Курсовая работа. 3 курс.

Автор: Я.А.Верёвкин.
Научный руководитель: Т.Е.Панов.

Механико-математический факультет МГУ

Москва, 2012 год

КУРСОВАЯ РАБОТА. 3 КУРС.

АВТОР: Я.А.ВЕРЁВКИН.

1. Простейшие определения и свойства

Определение 1.1. $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m] = \{1, 2, 3, \dots, m\}$, если $\mathcal{K}$ — совокупность подмножеств $I \subset [m]$, замкнутая относительно включения, то есть если $I \in \mathcal{K}$, то $\forall L \subset I => L \in \mathcal{K}$.
I называют симплексом.

Определение 1.2. Δ^i — геометрический i-мерный симплекс, то есть выпуклая оболочка $i+1$ точек, не лежащих в одной гиперплоскости i-мерного евклидова пространства. Эти точки называют вершинами симплекса.

Определение 1.3. $\mathcal{K}$ — геометрический симплициальный комплекс, если $\mathcal{K}$ - набор геометрических симплексов $\Delta^i \subset \mathbb{R}^N$ со свойствами:
1) Грань любого симплекса из $\mathcal{K}$ лежит в $\mathcal{K}$.
2) Пересечение любых двух симплексов из $\mathcal{K}$ является гранью каждого из них.

Теорема 1.4. *Каждому симплициальному комплексу $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$ соответствует геометрический симплициальный симплекс в $(m-1)$-мерном Евклидовом пространстве.*

Замечание. Геометрический симплициальный комплекс, соответствующий симплициальному комплексу $\mathcal{K}$ будем обозначать $|\mathcal{K}|$.

Доказательство. $|\mathcal{K}|$ - геометрический симплициальный комплекс.
$\forall I \in \mathcal{K}$ сопоставим $I \to \Delta^I = conv\langle e_i \in \mathbb{R}^{m-1} : i \in I\rangle$, где $e_i = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}$ (1 стоит на i-м месте).
Положим $|\mathcal{K}| = \bigcup\limits_{I \in \mathcal{K}} \Delta^I$. Это и будет нужное нам соответствие. □

Определение 1.5. n-мерным кубом в $\mathbb{R}^n$ назовем I^n, где $I = [0; 1]$.

Определение 1.6. k-мерным остовом n-мерного куба назовем $Sk_k I^n = \bigcup\limits_{L^k \in I^n \,:\, dim(L^k)=k} L^k$.

2. Задачи и их решение

Задача 1. *Найти гомотопический тип $Sk_k I^n$.*

Замечание. Мы докажем, что $Sk_k I^n$ гомотопически эквивалентно букету некоторого количества S^k.

Будем решать эту задачу последовательно. Для начала найдем гомотопический тип $Sk_1 I^3$. Понятно, что I^3 это обычный куб в 3-х мерном пространстве. А его 1-мерный остов — «каркас» из ребер. Будем производить стягивания, как на картинке:

Стягивая на последней картинке одну из вертикальных линий, получим букет из пяти окружностей. То есть гомотопический тип $Sk_1 I^3$ есть $S^{1^{\vee(5)}}$ (пишется $Sk_1 I^3 \simeq S^{1^{\vee(5)}}$).
Теперь найдем $Sk_1 I^n$, проводя индукцию по n.

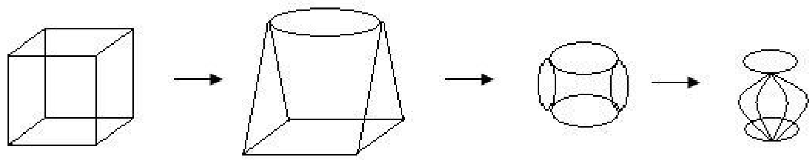

Рис. 1. Последовательная гомотопия каркаса куба.

Обозначим через a_n количество S^1 в букете, гомотопически эквивалентному $Sk_1 I^n$.

Определение 2.1. f-вектором многогранника Q в $\mathbb{R}^n$ называется вектор $F(Q) = (f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n)$ ($F(Q) \in \mathbb{Z}^{n+1}$), где $f_i = f_i(Q)$ есть количество i-мерных граней в Q.

Замечание. $f_n(Q) = 1\ \forall$ n-мерного многогранника Q, так что часто эту компоненту вектора просто не пишут.

Очевидно, что $f_0(I^n) = 2^n$, так как при домножении на I количество вершин удваивается, а I имеет две вершины. Теперь рассмотрим переход от I^{n-1} к I^n. При переходе происходит домножение I^{n-1} на I. Представим это как два $Sk_1 I^{n-1}$, у которых соответствующие вершины соединены ребром. То есть после стягивания каждого $Sk_1 I^{n-1}$ в отдельности мы получим два букета сфер, гомотопически эквивалентных $Sk_1 I^{n-1}$ и соединенных $f_0(I^{n-1})$ ребрами:

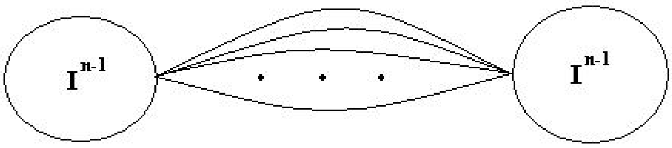

Рис. 2. Построение $I^{n-1} \to I^n$. Случай граней размерности 1.

Далее стягиваем одно из ребер и получаем букет, гомотопически эквивалентный $Sk_1 I^n$. Из рассуждений выше выписываем формулу:

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + f_0(I^{n-1}) - 1$$

Подставим известное нам значение $f_0(I^{n-1})$:

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2^{n-1} - 1$$

Мы знаем a_3 $(= 5)$, поэтому, проведя вычисления (последовательно подставляем $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_4$), получим:

$$a_n = 2^{n-1} \cdot (n-2) + 1$$

То есть $Sk_1 I^n \simeq= S^{1^{\vee(2^{n-1}\cdot(n-2)+1)}}$

Теперь вычислим $Sk_k I^n$. Из книги [БПТДТК] $f_k(I^n) = C_n^k \cdot 2^{n-k}$.

Для того, чтобы понять, как устроен шаг индукции, надо посчитать для $Sk_2 I^4$, рассмотрев диаграмму Шлегеля I^4 в $\mathbb{R}^3$. Обозначим через a_n^k количество S^k в букете, гомотопически эквивалентному $Sk_k I^n$. Посчитаем для $n = 4, k = 2$. Рассмотрим схему:

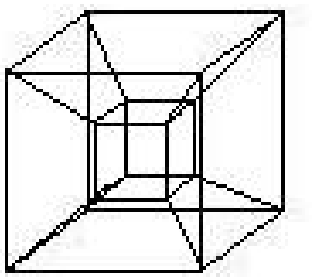

Рис. 3. Схема I^4 в $\mathbb{R}^3$.

Получилось два I^3, соединенных по граням так, что получается I^4. На каждой l-мерной грани внутреннего куба находится $(l+1)$-мерная грань. Стянем кажду такую грань для $l = 1$. После этого останется внутренний куб, а каждая 2-мерная грань внешнего куба, после стягивания 2-мерной грани, на которую она опирается, станет сферой S^2. Граница внутреннего куба - тоже одна S^2. Все остальное стянулось в точку. Получается $Sk_2 I^4 \simeq S^{2^{\vee 7}}$. Теперь вычислим в общем случае ($Sk_k I^n$). Рассмотрим такую же схему. Теперь стягиваем соединяющие грани для $l = k - 1$. Аналогично, получаем формулу:

$$Sk_k I^n \simeq S^{k^{\vee a_{n-1}^k + f_k(I^{n-1})}}$$

Или:

$$a_n^k = a_{n-1}^k + f_k(I^{n-1})$$

Здесь весь внешний куб по частям уходит на S^k (отсюда получаем слагаемое $f_k(I^{n-1})$, а внутренний ретрагируем независимо от внешнего. Отсюда слагаемое a_{n-1}^k.

Мы знаем $a_{k+1}^k = 1$, поэтому, проведя вычисления (последовательно подставляем $a_{n-1}^k, a_{n-2}^k, \ldots, a_{k+1}^k$), получим:

$$a_n^k = \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-i}{k} \cdot 2^{n-i-k}$$

Или, окончательно:

$$Sk_k I^n \simeq S^{k^{\vee \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-i}{k} \cdot 2^{n-i-k}}}$$

Проблема 2.2. Найти биградуированные числа Бетти для различных 3-мерных многогранников.

Посчитаем биградуированные числа Бетти для различных 3-мерных многогранников с помощью компьютерной программы Macaulay 2 [Macaulay2].
В табличках ниже, которые состоят из n строк и m столбцов, число, стоящее на пересечении k-ой строки и l-го столбца равно $\beta^{-l,2(l+k)}$. Остальные биградуированные числа Бетти равны нулю, за исключением $\beta^{0,0} = \beta^{-(n+1),2(n+m+2)} = 1$ [[БПТДК], стр. 272.]

Для проверки посчитаем у 3-мерного ассоциэдра. Этот результат есть в работе [ДРВЛ], см. Табл. 1.

Таблица 1. Биградуированные числа Бетти 3-мерного ассоциэдра.

15	35	24	3	0
0	3	24	35	15

Результат вычисления биградуированных чисел Бетти для 3-мерного ассоциэдра совпал с результатом из работы [ДРВЛ].

Теперь посчитаем у многогранника, который получается из тетраэдра срезкой всех вершин, см. Табл. 2.

Таблица 2. Биградуированные числа Бетти.

10	20	15	4
4	15	20	10

Результат вычисления биградуированных чисел Бетти опять же, совпал с результатом из работы [ДРВЛ].

Посчитаем биградуированные числа Бетти для 3-мерного циклоэдра,см. Табл. 3.

Таблица 3. Биградуированные числа Бетти 3-мерного циклоэдра.

36	160	319	332	180	44	4	0
0	4	44	180	332	319	160	36

Посчитаем биградуированные числа Бетти для 3-мерного стеллаэдра, см. Табл. 4.

Таблица 4. Биградуированные числа Бетти 3-мерного стеллаэдра.

21	64	73	30	3	0
0	3	30	73	64	21

Посчитаем у многогранника, который получается из тетраэдра срезкой всех вершин и всех ребер (3-мерный пермутаэдр), см. Табл. 5.

Таблица 5. Биградуированные числа Бетти обобщенного 3-мерного пермутаэдра.

55	320	897	1462	1437	836	282	54	6	0
0	6	54	282	836	1437	1462	897	320	55

Список литературы

[БПТДТК] В.М.Бухштабер, Т.Е.Панов. *Торические действия в топологии и комбинаторике.* Москва, издательство МЦНМО (2004).

[ДРВЛ] И. Лимонченко *Биградуированные числа бетти некоторых простых многогранников. стр. 16.* Москва, издательство МЦНМО (2004).

[Macaulay2] A software system devoted to supporting research in algebraic geometry and commutative algebra. Avaliable at http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/

Механико-математический факультет МГУ
E-mail address: verevkin_j.a@mail.ru