m_>$ с линейным аддитивным действием $\ker \Lambda_\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^m$. При таком отождествлении часть подкомплекса $\mathcal{Z}_K/T^m$ в $\mathbb{R}^m_>$ перейдет в $(\mathbb{R}_\leqslant, 0)^K \subset \mathbb{R}^m$. Утверждается, что отображение

$$\Lambda_\mathbb{R} \colon (\mathbb{R}_\leqslant, 0)^K \to \mathbb{R}^n \tag{7}$$

взаимно-однозначно. В самом деле, рассмотрим симплекс $I = \{i_1, \dots, i_k\} \in K$ и соответствующий конус $\sigma \in \Sigma$. По определению $\Lambda_\mathbb{R}$ отображает $(\mathbb{R}_\leqslant, 0)^I$ во множество $-\sigma \subset \mathbb{R}^n$. Так как веер Σ полный, отображение (7) взаимно-однозначно.

$\mathbb{R}_\Sigma$-орбита точки $\boldsymbol{y}$ совпадает со множеством точек $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m_>$ таких, что $\exp \Lambda_\mathbb{R} \boldsymbol{w} = \exp \Lambda_\mathbb{R} \boldsymbol{y}$. Согласно только что доказанному утверждению, существует единственная точка $\boldsymbol{p} \in (\mathbb{R}_\leqslant, 0)^K$ такая, что $\Lambda_\mathbb{R} \boldsymbol{p} = \Lambda_\mathbb{R} \exp^{-1}(\boldsymbol{y})$, следовательно R_Σ-орбита всякой точки $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m_>$ пересекает $((0;1],\{1\})^K = \mathcal{Z}_K/T^m \cap \mathbb{R}^m_>$ в единственной точке.

Пусть теперь точка $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m_\geqslant$ не обязательно попала в $\mathbb{R}^m_>$. Обозначим за $I(\boldsymbol{y})$ множество нулевых координат точки $\boldsymbol{y}$, а за σ соответствующий конус Σ. Конуса, содержащие σ в качестве грани, образуют веер $\operatorname{st}\sigma$ в $\mathbb{R}^n/\operatorname{span}_\mathbb{R}(\sigma)$ (называемый *звездой* конуса σ), которому соответствует симплициальный комплекс $\operatorname{lk} I(\boldsymbol{y})$ (*линк* симплекса $I(\boldsymbol{y})$). Заметим, что действие R_Σ на множестве

$$\{(y_1, \dots, y_m) \in (\mathbb{R}_\geqslant, \mathbb{R}_>)^K \colon y_i = 0 \text{ for } i \in I(\boldsymbol{y})\} \cong (\mathbb{R}_\geqslant, \mathbb{R}_>)^{\operatorname{lk} I(\boldsymbol{y})}$$

совпадает с действием группы $R_{\operatorname{st}\sigma}$. Теперь мы можем применить рассуждения проведенные выше для веера $\operatorname{st}\sigma$ и действия группы $R_{\operatorname{st}\sigma}$ на $(\mathbb{R}_\geqslant, \mathbb{R}_>)^{\operatorname{lk} I(\boldsymbol{y})}$ и доказать, тем самым, что R_Σ-орбита всякой точки $\boldsymbol{y} \in (\mathbb{R}_\geqslant, \mathbb{R}_>)^K$ пересекает $cc(K)$ в единственной точке.

Для завершения доказательства пункта (b) рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z}_K \arrow[r] \arrow[d] & U(K) \arrow[d, "\pi"] \\
cc(K) \arrow[r] & (\mathbb{R}_\geqslant, \mathbb{R}_>)^K
\end{tikzcd}$$

где горизонтальные стрелки — вложения, а вертикальные — проекции на пространство орбит действия T^m. Мы утверждаем, что всякая R_Σ-орбита в $U(K)$ пересекает $\mathcal{Z}_K$ в единственной точке. В самом деле, если $\boldsymbol{z}$ и $r\boldsymbol{z}$ лежат в $\mathcal{Z}_K$ для некоторых $\boldsymbol{z} \in U(K)$ и $r \in R_\Sigma$, то точки $\pi(\boldsymbol{z})$ и $\pi(r\boldsymbol{z}) = r\pi(\boldsymbol{z})$ лежат в $cc(K)$ и согласно только что доказанному утверждению совпадают. Далее мы считаем, что $\boldsymbol{z} \in (\mathbb{C}^\times)^m$ (в противном случае снова ограничимся рассмотрением $\operatorname{lk} I(\boldsymbol{z})$). Итак, $\pi(\boldsymbol{z}) = r\pi(\boldsymbol{z})$, поэтому $\boldsymbol{t}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{1}$ для некоторого $\boldsymbol{t} \in T^m$. Так как T^m и $R_\Sigma \in \mathbb{R}^m_>$ пересекаются в $(\mathbb{C}^\times)^m$ тривиально, то $r = \boldsymbol{1}$, что и требовалось. □

Замечание. Способ построения гладких структур на момент-угол-комплексах $\mathcal{Z}_{K_\Sigma}$ зависит от геометрической реализации веера Σ, однако мы ожидаем, что если вееры Σ и Σ' задают один и тот же симплициальный комплекс K, то соответствующие гладкие структуры на $\mathcal{Z}_K$ определяют диффеоморфные многообразия. В частности известно, что это верно для момент-угол-комплексов, построенных по нормальным веерам простых многогранников.

Поскольку пространства $\mathcal{Z}_K$, отвечающие полным симплициальным веерам, являются гладкими многообразиями, мы будем называть их далее момент-угол-многообразиями.

3.2. **Комплексно-аналитические структуры на момент-угол-многообразиях.** В этой части мы покажем, что четномерные момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_K$ соответствующие полным симплициальным веерам допускают структуры комплексных многообразий. Основной идей доказательства является замена действия группы $R_\Sigma \subset (\mathbb{C}^\times)^m$ на $U(K)$ голоморфным действием комплексной группы изоморфной $\mathbb{C}^{\frac{m-n}{2}}$ на том же пространстве.

Далее, пока не сказано обратного, мы предполагаем, что $m - n$ четно. Мы всегда можем этого добиться, формально добавляя пустой луч в веер Σ, при этом момент-угол многообразие $\mathcal{Z}_K$ домножается на окружность S^1. Число $\frac{m-n}{2}$ мы будем обозначать далее за ℓ.

Конструкция 3.4. Рассмотрим $\mathbb{C}$-линейное отображение $\Psi\colon \mathbb{C}^\ell \to \mathbb{C}^m$, удовлетворяющее двум условиям:

(a) $\mathrm{Re}\circ\Psi\colon \mathbb{C}^\ell \to \mathbb{R}^m$ вложение.
(b) $\Lambda_\mathbb{R}\circ\mathrm{Re}\circ\Psi = 0$.

Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^\ell \arrow[r, "\Psi"] & \mathbb{C}^m \arrow[r, "\mathrm{Re}"] \arrow[d, "\exp"] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "\Lambda_\mathbb{R}"] \arrow[d, "\exp"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\exp"] \\ & (\mathbb{C}^\times)^m \arrow[r, "|\cdot|"] & \mathbb{R}^m_> \arrow[r, "\exp\Lambda_\mathbb{R}"] & \mathbb{R}^n_> \end{tikzcd} \tag{8}$$

где вертикальные стрелки являются покоординатными экспоненциальными отображениями, а $|\cdot|$ обозначает $(z_1,\dots,z_m)\mapsto(|z_1|,\dots,|z_m|)$. Определим теперь группу

$$C_{\Psi,\Sigma} := \exp\Psi(\mathbb{C}^\ell) \subset (\mathbb{C}^\times)^m \tag{9}$$

Группа $C_{\Psi,\Sigma}\cong\mathbb{C}^\ell$ является комплексно-аналитической, но не алгебраической подгруппой в $(\mathbb{C}^\times)^m$, которая действует на $U(K)$ голоморфными преобразованиями.

Пример 5. Рассмотрим симплициальный комплекс K на множестве из двух вершин, содержащий лишь пустой симплекс. В наших обозначениях $n=0$, $m=2$, $\ell=1$, и отображение $\Lambda_\mathbb{R}\colon\mathbb{R}^2\to 0$ нулевое. Рассмотрим $\Psi\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}^2$ заданное формулой $z\mapsto(z,\alpha z)$, где $\alpha\in\mathbb{C}$ — некоторый фиксированный параметр, тогда группа (9) есть

$$C=\big\{(e^z,e^{\alpha z})\big\}\subset(\mathbb{C}^\times)^2.$$

Условие (b) конструкции 3.4 не задает никаких ограничение, в то время как условие (a) эквивалентно тому, что $\alpha\notin\mathbb{R}$. В таком случае $\exp\Psi\colon\mathbb{C}\to(\mathbb{C}^\times)^2$ является вложением, а факторпространство $(\mathbb{C}^\times)^2/C$, наделенное стандартное комплексной структурой есть эллиптическая кривая $T^2_\mathbb{C}$ с модулем комплексной структуры $\alpha\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$:

$$(\mathbb{C}^\times)^2/C\cong\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\oplus\alpha\mathbb{Z})=T^2_\mathbb{C}(\alpha).$$

Если мы стартуем с пустого симплициального комплекса K на множестве из 2ℓ элементов (то есть $n=0$, $m=2\ell$), то можем получить произвольный компактный ℓ-мерный тор $T^{2\ell}_\mathbb{C}$ как фактор $(\mathbb{C}^\times)^{2\ell}/C_{\Psi,\Sigma}$, см. [MV, Th. 1].

Теорема 3.5. *Рассмотрим полный сиплициальный веер Σ в $\mathbb{R}^n$ с m одномерными конусами (некоторые из них могут быть пустыми), за $K=K_\Sigma$ обозначим соответствующий симплициальный комплекс. Положим $m-n=2\ell$ и обозначим за $C_{\Psi,\Sigma}$ подгруппу $(\mathbb{C}^\times)^m$, определенную в* (9)*. Тогда*

(a) *голоморфное действие группы $C_{\Psi,\Sigma}$ на пространстве $U(K)$ свободное и собственное, и пространство орбит $U(K)/C_{\Psi,\Sigma}$ снабжается структурой $(m-\ell)$-мерного комплексного многообразия;*
(b) *Имеется $\mathbb{T}^m$-эквивариантный гомеоморфизм между $U(K)/C_{\Psi,\Sigma}$ и $\mathcal{Z}_K$, задающий на $\mathcal{Z}_K$ структуру комплексного многообразия, на котором $\mathbb{T}^m$ действует голоморфными преобразованиями.*

Доказательство. Докажем сначала пункт (a). Стабилизаторы точек $U(K)$ под действием группы $(\mathbb{C}^\times)^m$ имеют вид $(\mathbb{C}^\times,1)^I$, $I\in K$. Для проверки того, что группа $C_{\Psi,\Sigma}$ действует на $U(K)$ свободно, необходимо показать, что $C_{\Psi,\Sigma}$ тривиально пересекает стабилизатор всякой точки. Так как $C_{\Psi,\Sigma}$ вкладывается в $\mathbb{R}^m_>$ при помощи отображения $|\cdot|$, см. (8), то достаточно проверить, что образ $C_{\Psi,\Sigma}$ в $\mathbb{R}^m_>$ пересекает образ $(\mathbb{C}^\times,1)^I$ лишь в единице. Первый есть R_Σ, последний есть $(\mathbb{R}_>,1)^I$ и тот факт, что они пересекаются по единице следует из доказательства 3.3 (a).

Докажем теперь собственность действия $C_{\Psi,\Sigma}$. Рассмотри проекцию $\pi\colon U(K)\to(\mathbb{R}_\geqslant,\mathbb{R}_>)^K$ на пространство орбит действия T^m и соответствующую коммутативную диаграмму.

$$\begin{tikzcd} C_{\Psi,\Sigma}\times U(K) \arrow[r, "h_\mathbb{C}"] \arrow[d, "i\times\pi"] & U(K)\times U(K) \arrow[d, "\pi\times\pi"] \\ R_\Sigma\times(\mathbb{R}_\geqslant,\mathbb{R}_>)^K \arrow[r, "h_\mathbb{R}"] & (\mathbb{R}_\geqslant,\mathbb{R}_>)^K\times(\mathbb{R}_\geqslant,\mathbb{R}_>)^K \end{tikzcd},$$

где $h_\mathbb{C}$ и $_\mathbb{R}$ обозначают отображения действия, а $i\colon C_{\Psi,\Sigma}\to R_\Sigma$ — изоморфизм, заданный ограничением гомоморфизма $|\cdot|\colon(\mathbb{C}^\times)^m\to\mathbb{R}^m_>$ на подгруппу $C_{\Psi,\Sigma}\subset(\mathbb{C}^\times)^m$. Прообраз $h_\mathbb{C}^{-1}(V)$ всякого компактного множества $V\subset U(K)\times U(K)$ является замкнутым подмножеством в $W=(i\times\pi)^{-1}\circ h_{\mathbb{R}}^{-1}\circ(\pi\times\pi)(V)$. Образ $\pi\times\pi(V)$ компактен, действие R_Σ на $(\mathbb{R}_\geqslant,\mathbb{R}_>)^K$ собственно согласно теореме 3.3 (a) и отображение $i\times\pi$ собственное, как проекция на пространство орбит компактной группы. Следовательно W – компактное подмножество в $C_{\Psi,\Sigma}\times U(K)$ и $h_{\mathbb{C}}^{-1}(V)$ компактно, как замкнутое его подмножество.

Комплексная группа $C_{\Psi,\Sigma}$ действует голоморфными преобразованиями свободно и собственно на комплексном многообразии $U(K)$, поэтому, согласно комплексному аналогу [Le, Th. 7.10] пространство орбит допускает комплексную структуру.

Доказательство части (b) повторяет рассуждения из теоремы 3.3 (b). Действительно, нам надо показать, что всякая $C_{\Psi,\Sigma}$-орбита пересекает $\mathcal{Z}_K\subset U(K)$ в единственной точке. Сначала проверим, что любая $C_{\Psi,\Sigma}$-орбита точки из $U(K)/T^m$ пересекает $\mathcal{Z}_K/T^m=cc(K)$ в единственной точке. Это утверждение следует из того, что действия R_Σ и $C_{\Psi,\Sigma}$ на $U(K)/T^m$ совпадают. С другой стороны, так как T^m и $C_{\Psi,\Sigma}$ пересекаются в $(\mathbb{C}^\times)^m$ тривиально, $C_{\Psi,\Sigma}$-орбита пересекается с $\mathcal{Z}_K$ в единственной точке. □

Замечание. В отличии от гладких структур, комплексные структуры на $\mathcal{Z}_K$ зависят и от геометрии веера Σ и от выбора Ψ в конструкции 3.4. Так, тот факт, что выбор Ψ, вообще говоря, влияет на комплексную структуры виден уже из примера 5.

Пример 6 (Многообразия Хопфа). Рассмотрим полный симплициальный веер Σ в $\mathbb{R}^n$ чьи конуса порождены всеми собственными подмножествами множества из $n+1$ вектора $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n,-\boldsymbol{e}_1-\ldots-\boldsymbol{e}_n$. Чтобы $m-n$ было четным добавим один пустой луч. В таком случае $m=n+2$, $\ell=1$. Отображение $\Lambda_{\mathbb{R}}\colon\mathbb{R}^{n+2}\to\mathbb{R}^n$ задано матрицей $(\mathbf{0}\ I\ -\mathbf{1})$, где I — единичная $n\times n$ матрица, а $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ — n-столбцы нулей и единиц.

По определению комплекс K является границей n-мерного симплекса с $n+1$ вершиной и одной *призрачной* вершиной, $\mathcal{Z}_K\cong S^1\times S^{2n+1}$, и $U(K)=\mathbb{C}^\times\times(\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\})$. Рассмотрим отображение $\Psi\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{n+2}$, $z\mapsto(z,\alpha z,\ldots,\alpha z)$ где $\alpha\in\mathbb{C}$. Как и в примере 5, условия конструкции 3.4 означают, что число α не является чисто вещественным, тогда $\exp\Psi$ вкладывает $\mathbb{C}$ в качестве подгруппы в $(\mathbb{C}^\times)^{n+2}$:

$$C=\big\{(e^z,e^{\alpha z},\ldots,e^{\alpha z})\colon z\in\mathbb{C}\big\}\subset(\mathbb{C}^\times)^{n+2}.$$

По теореме 3.5, $\mathcal{Z}_K$ снабжается комплексной структурой, как фактор $U(K)/C$:

$$\mathbb{C}^\times\times\big(\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}\big)\big/\ \{(t,\boldsymbol{w})\sim(e^zt,e^{\alpha z}\boldsymbol{w})\}\cong\big(\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}\big)\big/\ \{\boldsymbol{w}\sim e^{2\pi i\alpha}\boldsymbol{w}\},$$

где $t\in\mathbb{C}^\times$, $\boldsymbol{w}\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$. Последнее совпадает с факторпространством $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ по действию группы $\mathbb{Z}$ порожденной умножением на $e^{2\pi i\alpha}$. Эти многообразия известны как *многообразия Хопфа.*

3.3. **Главные голоморфные расслоения над торическими многообразиями и числа Ходжа.** Нормальное алгебраическое многообразие X, на котором действует алгебраический тор $(\mathbb{C}^\times)^m$ с открытой плотной орбитой, называется *торическим многообразием.* Хорошо известно, что торические многообразия классифицируются рациональными веерами [Da]. При таком соответствии, полные вееры отвечают полным многообразиям (компактным в обычной топологии), нормальные вееры простых многогранников проективным многообразиям, регулярные вееры неособым многообразиям, а симплициальные вееры многообразиям с орбифолдными особенностями.

Конструкция ныне известная как “Конструкция Кокса” [Co] позволяет отождествить торическое многообразие X_Σ, соответствующий рациональному симплициальному вееру Σ в $\mathbb{R}^n$ с (геометрическим) фактор-пространством $U(K_\Sigma)$ по действию $(m-n)$-мерной алгебраической подгруппы G_Σ в $(\mathbb{C}^\times)^m$ (общие торические многообразия будут *категорными* фактор-пространствами). Конструкцию Кокса можно рассматривать, как алгебраическую версию получения торических многообразий при помощи *симплектической редукции.*

В том случае, когда веер $\Sigma=\Sigma_P$ происходит из выпуклого простого многогранника P, конструкция [MV] позволяет отождествить момент-угол-многообразие $\mathcal{Z}_K$ с тотальным пространством *расслоения Зейферта* над проективным торическим многообразием X_P. (Расслоения Зейферта являются обобщением главных голоморфных расслоений над комплексными многообразиями на случай орбифолдов.) Если проективное многообразие X_P неособо, то имеется свободное голоморфное действие комплексного ℓ -мерного тора $T_{\mathbb{C}}^{2\ell}$на $\mathcal{Z}_K$, пространство орбит которого отождествляется с X_P.

Ниже мы обобщим конструкцию из [MV] на произвольные рациональные симплициаьные вееры. После этого, применив спектральную последовательность Бореля к расслоению $\mathcal{Z}_K\to X_\Sigma$, мы построим модель для нахождения чисел Ходжа комплексных структур на момент-угол многообразиях.

Далее веер Σ подразумевается полным, симплициальным и *рациональным.* Выберем примитивные целочисленные образующие одномерных конусов $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_m$.

Конструкция 3.6 (Конструкция Кокса)**.** Рассмотрим отображение $\Lambda_{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$, являющееся комплексификацией отображения (5), и его экспоненту (для корректности определения этого отображения необходима целочисленность векторов $\boldsymbol{a}_i$):

$$\begin{aligned}\exp\Lambda_{\mathbb{C}}\colon (\mathbb{C}^\times)^m &\to (\mathbb{C}^\times)^n,\\ (z_1,\ldots,z_m) &\mapsto \Bigl(\prod_{i=1}^m z_i^{a_{i1}},\ldots,\prod_{i=1}^m z_i^{a_{in}}\Bigr)\end{aligned}$$

Определим группу $G_\Sigma := \ker\exp\Lambda_{\mathbb{C}}$. Это $(m-n)$-мерная алгебраическая подгруппа в $(\mathbb{C}^\times)^m$, поэтому G_Σ изоморфна произведению $(\mathbb{C}^\times)^{m-n}$ и некоторой конечной группы, которая тривиальна, если веер регулярный. Группа G_Σ почти свободно действует на множестве $U(K_\Sigma)$; если веер Σ регулярный, это действие свободно. Доказательство этих утверждений аналогично доказательству свободности действия R_Σ на $U(K_\Sigma)$ в теореме 3.3 (a).

Торическое многообразие X_Σ, построенное по вееру Σ изоморфно фактор-пространству $U(K_\Sigma)/G_\Sigma$. Это комплексное алгебраическое многообразия размерности n. Многообразие X_Σ неособо, если Σ регулярный; в противном случае оно является орбифолдом (локально изоморфно фактору $\mathbb{C}^n$ по действию конечной группы). Алгебраический тор $(\mathbb{C}^\times)^m/G_\Sigma \cong (\mathbb{C}^\times)^n$ действует на X_Σ с плотной орбитой.

Если веер Σ является нормальным веером простого многогранника P, многообразие X_Σ проективно и обозначается X_P.

Далее мы считаем, что $m-n=2\ell$ четно, добавив, если необходимо, одну *призрачную* вершину к комплексу K. Заметим, что при любом выборе отображения Ψ из конструкции 3.4 подгруппа $C_{\Psi,\Sigma}$ содержится в группе G_Σ в качестве ℓ-мерной комплексной подгруппы, действительно, из условия (b) конструкции 3.4 следует, что группа $C_{\Psi,\Sigma}$ лежит в ядре отображения $\exp\Lambda_{\mathbb{C}}$, что и требовалось.

Предложение 3.7. (a) *Торическое многообразие X_Σ отождествляется как комплексное многообразие с фактор-пространством $\mathcal{Z}_{K_\Sigma}$ по голоморфному действию $G_\Sigma/C_{\Psi,\Sigma}$.*

(b) *Если веер Σ регулярный, то X_Σ является базой главного голоморфного расслоения с тотальным пространством $\mathcal{Z}_{K_\Sigma}$ и слоем $G_\Sigma/C_{\Psi,\Sigma}$.*

Доказательство. Для доказательства (a) заметим, что согласно теореме 3.5

$$X_\Sigma = U(K_\Sigma)/G_\Sigma = \bigl(U(K_\Sigma)/C_{\Psi,\Sigma}\bigr)/(G_\Sigma/C_{\Psi,\Sigma}) \cong \mathcal{Z}_{K_\Sigma}/(G_\Sigma/C_{\Psi,\Sigma}),$$

Если веер Σ регулярный, то $G_\Sigma \cong (\mathbb{C}^\times)^{m-n}$ и $G_\Sigma/C_{\Psi,\Sigma}$ является компактным комплексным ℓ-мерным тором (см. пример 5). Группа G_Σ действует на $U(K_\Sigma)$ свободно и голоморфно, следовательно то же верно и для действия $G_\Sigma/C_{\Psi,\Sigma}$ на $\mathcal{Z}_{K_\Sigma}$, тем самым, (b) доказано. $\square$

Замечание. Как и в проективной ситуации в работе [MV], для особых многообразий X_Σ фактор-проекция $\mathcal{Z}_{K_\Sigma} \to X_\Sigma$ из предложения 3.7 (a) является главным *расслоением Зейферта* при соответствующей структуре орбифолда на X_Σ.

Для всякого n-мерного комплексного многообразия M, имеется разложение $\Omega^*_{\mathbb{C}}(M) = \bigoplus \Omega^{p,q}(M)$ пространства комплекснозначных дифференциальных форм на M в прямую сумму подпространств (p,q)-*форм*, $0 \leqslant p,q \leqslant n$, и *дифференциал Долбьо* $\bar\partial\colon \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p,q+1}(M)$. Размерности $h^{p,q}(M)$ групп когомологий Дольбо $H^{p,q}_{\bar\partial}(M)$ называются *числами Ходжа* многообразия M. Они являются важными инвариантами комплексных структур на M. В самом деле, так как последовательность пучков $(\Omega^{p,*},\bar\partial)$ является ацикличной резольвентой для пучка Ω^p_{hol} голоморфных p-форм, то имеет место изоморфизм: $H^{p,q}_{\bar\partial}(M) \simeq H^q(M,\Omega^p_{hol})$, в частности числа Ходжа $h^{p,0}$ дают размерности пространства голоморфных p-форм на многообразии M. Мы исследуем когомологии Дольбо $\mathcal{Z}_{K_\Sigma}$, используя главное голоморфное расслоение из предложения 3.7 (b) и следующий результат Бореля.

Теорема 3.8 ([Bo, Th. 2.1])**.** *Пусть ξ — комплексно-аналитическое расслоение $E \to B$ со структурной группой G и слоем F, в котором E, B, F, G связны, F компактно и кэлерово. Тогда существует спектральная последовательность дифференциальных градуировано-коммутативных алгебр (E_r,d_r) со следующими свойствами:*

(a) *E_r 4-градуировано степенями слоя и базы и типом (p,q). Пусть ${}^{p,q}E_r^{s,t}$ состоит из элементов E_r типа (p,q), степени слоя s и степени базы t. Тогда ${}^{p,q}E_r^{s,t}=0$ при $p+q\neq s+t$ и если одно из чисел p,q,s,t отрицательно. Дифференциал d_r бьет из ${}^{p,q}E_r^{s,t}$ в ${}^{p,q+1}E_r^{s+r,t-r+1}$.*

(b) *Если $p+q=s+t$, то*

$$ {}^{p,q}E_2^{s,t} = \sum_{i\geqslant 0} H_{\bar\partial}^{i,s-i}(B)\otimes H_{\bar\partial}^{p-i,q-s+i}(F). $$

(c) *Спектральная последовательность сходится к $H_{\bar\partial}(E)$. Для всех $p,q\geqslant 0$ имеется изоморфизм алгебр*

$$ \operatorname{Gr} H_{\bar\partial}^{p,q}(E) = \sum_{s+t=p+q} {}^{p,q}E_\infty^{s,t} $$

для соответствующей фильтрации на $H_{\bar\partial}^{p,q}(E)$.

Когомологии Дольбо ℓ-мерного комплексного тора $T_{\mathbb C}^{2\ell}$ изоморфны внешней алгебре с 2ℓ образующими:

$$ H_{\bar\partial}^{*,*}(T_{\mathbb C}^{2\ell}) \cong \Lambda[\xi_1,\dots,\xi_\ell,\eta_1,\dots,\eta_\ell], \tag{10} $$

где $\xi_1,\dots,\xi_\ell\in H_{\bar\partial}^{1,0}(T_{\mathbb C}^{2\ell})$ образуют базис голоморфных 1-форм, а $\eta_1,\dots,\eta_\ell\in H_{\bar\partial}^{0,1}(T_{\mathbb C}^{2\ell})$ образуют базис антиголоморфных 1-форм. В частности, числа Ходжа равны $h^{p,q}(T_{\mathbb C}^{2\ell})=\binom{\ell}{p}\binom{\ell}{q}$.

Когомологии де Рама полного неособого торического многообразия X_Σ допускают разложение Ходжа, ненулевые члены которого сосредоточены в элементах типа (p,p) [Da, §12]. Этот факт вместе с вычислением когомологий торических многообразий, проведенным Даниловым и Юркевичем в [Da, §10] дает следующие описание когомологий Дольбо:

$$ H_{\bar\partial}^{*,*}(X_\Sigma) \cong \mathbb C[v_1,\dots,v_m]/(\mathcal I_{K_\Sigma}+\mathcal J_\Sigma), \tag{11} $$

где $v_i\in H_{\bar\partial}^{1,1}(X_\Sigma)$, идеал $\mathcal I_{K_\Sigma}$ порожден мономами вида $v_{i_1}\cdots v_{i_k}$ для которых вектора $\boldsymbol a_{i_1},\dots,\boldsymbol a_{i_k}$ не порождают конус Σ (*идеал Стенли-Райснера*), а идеал $\mathcal J_\Sigma$ порожден линейными комбинациями $\sum_{k=1}^m a_{kj}v_k$ где $1\leqslant j\leqslant n$. Тем самым,$h^{p,p}(X_\Sigma)=h_p$, где $(h_0,h_1,\dots,h_n)$ — h-*вектор* комплекса K_Σ [BP, Опр. 2.6], и $h^{p,q}(X_\Sigma)=0$ при $p\neq q$.

Теорема 3.9. *Пусть дан полный рациональный неособый веер Σ в $\mathbb R^n$ с m одномерными конусами (некоторые из которых могут быть пустыми) такой, что $m+n$ четно. Пусть $\mathcal Z_K=\mathcal Z_{K_\Sigma}$ — соответствующее момент-угол-многообразие с комплексной структурой, определяемой выбором подгруппы $C_{\Psi,\Sigma}$, см.* (9)*. Тогда когомологии Дольбо $H_{\bar\partial}^{p,q}(\mathcal Z_K)$ аддитивно изоморфны (p,q)-компоненте когомологий дифференциальной биградуированной алгебры*

$$ \big[\Lambda[\xi_1,\dots,\xi_\ell,\eta_1,\dots,\eta_\ell]\otimes H_{\bar\partial}^{*,*}(X_\Sigma),d\big] $$

чья градуировка определяется изоморфизмами (10) *и* (11)*, а дифференциал d степени $(0,1)$ задан на образующих*

$$ dv_i=d\eta_j=0,\quad d\xi_j=\tau(\xi_j),\quad 1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant \ell, $$

где $\tau\colon H_{\bar\partial}^{1,0}(T_{\mathbb C}^{2\ell})\to H^2(X_\Sigma,\mathbb C)=H_{\bar\partial}^{1,1}(X_\Sigma)$ классифицирующие отображение главного торического расслоения $\mathcal Z_K\to X_\Sigma$ (ср. с Леммой 1.2).

Доказательство. Согласно результату Хофера [Hof, Th. 1.6], как и последовательность Лере-Серра, последовательность Бореля главного голоморфного торического расслоения вырождается в члене E_3.

Рассмотрим расслоение $\mathcal Z_K\to X_\Sigma$. Оно удовлетворяет условиям Теоремы 3.8, следовательно имеется спектральная последовательность (E_r,d_r) с

$$ E_2=\Lambda[\xi_1,\dots,\xi_\ell,\eta_1,\dots,\eta_\ell]\otimes H_{\bar\partial}^{*,*}(X_\Sigma). $$

Так как $E_3=E_\infty$, достаточно задать дифференциал d_2 на мультипликативных образующих E_2. Элементы из $H_{\bar\partial}^{1,1}(X_\Sigma)$ отображаются в ${}^{1,2}E_2^{4,-1}=0$. Аналогично, $\eta_i\in H_{\bar\partial}^{0,1}(T_{\mathbb C}^{2\ell})$ отправляются в ${}^{0,2}E_2^{2,0}=H_{\bar\partial}^{0,2}(X_\Sigma)=0$. Итак, $d_2(v_i)=d_2(\eta_i)=0$. Осталось найти $d_2(\xi_i)$.

Так как когомологии де Рама $H^*(X_\Sigma;\mathbb C)$ допускают разложение Ходжа, то согласно другому результату Хофера[Hof, Th. 6.3] отображение $d_2\colon {}^{1,0}E_2^{0,1}\to {}^{1,1}E_2^{2,0}$ совпадает с ограничением характеристического отображения

$$ \tau\colon H^1(T_{\mathbb C}^{2\ell};\mathbb C)\to H^2(X_\Sigma;\mathbb C), \tag{12} $$

на компоненту $H_{\bar\partial}^{1,0}(T_{\mathbb C}^{2\ell})\subset H^1(T_{\mathbb C}^{2\ell};\mathbb C)$. Таким образом, $d_2(\xi_i)=\tau(\xi_i)\in H_{\bar\partial}^{1,1}(X_\Sigma)$. □

Характеристическое отображение $\tau\colon H^1(T^{2\ell},\mathbb Z)\to H^2(X_\Sigma,\mathbb Z)$ может быть явно вычислено в терминах Λ, а вложение $H_{\partial}^{1,0}(T^{2\ell})\subset H^1(T^m,\mathbb C)$ полностью определяется выбором отображения Ψ.

Предложение 3.10. *Пусть $\Sigma = \Sigma_P$ нормальный веер простого многогранника P (см. Пример 4). Тогда изоморфизм из Теоремы 3.9 предоставляет мультипликативную модель для вычисления когомологий Дольбо момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_K$, снабженного одной из комплексных структур:*

$$H_{\bar\partial}^{*,*}(\mathcal{Z}_K) \simeq H^{*,*}\bigl[\Lambda[\xi_1,\dots,\xi_\ell,\eta_1,\dots,\eta_\ell] \otimes H_{\bar\partial}^{*,*}(X_\Sigma), d\bigr].$$

Доказательство. Пусть $(B,\delta) = \mathcal{M}(X_\Sigma)$ — минимальная модель Дольбо многообразия X_Σ. Так как X_P проективно (в частности кэлерово и формально) (B,δ) совпадает с минимальной моделью де Рама (см. [FOT, Th. 4.59]). Тогда согласно результату [FOT, Cor. 4.66] дифференциальная алгебра $\bigl[\Lambda[\xi_1,\dots,\xi_\ell,\eta_1,\dots,\eta_\ell] \otimes B, d\bigr]$, где $d|_B = \delta$, $d(\xi_i) = c(\xi_i) \in B^2 \simeq H^2(X_\Sigma)$, $d(\eta_i) = 0$, предоставляет модель для алгебры когомологий Дольбо тотального пространства $\mathcal{Z}_K$ расслоения $T^{2\ell} \to \mathcal{Z}_K \to X_P$. Так как X_P формально, имеется квази-изоморфизм $\varphi_B\colon B \to H^{*,*}(X_P)$, который продолжается до квази-изоморфизма

$$\mathrm{id}\otimes\varphi_B\colon \bigl[\Lambda[\xi_1,\dots,\xi_\ell,\eta_1,\dots,\eta_\ell] \otimes B, d\bigr] \to \bigl[\Lambda[\xi_1,\dots,\xi_\ell,\eta_1,\dots,\eta_\ell] \otimes H^{*,*}(X_P), d\bigr],$$

см. [FHT, Lemma 14.2]. Таким образом, дифференциальная алгебра $\bigl[\Lambda[\xi_1,\dots,\xi_\ell,\eta_1,\dots,\eta_\ell] \otimes H^{*,*}(X_P), d\bigr]$ вычисляет когомологии Дольбо $\mathcal{Z}_K$, что и требовалось. □

Пример 7 (Многообразия Хопфа). Рассмотрим многообразие Хопфа $\mathcal{Z}_P \cong S^1 \times S^{2n+1}$ из примера 6. Соответствующий веер Σ_P является нормальным веером к n-мерному симплексу P с одним "пустым" конусом. Тогда $X_P = \mathbb{C}P^n$, и согласно (11) когомологии Дольбо торического изоморфны фактор-алгебре $\mathbb{C}[v_1,\dots,v_{n+2}]$ по двум идеалам: идеалу $\mathcal{I}$, порожденному v_1 и $v_2\cdots v_{n+2}$, и идеалу $\mathcal{J}$, порожденному $v_2 - v_{n+2},\dots,v_{n+1} - v_{n+2}$. Дифференциальная алгебра, вычисляющая когомологии Дольбо $\mathcal{Z}_P$ имеет вид $\bigl[\Lambda[\xi,\eta] \otimes \mathbb{C}[t]/t^{n+1}, d\bigr]$. Легко проверить, что $dt = d\eta = 0$ и $d\xi = t$ при должном выборе t. Нетривиальные когомологические классы представляются коциклами 1, η, ξt^n и $\xi\eta t^n$, которые позволяют найти все ненулевые числа Ходжа $\mathcal{Z}_P$: $h^{0,0} = h^{0,1} = h^{n+1,n} = h^{n+1,n+1} = 1$.

Пример 8 (Многообразия Калаби–Экманна). Рассмотрим многогранник $P = \Delta^p \times \Delta^q$ являющийся произведением двух симплексов с $p \leqslant q$, тогда $n = p + q$, $m = n + 2$ и $\ell = 1$. Соответствующее торическое многообразие есть $X_P = \mathbb{C}P^p \times \mathbb{C}P^q$ чье кольцо когомологий имеет вид $\mathbb{C}[x,y]/(x^{p+1}, y^{q+1})$. Выберем в качестве Ψ in Construction 3.4 отображение $(1,\dots,1,\alpha,\dots,\alpha)^t$, ($p+1$ единица, и $q+1$ чисел α), где $\alpha \notin \mathbb{R}$. Такой выбор снабжает $\mathcal{Z}_P \cong S^{2p+1} \times S^{2q+1}$ структурой комплексного многообразия размерности $p+q+1$. Эти многообразия известны как *многообразия Калаби–Экманна* и будут обозначаться $\mathcal{CE}(p,q)$. Имеется голоморфное главное расслоение $\mathcal{CE}(p,q) \to \mathbb{C}P^p \times \mathbb{C}P^q$, имеющим в качестве слоя комплексный тор $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \alpha\mathbb{Z})$.

Теорема 3.9 позволяет вычислить когомологии Дольбо многообразий Калаби-Экманна $\mathcal{CE}(p,q)$:

$$H_{\bar\partial}^{*,*}\bigl(\mathcal{CE}(p,q)\bigr) \cong H\bigl[\Lambda[\xi,\eta] \otimes \mathbb{C}[x,y]/(x^{p+1}, y^{q+1}), d\bigr],$$

где $dx = dy = d\eta = 0$ а $d\xi = x - y$ при надлежащем выборе x, y. Тем самым,

$$H_{\bar\partial}^{*,*}\bigl(\mathcal{CE}(p,q)\bigr) \cong \Lambda[\omega,\eta] \otimes \mathbb{C}[x]/(x^{p+1}), \tag{13}$$

где $\omega \in H_{\bar\partial}^{q+1,q}\bigl(\mathcal{CE}(p,q)\bigr)$ представляет когомологический класс коцикла $\xi\frac{x^{q+1}-y^{q+1}}{x-y}$. Похожие вычисления были проделаны в [Bo, §9].

Пример 9. Пусть на этот раз $P = \Delta^1 \times \Delta^1 \times \Delta^2 \times \Delta^2$. Тогда $\mathcal{Z}_P$ может быть снабжено структурой произведения многообразий Калаби-Экманна двумя способами, а именно: $\mathcal{CE}(1,1) \times \mathcal{CE}(2,2)$ и $\mathcal{CE}(1,2) \times \mathcal{CE}(1,2)$. Используя изоморфизм (13), мы получаем, что эти многообразия имеют разные числа Ходжа $h^{2,1}$: 1 в первом случае и 0 во втором. Тем самым, выбор матрицы Ψ может повлиять не только не комплексную структуру многообразия $\mathcal{Z}_K$, но так же затронуть его числа Ходжа.

Список литературы

[BBCG] A. Bahri, M. Bendersky, F. R. Cohen and S. Gitler. *On an infinite family of toric manifolds associated to a given one.* In preparation, 2009.

[BE] David A. Buchsbaum and David Eisenbud, *Algebra structures for finite free resolutions, and some structure theorems for ideals of codimension 3*, Amer. J. Math. 99, no. 3, 447–485, 1977

[BP] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, Москва, 2004.

[Bo] Armand Borel. *A spectral sequence for complex-analytic bundles*, Appendix Two in: Friedrich Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*, 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1966.

[BM] Frédéric Bosio and Laurent Meersseman. *Real quadrics in* $\mathbb{C}^n$*, complex manifolds and convex polytopes.* Acta Math, 197, no. 1, 53–127, 2006.

[CE] E. Calabi and B. Eckmann, *A class of compact complex manifolds which are not algebraic*, Annals of Mathematics, 58, 494–500, 1953

[C-L] X. Cao and Z. Lu. *Möbius transform, moment-angle complexes and Halperin-Carlsson conjecture.* Preprint, 2009, arXiv:0908.3174.

[Ca] G. Carlsson, *Free* $(\mathbb{Z}/2)^k$*-actions and a problem in commutative algebra*, Transformation groups, Poznan 1985, 79–83, Lecture Notes in Math., 1217, Springer, Berlin, 1986.

[Co] David A. Cox. *The homogeneous coordinate ring of a toric variety.* J. Algebraic Geom. 4 no. 1, 17–50; arXiv:alg-geom/9210008, 1995

[Da] Vladimir I. Danilov *The geometry of toric varieties.* Uspekhi Mat. Nauk 33, no. 2, 85–134 (Russian); Russian Math. Surveys 33, no. 2, 97–154 (English translation), 1978

[DJ] M. W. Davis and T. Januszkiewicz. *Convex polytopes, Coxter orbifolds and torus actions.* Duke Math. J. 62(2):417–451, 1991.

[Er] N. Erokhovets, *Buchstaber invariant of simple polytopes*, http://arxiv.org/abs/0908.3407

[FOT] Yves Félix, John Oprea, Daniel Tanré. *Algebraic Models in Geometry*, Oxford University Press, 2008.

[FHT] Y. Félix, S. Halperin, J. -C. Thomas. *Rational Homotopy Theory*, Springer-Verlag, 2001.

[Fu] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Princeton Univ. Press, 1993.

[G-L] S. Gitler and S. Lopez de Medrano. *Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums.* Preprint (2009); arXiv:0901.2580.

[Ha] S. Halperin, *Rational homotopy and torus actions*, Aspects of topology, 293-306, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 93, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.

[Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977

[Har79] Robin Hartshorne, *Algebraic vector bundles on projective spaces: a problem list*, Topology 18, no. 2, 117–128, 1979

[Hof] T. Höfer. *Remarks on torus principal bundles.* J.Math. Kyoto Univ. 33 , no. 1, 227–259, 1993

[Hop] Hopf, Heinz, *Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten*, Studies and Essays, Interscience Publishers, Inc., New York, pp. 167–185, 1948

[Le] John M. Lee. *Introduction to smooth Manifolds.* Springer-Verlag, New York, 2000.

[LV] Santiago López de Medrano and Alberto Verjovsky. *A new family of complex, compact, non-symplectic manifolds.* Bol. Soc. Mat. Brasil. 28, 253–269, 1997.

[Me] Laurent Meersseman. *A new geometric construction of compact complex manifolds in any dimension.* Math. Ann. 317, 79–115, 2000.

[MV] Laurent Meersseman and Alberto Verjovsky. *Holomorphic principal bundles over projective toric varieties.* J. Reine Angew. Math. 572, 57–96, 2004.

[Pu] V. Puppe, *Multiplicative aspects of the Halperin-Carlsson conjecture*, arXiv:0811.3517

[Ta] Jérôme Tambour. *LVMB manifolds and simplicial spheres.* Preprint (2010); arXiv:1006.1797.

[Us1] Ю. М. Устиновский, *Операция удвоения многогранников и действия тора*, Успехи Математических Наук, 64:5(389), 181-182, 2009

[Us2] Ю. М. Устиновский *Гипотеза о торическом ранге для момент-угол комплексов*, Математические заметки, arXiv:0909.1053