Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

Когомологии торических поверхностей

Ведерникова Вероника
403 группа

Научный руководитель:
Панов Т. Е.

2019

Содержание

1. Явное вычисление

Поскольку нормальный веер многоугольника не зависит от гомотетий будем считать, что наш многоугольник имеет вершины $\{(-1,1);\ (1,-1);\ (1,1);\ (1,0);\ (0,-1)\}$ (см. рис. 1)

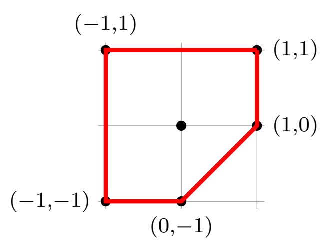

Рис. 1. Многогранник P представляющий собой срезку вершины стандартного квадрата.

Обозначим стандартный базис решётки e_1, e_2. Тогда лучи нормального веера P будут иметь вид $\{e_1,\ (e_1-e_2),\ -e_2,\ -e_1,\ e_2\}$. Максимальные конуса будут соответствовать вершинам многогранника (см. рис. 2)

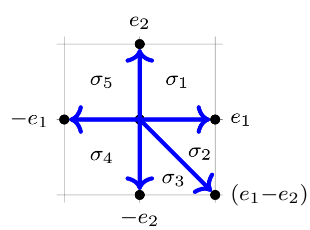

Рис. 2. Нормальный веер Σ многоугольника P.

Опишем теперь двойственные конуса веера Σ и их полугрупповые алгебры:

$$\sigma_1^\vee = \mathbb{Z}_\geqslant\langle e_1^*, e_2^*\rangle;\ \mathbb{C}[S_{\sigma_1}] = \mathbb{C}[x, y]$$
$$\sigma_2^\vee = \mathbb{Z}_\geqslant\langle e_1^* + e_2^*, -e_2^*\rangle;\ \mathbb{C}[S_{\sigma_2}] = \mathbb{C}[xy, \frac{1}{y}]$$
$$\sigma_3^\vee = \mathbb{Z}_\geqslant\langle -e_1^* - e_2^*, e_1^*\rangle;\ \mathbb{C}[S_{\sigma_3}] = \mathbb{C}[x, \frac{1}{xy}]$$
$$\sigma_4^\vee = \mathbb{Z}_\geqslant\langle -e_1^*, -e_2^*\rangle;\ \mathbb{C}[S_{\sigma_4}] = \mathbb{C}[\frac{1}{x}, \frac{1}{y}]$$
$$\sigma_5^\vee = \mathbb{Z}_\geqslant\langle -e_1^*, e_2^*\rangle;\ \mathbb{C}[S_{\sigma_5}] = \mathbb{C}[\frac{1}{x}, y].$$

Теперь уже можно на "интуитивном уровне"усмотреть ответ, в самом деле, нас интересует многообразие которое представляет собой $(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1) \cup_{U_\sigma} \mathbb{C}P^2$. Можно далее развить эту геометрическую идею (примерно так мы и сделаем в части 2).

Здесь однако мы докажем, что искомое торическое многообразие V_P получается раздутием $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ в неподвижной точке действия $(\mathbb{C}^\times)^2$. Топологически операция раздутия соответсвует вклейке в точке (в более общем случае алгебраическом подмногообразии) проективизации её нормального расслоения. В данном случае нормальное расслоение это в точности $\mathbb{C}^2$ и его проективизация это $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ и таким образом раздутие соответсвует вклейке вместо точки двумерной сферы.

Будем обозначать V_1 торическое многообразие усекаемого квадрата, а через U_0 карту в которой происходит раздутие (она соответсвует усекаемой вершине). Рассмотрим явное задание образа этой операции в пространстве $U_0 \times \mathbb{C}P^1$ причём $\widetilde{U_0}\{(Q, l) \,|\, Q \in U_0 \text{ и } P, Q \in l\}$. Причём если координатное кольцо U_0 равно $\mathbb{C}[x, \frac{1}{y}]$, то в результате раздутия мы получим, что уравнения на $\widetilde{U_0}$ примут вид $\{((x, \frac{1}{y}), [z_0 : z_1]) \,|\, xz_0 + \frac{z_1}{y} = 0\}$. Это уравнение переписывается как $z_1 = z_0 xy$, для двух карт $\mathbb{C}P^1$ это даёт нам в точности карты U_{σ_2, σ_3} нашего торического многообразия. Таким образом мы явно проверили, что $V_P \cong \mathrm{Bl}_p(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1)$, где p это точка соответсвующая правой нижней вершине нашего квадрата. Теперь легко понять, что $V_P \cong (\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1)\#\overline{\mathbb{C}P^2}$. В самом деле топологически раздутие это приклейка к границе окрестности точки p двумерной сферы по отображению Хопфа (см. [**bupa15**]). То, что получится будет как раз $\mathbb{C}P^2$ с обращённой ориентацией.

2. Концептуальное доказательство

По известному свойству $V_{P_1 \times P_2} \cong V_{P_1} \times V_{P_2}$. Таким образом $V_{\text{квадрат}} \cong \mathbb{C}P^1$ когда мы срезаем вершину, то мы вклеиваем некоторое двумерное алгебраическое многообразие. Определим чему гомеоморфна граница той окрестности по которой мы вклеиваем. Она получается объединением двух многообразий отвечающих лучам нормального веера:

$$U_{e_1} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, y^{-1}]) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times$$
$$U_{-e_2} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y, x^{-1}]) \cong \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}$$
$$\partial(U_0) \cong U_{e_1} \cup_{(\mathbb{C}^\times)^2} U_{-e_2} \simeq S^3$$

То что, мы вклеиваем как раз отвечает стандартному покрытию $\mathbb{C}P^2$ без одной карты. Таким образом мы получаем классическое определение связной суммы и заключаем, что поскольку многообразие имеет комплескную структуру, то $\mathbb{C}P^2$ имеет обращённую ориентацию.

3. Вычисление когомологий многообразия V_P

В данном разделе мы вычислим когомологии V_P используя два подхода: точную последовательность Майера–Виеториса (в подразделе 3.1) и общий метод происходящий из теоремы Данилова–Юркевича (в подразделе 3.2). Отметим однако, что первый способ прост лишь для вычисления аддитивной структуры когомологий, в то время как мультипликативная структура гораздо яснее находится вторым методом.

3.1. **Элементарный подход.** Воспользуемся когомологической точной последовательностью Майера–Виеториса для связной суммы $V_P \cong \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$:

$$\begin{aligned} \ldots \leftarrow H^n(S^3) \leftarrow H^n(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \# \overline{\mathbb{C}P^2}) \leftarrow H^n(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \vee \mathbb{C}P^2) \leftarrow \\ \leftarrow H^{n-1}(S^3) \leftarrow H^{n-1}(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \# \overline{\mathbb{C}P^2}) \leftarrow H^{n-1}(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \vee \mathbb{C}P^2) \leftarrow \ldots \end{aligned} \tag{3.1}$$

Поскольку когомологии сферы S^3 отличны от нуля лишь в размерностях 0 и 3, то интересным для нас будет лишь случай $n = 3, 4$. Запишем соответсвующий кусок точной последовательности

$$\begin{aligned} \ldots \leftarrow H^4(S^3) \leftarrow H^4(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \# \overline{\mathbb{C}P^2}) \leftarrow H^4(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \vee \mathbb{C}P^2) \leftarrow H^3(S^3) \leftarrow \\ \leftarrow H^3(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \# \overline{\mathbb{C}P^2}) \leftarrow H^3(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \vee \mathbb{C}P^2) \leftarrow H^2(S^3) \leftarrow \ldots \end{aligned}$$

Вычисляя известные члены переписываем эту последовательность в виде:

$$\ldots \leftarrow 0 \leftarrow H^4(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \# \overline{\mathbb{C}P^2}) \xleftarrow{\alpha} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xleftarrow{\beta} \mathbb{Z} \xleftarrow{\gamma} H^3(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \# \overline{\mathbb{C}P^2}) \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \ldots$$

Поскольку связная сумма двух ориентируемых многообразий ориентируема (см. [**kosinski2007differential**]) (а значит $H^4(V_P) \cong \mathbb{Z}$), мы получаем, что отображение β является мономорфизмом, потому что из Z в $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ либо инъекция либо нулевое отображение, а оно ненулевое потому как α сюръективно и у него есть ядро. Поэтому отображение $\gamma = 0$ и таким образом $H^3(V_P) = 0$. Когомологии в оставшихся размерностях даются явно точной последовательностью (3.1).А именно, одномерные когомологии равны 0, ибо в клеточном разбиении $\mathrm{CP}^1 \times \mathbb{C}P^1$ и CP^2 все клетки размерности не меньше двух(кроме одной нульмерной).Вторые когомологии равны $\mathrm{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ в силу точности последовательности и изоморфизмом между $\mathrm{CP}^1\times\mathbb{C}P^1\#\overline{\mathbb{C}P^2}$ и $\mathrm{CP}^1\times\mathbb{C}P^1\vee\mathbb{C}P^2$. Выпишем получившиеся группы:

$$H^n(V_P)=\begin{cases}0, & \text{если } n>4;\\ \mathbb{Z}, & \text{если } n=0,4;\\ 0, & \text{если } n=1,3;\\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, & \text{если } n=2.\end{cases} \tag{3.2}$$

Мультипликативная структура в когомологиях также может быть найдена из последовательности (3.1), однако мы используем более явное вычисление следующего параграфа, чтобы описать её.

3.2. **Вычисление через теорему Данилова–Юркевича.**

Теорема 3.1 ([**bupa15**]). *Пусть V_P торическое многообразие соответсвующее полному Дельзантову многоугольнику P в двумерной решётке M. Кольцо когомологий V_P тогда задаётся представлением:*

$$H^*(V_P)\cong\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]/\mathscr{I},$$

где $v_1,\dots,v_m$ соответсвуют рёбрам многоугольника P, а $\mathscr{I}$ порождён двумя типами соотношений:

(a) $v_{i_1}v_{i_2}$, для несмежных рёбер многоугольника P;
(b) $\sum_{i=1}^m\langle\boldsymbol{a}_i,u^*\rangle v_i$, для всех $u^*\in M$, где $\boldsymbol{a}_i$ это одномерные образующие нормального веера многоугольника P.

Используя эту теорему и вычисления сделанные в части 1, находим структуру идеала $\mathscr{I}$. Квадратичные соотношения принимают вид

$$v_1v_3;\ v_1v_4,\ v_2v_4;\ v_2v_5;\ v_3v_5.$$

Найдём линейные соотношения: пусть вектор $u^*\in M$ записан в базисе этой решётки как $u^*=ae_1^*+be_2^*$. Тогда пункт (b) даст нам следующее соотношение общего вида:

$$av_1+(a-b)v_2-bv_3-av_4+bv_5,\quad a,b\in\mathbb{Z}.$$

Замечание. В явном виде приведённая выше формула получается следующим вычислением:

$$\begin{gathered}\langle e_1,ae_1^*+be_2^*\rangle+\langle e_1-e_2,ae_1^*+be_2^*\rangle+\langle -e_2,ae_1^*+be_2^*\rangle+\\ +\langle -e_1,ae_1^*+be_2^*\rangle+\langle e_2,ae_1^*+be_2^*\rangle=\\ =av_1+(a-b)v_2-bv_3-av_4+bv_5.\end{gathered}$$

Подставляя в него различные значения a и b получаем следующие два соотношения: $v_1+v_2-v_4$ и $v_2+v_3-v_5$. Из этих соотношений следует, что квадратичные соотношения можно, исключая переменные v_4,v_5

переписать как

$$\begin{aligned} v_1v_4 &= v_1^2 + v_1v_2;\\ v_2v_4 &= v_2^2 + v_1v_2;\\ v_2v_5 &= v_2^2 + v_2v_3;\\ v_3v_5 &= v_3^2 + v_2v_3. \end{aligned}$$

И далее получаем, что можно рассмотреть новый набор образующих идеала $\mathscr{I}$:

$$v_1^2 + v_1v_2;\ v_2^2 + v_1v_2;$$
$$v_2v_4 - v_2v_5 = v_1v_2 - v_2v_3;\ v_3v_5 + v_2v_4 - v_2v_5 = v_3^2 + v_1v_2.$$

Таким образом кольцо когомологий V_P имеет вид:

$$H^*(V_P) \cong \mathbb{Z}[v_1, v_2, v_3]/(v_1^2 + v_1v_2, v_2^2 + v_1v_2, v_1v_2 - v_2v_3, v_3^2 + v_1v_2).$$

Из этой формулы следует, что все мономы в градуировке больше 4-х и нечётных градуировках равны 0 и кроме того понятно, что $H^2(V_P) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, наконец в размерности 4 получаем, что когомологии одномерны поскольку все классы пропорциональны по модулю $\mathscr{I}$ классу v_1v_2.
Таким образом доказано следующее:

Предложение 3.2. *Торическое многообразие соответсвующее многоугольнику изображённому на рис. 1 диффеоморфно* $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1\#\overline{\mathbb{C}P^2}$. *Кольцо когомологий этого многообразия имеет вид:*

$$H^*(V_P) \cong \mathbb{Z}[v_1, v_2, v_3]/(v_1^2 + v_1v_2, v_2^2 + v_1v_2, v_3^2 + v_1v_2, v_1v_2 - v_2v_3).$$

3.3. **Сравнение со стандартным заданием когомологий связной суммы.** Как мы установили V_P суть раздутие $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ в T-неподвижной точке отвечающей конусу $\sigma_0 = \mathbb{Z}_{\geqslant}\langle e_1, -e_2\rangle$. Подгруппа когомологических двумерных классов происходящих из $\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1$ состоит из классов двойственных тем T-инвариантным дивизорам на многообразии V_P, которые происходят из $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$. Подгруппа таких классов порождена классами двойственными дивизорам отвечающим лучам $-e_1, e_2$ т.е. переменными v_4, v_5. В то же время кольцо когомологий $\overline{\mathbb{C}P}^2$ порождено классом когомологий двойственным исключительному дивизору раздутия (т.е. соответсвующему лучу $e_1 - e_2$), этот класс отвечает $-v_2$. Таким образом мы можем записать:

$$\boxed{u_1 = v_4;\ u_2 = v_5;\ w = -v_2.}$$

Проверим соотношения ожидаемые от когомологий связной суммы:

$$\begin{cases} u_1^2 = v_4^2 = (v_1+v_2)^2 = (v_1^2+v_1v_2)+(v_2^2+v_1v_2) = 0 \\ u_2^2 = v_5^2 = (v_2+v_3)^2 = (v_2^2+v_3v_2)+(v_3^2+v_2v_3) = 0 \\ u_1u_2 = (v_1+v_2)(v_2+v_3) = (v_2^2+v_1v_2)+v_1v_3+v_2v_3 = \\ = v_2v_3 = (v_2v_3+v_2^2)-v_2^2 = -v_2^2 = -w^2 \\ u_1w = -(v_1+v_2)v_2 = -(v_2^2+v_1v_2) = 0 \\ u_2w = -(v_2+v_3)v_2 = -(v_2^2+v_2v_3) = 0 \end{cases}$$

Таким образом мы получили изоморфизм колец:

$$H^*(V_P) = \mathbb{Z}[u_1,u_2,w]/(u_1^2 = u_2^2 = 0; u_1u_2 = -w^2; u_1w = u_2w = 0).$$

Остаётся выразить образующие исходного кольца через u_1, u_2 и w. Используя линейные соотношения из теоремы (т.е. $v_1+v_2-v_4 = 0$ и $v_2+v_3-v_5 = 0$) получаем, что

$$\boxed{v_1 = u_1+w;\ v_2 = -w;\ v_3 = u_2+w;\ v_4 = u_1;\ v_5 = u_2.}$$

Список литературы:

Victor Buchstaber и Taras Panov. Toric Topology. В: (2012). eprint:arXiv:1210.2368.

A.A. Kosinski.Differential Manifolds. Dover Book on Mathematics.Dover Publications, 2007.isbn: 9780486462448.url:https://books.google.ru/books?id=L1B2dJ2j6h0C.