Курсовая работа. 4 курс.

Автор: Я.А.Верёвкин.
Научный руководитель: Т.Е.Панов.

Механико-математический факультет МГУ

Москва, 2013 год

КУРСОВАЯ РАБОТА. 4 КУРС.

АВТОР: Я.А.ВЕРЁВКИН.

1. Простейшие определения и свойства

Определение 1.1. $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m] = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$, если $\mathcal{K}$ — совокупность подмножеств $I \subset [m]$, замкнутая относительно включения, то есть если $I \in \mathcal{K}$, то $\forall L \subset I => L \in \mathcal{K}$.
I называют симплексом.

Определение 1.2. Δ^i — геометрический i-мерный симплекс, то есть выпуклая оболочка $i+1$ точек, не лежащих в одной гиперплоскости i-мерного евклидова пространства. Эти точки называют вершинами симплекса.

Определение 1.3. $\mathcal{K}$ — геометрический симплициальный комплекс, если $\mathcal{K}$ - набор геометрических симплексов $\Delta^i \subset \mathbb{R}^N$ со свойствами:
1) Грань любого симплекса из $\mathcal{K}$ лежит в $\mathcal{K}$.
2) Пересечение любых двух симплексов из $\mathcal{K}$ является гранью каждого из них.

Определение 1.4. Единичным комплексным полидиском называется следующее множество:

$$(\mathbb{D}^2)^m = \big\{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m \colon |z_i|^2 \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, m\big\}.$$

Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m] = \{1, \ldots, m\}$.

Определение 1.5. Определим следующее множество:

$$B_\sigma = \big\{(z_1, \ldots, z_m) \in (\mathbb{D}^2)^m \colon |z_i|^2 = 1, \text{ если } i \notin \sigma\big\}$$

Определение 1.6. Момент-угол комплексом называется следующее множество:

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} B_\sigma \subset (\mathbb{D}^2)^m,$$

где объединение берётся в единичном комплексном полидиске $(\mathbb{D}^2)^m$.

Определение 1.7. Петлёй в пространстве X называется непрерывное отображение $\psi : I \to X$ такое, что $\psi(0) = \psi(1)$.

Определение 1.8. Пространством Дэвиса-Янушкиевича называется следующее множество:

$$\mathcal{DJ}(\mathcal{K}) = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} BT_\sigma \subset BT^n,$$

где $BT^n = (CP^\infty)^n$, $BT_\sigma = \big\{(x_1, \ldots, x_n) \in BT^n \colon x_i = *, \text{, если } i \notin \sigma\big\}$.

2. Гомологии пространства петель момент-угол комплекса пятиугольника

Как известно, для любого симплициального комплекса $\mathcal{K}$, являющегося границей m-угольника, выполняется:

$\mathcal{H}_*(\Omega\mathcal{DJ}(\mathcal{K});k) \cong T < u_1, \ldots, u_m > /(u_i^2 = 0, u_iu_j + u_ju_i = 0,$, если $\{i,j\} \in \mathcal{K})$.

Пусть $\mathcal{K}$ - граница пятиугольника. Выпишем образующие алгебры Понтрягина $\mathcal{H}_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, где $\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ - пространство петель момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$.

$$a_1 = [u_3, u_1], a_2 = [u_4, u_1], a_3 = [u_4, u_2], a_4 = [u_5, u_2], a_5 = [u_5, u_3],$$

$b_1 = [u_4, [u_5, u_2]], b_2 = [u_3, [u_5, u_2]], b_3 = [u_1, [u_5, u_3]], b_4 = [u_3, [u_4, u_1]], b_5 = [u_2, [u_4, u_1]],$
где $deg\ u_i = 1, deg\ a_i = 2, deg\ b_i = 3$.
Здесь $[a, b] = ab - (-1)^{deg\ a * deg\ b}ba$.
Найдём знаки при коммутаторах в соотношении:

$$\sum_{i=1}^{5} \pm[a_i, b_i] = 0.$$

Для этого распишем все коммутаторы по правилу выше. Получим:

$$\begin{aligned}
[a_1, b_1] = &-u_1u_3u_2u_5u_4 + u_1u_3u_4u_2u_5 + u_1u_3u_4u_5u_2 - u_1u_3u_5u_2u_4 - \\
&u_3u_1u_2u_5u_4 + u_3u_1u_4u_2u_5 + u_3u_1u_4u_5u_2 - u_3u_1u_5u_2u_4 + \\
&u_2u_5u_4u_1u_3 - u_4u_2u_5u_1u_3 - u_4u_5u_2u_1u_3 + u_5u_2u_4u_1u_3 + \\
&u_2u_5u_4u_3u_1 - u_4u_2u_5u_3u_1 - u_4u_5u_2u_3u_1 + u_5u_2u_4u_3u_1, \\
[a_2, b_2] = &-u_1u_4u_2u_5u_3 + u_1u_4u_3u_2u_5 + u_1u_4u_3u_5u_2 - u_1u_4u_5u_2u_3 - \\
&u_4u_1u_2u_5u_3 + u_4u_1u_3u_2u_5 + u_4u_1u_3u_5u_2 - u_4u_1u_5u_2u_3 + \\
&u_2u_5u_3u_1u_4 - u_3u_2u_5u_1u_4 - u_3u_5u_2u_1u_4 + u_5u_2u_3u_1u_4 + \\
&u_2u_5u_3u_4u_1 - u_3u_2u_5u_4u_1 - u_3u_5u_2u_4u_1 + u_5u_2u_3u_4u_1, \\
[a_3, b_3] = &u_2u_4u_1u_3u_5 + u_2u_4u_1u_5u_3 - u_2u_4u_3u_5u_1 - u_2u_4u_5u_3u_1 + \\
&u_4u_2u_1u_3u_5 + u_4u_2u_1u_5u_3 - u_4u_2u_3u_5u_1 - u_4u_2u_5u_3u_1 - \\
&u_1u_3u_5u_2u_4 - u_1u_5u_3u_2u_4 + u_3u_5u_1u_2u_4 + u_5u_3u_1u_2u_4 - \\
&u_1u_3u_5u_4u_2 - u_1u_5u_3u_4u_2 + u_3u_5u_1u_4u_2 + u_5u_3u_1u_4u_2, \\
[a_4, b_4] = &-u_2u_5u_1u_4u_3 + u_2u_5u_3u_1u_4 + u_2u_5u_3u_4u_1 - u_2u_5u_4u_1u_3 - \\
&u_5u_2u_1u_4u_3 + u_5u_2u_3u_1u_4 + u_5u_2u_3u_4u_1 - u_5u_2u_4u_1u_3 + \\
&u_1u_4u_3u_2u_5 - u_3u_1u_4u_2u_5 - u_3u_4u_1u_2u_5 + u_4u_1u_3u_2u_5 + \\
&u_1u_4u_3u_5u_2 - u_3u_1u_4u_5u_2 - u_3u_4u_1u_5u_2 + u_4u_1u_3u_5u_2, \\
[a_5, b_5] = &-u_3u_5u_1u_4u_2 + u_3u_5u_2u_1u_4 + u_3u_5u_2u_4u_1 - u_3u_5u_4u_1u_2 - \\
&u_5u_3u_1u_4u_2 + u_5u_3u_2u_1u_4 + u_5u_3u_2u_4u_1 - u_5u_3u_4u_1u_2 + \\
&u_1u_4u_2u_3u_5 - u_2u_1u_4u_3u_5 - u_2u_4u_1u_3u_5 + u_4u_1u_2u_3u_5 + \\
&u_1u_4u_2u_5u_3 - u_2u_1u_4u_5u_3 - u_2u_4u_1u_5u_3 + u_4u_1u_2u_5u_3.
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим только те слагаемые в каждом коммутаторе, в которых невозможно переставить местами u_i и u_j для любых i и j, т.е.где рядом не стоят $u_iu_{(i+1)mod(5)+1}$. Так как в них u_i не переставляются, то знак поменять вручную мы у них не можем, а значит, чтобы они сократились, у их пары из другого коммутатора должен быть противоположный знак. Исходя из этих предположений, получаем:

1) У $[a_1, b_1]$ и $[a_3, b_3]$ знаки различны (например, из слагаемых $u_1u_3u_5u_2u_4$ или $u_4u_2u_5u_3u_1$).

2) У $[a_1, b_1]$ и $[a_4, b_4]$ знаки одинаковые (например, из слагаемых $u_3u_1u_4u_2u_5$ или $u_5u_2u_4u_1u_3$).

3) У $[a_2, b_2]$ и $[a_5, b_5]$ знаки одинаковые (например, из слагаемых $u_1u_4u_2u_5u_3$ или $u_3u_5u_2u_4u_1$).
4) У $[a_2, b_2]$ и $[a_4, b_4]$ знаки различны (например, из слагаемых $u_4u_1u_3u_5u_2$ или $u_2u_5u_3u_1u_4$).
5) У $[a_3, b_3]$ и $[a_5, b_5]$ знаки одинаковые (например, из слагаемого $u_2u_4u_1u_3u_5$).
Исходя из результатов выше, получаем, что соотношение такое:

$$[a_1, b_1] - [a_2, b_2] - [a_3, b_3] + [a_4, b_4] - [a_5, b_5].$$

3. Гомологии пространства петель момент-угол комплекса шестиугольника

Как известно, для любого симплициального комплекса $\mathcal{K}$, являющегося границей m-угольника, выполняется:

$$\mathcal{H}_*(\Omega\mathcal{DJ}(\mathcal{K}); k) \cong T < u_1, \dots, u_m > /(u_i^2 = 0, u_iu_j + u_ju_i = 0, , \text{ если } \{i, j\} \in \mathcal{K}).$$

Пусть $\mathcal{K}$ - граница шестиугольника. Выпишем образующие алгебры Понтрягина $\mathcal{H}_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, где $\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ - пространство петель момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$.

$$a_1 = [u_6, u_2], a_2 = [u_6, u_3], a_3 = [u_6, u_4], a_4 = [u_5, u_1], a_5 = [u_5, u_2], a_6 = [u_5, u_3],$$

$$a_7 = [u_4, u_1], a_8 = [u_4, u_2], a_9 = [u_3, u_1],$$

$$b_1 = [u_3, [u_6, u_2]], b_2 = [u_4, [u_6, u_2]], b_3 = [u_5, [u_6, u_2]], b_4 = [u_1, [u_6, u_3]], b_5 = [u_4, [u_6, u_3]],$$

$$b_6 = [u_5, [u_6, u_3]], b_7 = [u_1, [u_6, u_4]], b_8 = [u_2, [u_6, u_4]], b_9 = [u_2, [u_5, u_1]], b_{10} = [u_3, [u_5, u_1]],$$

$$b_{11} = [u_4, [u_5, u_1]], b_{12} = [u_3, [u_5, u_2]], b_{13} = [u_4, [u_5, u_2]], b_{14} = [u_1, [u_5, u_3]], b_{15} = [u_2, [u_4, u_1]],$$

$$b_{16} = [u_3, [u_4, u_1]],$$

$$c_1 = [u_3, [u_4, [u_6, u_2]]], c_2 = [u_3, [u_5, [u_6, u_2]]], c_3 = [u_4, [u_5, [u_6, u_2]]], c_4 = [u_1, [u_4, [u_6, u_3]]], c_5 = [u_1, [u_5, [u_6, u_3]]$$

$$c_6 = [u_2, [u_3, [u_5, u_1]]], c_7 = [u_2, [u_4, [u_5, u_1]]], c_8 = [u_3, [u_4, [u_5, u_1]]], c_9 = [u_1, [u_2, [u_6, u_4]]].$$

где $deg\ u_i = 1, deg\ a_i = 2, deg\ b_i = 3, deg\ c_i = 4$.
Здесь $[a, b] = ab - (-1)^{deg\ a * deg\ b} ba$.
Теперь хотим найти коммутаторы, перед которыми будем расставлять знаки в соотношении. В данном случае это будет сложнее, чем в случае с пятиугольником. Сначала посчитаем числа Бетти, они такие:

Таблица 1. Биградуированные числа Бетти.

.	0	1	2	3	4	5	6	7	8
.	1	0	0	9	16	9	0	0	1
1	1	0	0	9	12	9	0	0	1
2	1	0	0	0	4	0	0	0	1

Из таблицы выше получаем, что:

$$\widetilde{j} : (S^3 \times S^5)^{\#9} \# (S^4 \times S^4)^{\#6} \# (S^4 \times S^4)^{\#2} \to \mathcal{Z}_\mathcal{K}.$$

Исходя из данного отображения, понимаем, что необходимо брать коммутаторы вида $[a_i, c_j]$ так, что наборы индексов в коммутаторах дополняли друг друга до набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Но у нас есть два типа c_j. Первый тип - отдельная точка и три точки, лежащие рядом. Второй тип - два отрезка друг против друга. c_j второго типа три, а именно c_2, c_4, c_7. В первом случае всё нормально, а во втором случае нет, так как c_2, c_4 и c_7 в алгебре Кошуля соответствует некоторая линейная комбинация, а именно:

$$c_2 \to u_2u_3u_6v_5 - u_3u_5u_6v_2,$$

$$c_7 \to u_1u_2u_5v_4 - u_2u_4u_5v_1.$$

Поэтому в случае коммутаторов с $c_j,\ j \in \{2,4,7\}$ при c_j берётся коэффициент 1/2. Теперь рассмотрим коммутаторы с b_i. В случае, когда у нас набор индексов не совпадает с {1,3,5} и {2,4,6} у нас существует единственный коммутатор, который может ему соответствовать для того, чтобы индексы дополнить до {1,2,3,4,5,6}. Их мы и берём. И остаётся 4 b_j, а именно b_2, b_8, b_10, b_14 (соответствуют последней компоненте в связной сумме), где непонятно, какие коммутаторы брать. Чтобы разобраться с этим, рассмотрим алгебру Кошуля. $b_j, j \in \{2, 8, 10, 14\}$ соответствует следующее:

$$u_2u_6v_4, u_4u_6v_2;$$

и

$$u_1u_5v_3, u_3u_5v_1.$$

При перемножении данных элементов мы видим, что система не каноническая. Чтобы сделать её канонической, слегка изменим её:

$$u_2u_6v_4, u_4u_6v_2;$$

и

$$u_1u_5v_3 - u_3u_5v_1, u_3u_5v_1.$$

Теперь при перемножении элементов, стоящих друг под другом, мы получим фундаментальный класс со знаком минус. При перемножении остальных элементов, мы получим ноль. Теперь рассмотрим образующие в алгебре Понтрягина и то, что им соответствует в момент-угол комплексе:

$$[u_1, [u_5, u_3]] \to T_1D_3T_5 + T_1T_3D_5 \leftrightarrow A,$$

$$[u_3, [u_5, u_1]] \to T_1T_3D_5 + D_1T_3T_5 \leftrightarrow B,$$

$$[u_4, [u_6, u_2]] \to T_2T_4D_6 + D_2T_4T_6 \leftrightarrow A_1,$$

$$[u_2, [u_6, u_4]] \to T_2T_4D_6 + T_2D_4T_6 \leftrightarrow B_1.$$

Матрица спаривания нашего базиса в алгебре Кошуля с A, B, A_1, B_1 не является единичной. Чтобы это исправить, подправим базис в момент-угол комплексе:

$$A, A + B, B_1, -A + A_1 - B.$$

Теперь понятно, что в наше соотношение должны войти следующие два коммутатора:

$$[A, B_1] \text{ и } [A + B, -A + A_1 - B],$$

так как именно так перемножаются элементы базиса в алгебре Кошуля для получения фундаментального класса.

Ну а дальше соотношение не получается :(У нас из $[A + B, -A + A_1 - B]$ вылазит $-[A, A]$ и $-[B, B]$. В них и получаются удвоенные (двойка идёт именно из коммутатора [A,A] или [B,B], в этих двух коммутаторах эти слагаемые не пересекаются, т.е. если слагаемой есть в одном коммутаторе, то нет в другом) слагаемые вида $u_1u_3u_5u_1u_3u_5$, которые нигде не могут сократиться.

Список литературы

[БПТДТК] В.М.Бухштабер, Т.Е.Панов. *Торические действия в топологии и комбинаторике.* Москва, издательство МЦНМО (2004).

[ДРВЛ] И. Лимонченко *Биградуированные числа бетти некоторых простых многогранников. стр. 16.* Москва, издательство МЦНМО (2004).

[Wolfram Mathematica] A software system devoted to supporting research in mathematica. Avaliable at http://www.wolframalpha.com/

Механико-математический факультет МГУ
E-mail address: verevkin_j.a@mail.ru