МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

ЗЕЙНИКЕШЕВА И.К.

МНОГОГРАННИКИ С ПРЕДПИСАННОЙ ФОРМОЙ ДВУМЕРНЫХ ГРАНЕЙ В ТОРИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ

Дипломная работа

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, проф. ПАНОВ Т.Е.

Москва, 2016

Содержание

1 Введение.

Располагая информацией о двумерных гранях многогранника, можно сделать вывод о комбинаторной структуре самого многогранника, а именно, можно показать следующее:
Теорема. Простой многогранник размерности $n \geq 2$, двумерные грани которого являются треугольниками или четырехугольниками, комбинаторно эквивалентен произведению симплексов.
Данное утверждение является основным результатом этой работы. Частный случай этого утверждения: если все двумерные грани являются 4-угольниками, то это комбинаторный n–мерный куб.
Данные утверждения полезны при изучении свойств многообразий с действием тора, пространство орбит которого является простым многогранником. Так, в работе [5] изучаются башни Ботта, квазиторические многообразия, частично отвечают на вопрос о следствии из изоморфизма колец когомологий башен Ботта их гомеоморфизма. Описывать топологические свойства квазиторических многообразий можно в терминах только комбинаторных данных (например, пространства орбит–простого многогранника и характеристической функции). Таким образом, многие топологические вопросы сводятся к комбинаторным задачам, одна из которых поставлена и решена в данной работе. В первой части работы будут введены необходимые определения и понятия, далее — доказательство основной теоремы.

2 Основные понятия и конструкции.

Перед непосредственной постановкой задачи введем базовые определения и конструкции, используемые в дальнейшем.
Все рассматриваемые многогранники выпуклые, есть два эквивалентных способа определения выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^n$.
Определение 1.1. *Выпуклым многогранником* называется выпуклая оболочка конечного набора точек в некотором пространстве $\mathbb{R}^n$.
Определение 1.2. *Выпуклым полиэдром* называется пересечение P конечного набора полупространств в некотором пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$P = \{\, x \in \mathbb{R}^n \colon (l_i, x) \geqslant -a_i,\; i = 1, \ldots, m \,\}$$

где $l_i \in (\mathbb{R}^n)^*$ — некоторые линейные функции, $a_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, m$. Ограниченный выпуклый полиэдр называется (выпуклым) *многогранником.*

Размерность многогранника n — это размерность его аффинной оболочки. Аффинная гиперплоскость H, пересекающая многогранник P^n, называется его *несущей гиперплоскостью*, если многогранник целиком содержится в одном из двух определяемых ею замкнутых полупространств. Тогда пересечение $P \cap H$ называется *гранью* многогранника. Грани, кроме самого многогранника, называются *собственными*. Сам многогранник будем считать тривиальной гранью. Объединение всех собственных граней называется *границей*. Нульмерные грани называются *вершинами*, одномерные — *ребрами*, а грани коразмерности один — *гипергранями*.
Существует понятие многогранника *общего положения*. Набор из $m > n$ точек $\mathbb{R}^n$ находится в *общем положении*, если никакие $n + 1$ из них не лежат на одной аффинной гиперплоскости. Тогда можем ввести определение симплициального многогранника.
Многогранник называется *симплициальным*, если он, с позиции определения 1, является многогранником общего положения, т.е. является выпуклой оболочкой точек в общем положении. Все его собственные грани — симплексы.
Многогранник называется *простым*, если в каждой его вершине сходится ровно n гиперграней.
Два многогранника $P_1 \subset \mathbb{R}^n$ и $P_2 \subset \mathbb{R}^n$ называются *аффинно эквивалентными (аффинно изоморфными)*, если существует аффинное отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, устанавливающее взаимно однозначное соответствие между точками этих многогранников. Два многогранника называются *комбинаторно эквивалентными*, если имеется взаимно однозначное соответствие между их множествами граней, сохраняющее отношение включения.
Определение 1.3. *Комбинаторный многогранник* — это класс комбинаторно эквивалентных выпуклых многогранников.
Приведем примеры некоторых многогранников:
Стандартным n-кубом называется выпуклый многогранник $I^n \subset \mathbb{R}^n$, задаваемый в виде

$$I^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \ldots, n\}$$

Равносильно, n-куб есть выпуклая оболочка 2^n точек в $\mathbb{R}^n$, каждая из ~~которых есть~~ 0 или 1. Куб является простым многогранником.
Симплексом Δ^n размерности n называется выпуклая оболочка $(n + 1)$ точек в $\mathbb{R}^n$, не лежащих в одной аффинной гиперплоскости. Все грани n-симплекса являются симплексами размерности не выше n.
Введем понятие f-вектора (или *вектора граней*), которое является одним из основных в комбинаторной теории многогранников.
Определение 1.4. Пусть ~~S~~ — симплициальный многогранник. Обозначим через f_i число его i-мерных граней. Целочисленный вектор $f(S) =$

$(f_0, \ldots, f_{n-1})$ называется f-вектором многогранника S.
Дальше пусть $f_{-1} = 1$. Введем h-вектор многогранника S как целочисленный вектор $h\,(S) = (h_0, h_1, \ldots, h_n)$, определяемый из уравнения

$$h_0 t^n + \ldots + h_{n-1} t + h_n = (t-1)^n + f_0 (t-1)^{n-1} + \ldots + f_{n-1}.$$

Для простого n-многогранника определим его f-вектор как f-вектор полярного симплициального многогранника: $f(P) := f(P^*)$, аналогично определяются $h-$вектор. Получаем, $f(P) = (f_0, \ldots, f_{n-1})$, где f_i — число граней многогранника коразмерности $(i+1)$ (т.е. размерности $(n-i-1)$). f-вектор и h-вектор можно выразить друг через друга:

$$h_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \tbinom{n-i}{n-k} f_{i-1}, \qquad f_{n-1-k} = \sum_{q=k}^{n} \tbinom{q}{k} h_{n-q},\ k = 0, \ldots, n. \tag{1}$$

В частности, $h_0 = 1$ и $h_n = (-1)^n (1 - f_0 + f_1 + \ldots + (-1)^n f_{n-1})$. Имеем формулу Эйлера:

$$f_0 - f_1 + \ldots + (-1)^{n-1} f_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1},$$

которая эквивалентна соотношению:

$$h_n = h_0\,(= 1).$$

Для простых многогранников формулу Эйлера можно обобщить до соотношений Дена–Соммервилля:

Теорема 2.1. *Для любого простого (или симплициального) n-многогранника h-вектор симметричен, т.е. имеет место соотношение*

$$h_i = h_{i-1},\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

3 Доказательство основного результата.

Основной результат работы:

Теорема 3.1. *Простой многогранник размерности $n \geq 2$, двумерные грани которого являются треугольниками или четырехугольниками, комбинаторно эквивалентен произведению симплексов.*

Доказательство. Проведем индукцию по размерности многогранника — по n.
1. Пусть $n = 3$. Докажем базу индукции. Обозначим за x – число четырехугольников, y – треугольников в многограннике. Тогда всего вершин у таких двумерных граней: $4x + 3y$. В силу простоты многогранника P каждую вершину содержат 3 двумерные грани, значит, число вершин в P: $\dfrac{4x+3y}{3}$. И каждое ребро содержится в двух двумерных гранях, поэтому число ребер в P : $\frac{4x+3y}{2}$. В трехмерном случае формула Эйлера имеет вид: $f_2 - f_1 + f_0 = 2$, где f_2 — число вершин, f_1 — число ребер, f_0 — число двумерных граней. Запишем ее для данного случая:

$$\frac{4x+3y}{3} - \frac{4x+3y}{2} + x + y = 2$$

$\Rightarrow 2x+3y = 12$. Из того, что $\dfrac{4x+3y}{2} \Rightarrow y = 2k$, а из $\dfrac{4x+3y}{3} \Rightarrow x$ делится на 3.
Из уравнения $2x+3y = 12$ следует, что $x < 6. \Rightarrow (x, y) = \{(3, 2), (6, 0), (0, 4)\}$.
Тогда число двумерных граней у многогранника с таким свойством может быть 5, 6 или 4.
Теперь обратимся к утверждению, основанном на преобразовании Гейла, которое можно найти в книге Грюнбаума [4, раздел 6.1.]:

Предложение 3.2. Пусть P^n – сиплициальный многогранник, m – число вершин. Тогда:
1) Если $m = n + 1$, то $P = \Delta^n$.
2) Если $m = n+2$, то P есть двойственный многогранник к произведению симплексов.

В нашем случае ($n = 3$, P - простой) m – число гиперграней, т.е. для трехмерного многогранника, двумерных граней. Значит, при $m = 4$, то P это симплекс Δ^n (случай: все двумерные грани — треугольники), при $m = 5$ P есть треугольная призма, т.е. произведение симплексов, а именно треугольника на отрезок (двумерные грани или треугольники, или четырехугольники), для $m = 6$ число ребер равно 12, число вершин — 8, ~~т.е. это трехмерный куб~~ (все двумерные грани — четырехугольники). И учитывая, что диаграммы Гейла обеспечивают комбинаторную эквивалентность многогранников, получаем верное утверждение.
Итак, в случае $n = 3$, получаем, что многогранник P^n может быть комбинаторно эквивалентен либо симплексу, либо призме, либо кубу, т.е. произведению симплексов.

2. Для многогранника размерности 3 утверждение верно. Таким образом, имеем базу индукции.
Пусть по предположению индукции, данное утверждение верно для многогранника P^{n-1}. Докажем утверждение для многогранника P^n.
Каждая гипергрань многогранника P^n является простым многогранником на единицу меньшей размерности — P^{n-1}, т.е. многогранником, комбинаторно эквивалентным произведению симплексов. Выделим в некоторой гиперграни многогранника P^n следующую грань: S^k — k–мерная грань, соответствующая максимальному полному подграфу в графе многогранника, т.е. в грани S^k все вершины попарно соединены между собой ребрами.[1] Занумеруем вершины в S^k. Из каждой вершины S^k исходит k ребер, лежащих в S^k и $n-k$ ребер вне его. Для каждой вершины грани S^k на исходящие из нее $n-k$ ребер натягивается $(n-k)$–мерная грань L_i^{n-k}, где i — номер соответствующей вершины S^k. На рис. 1 схематично обозначены выбранные грани и некоторые ребра в них.

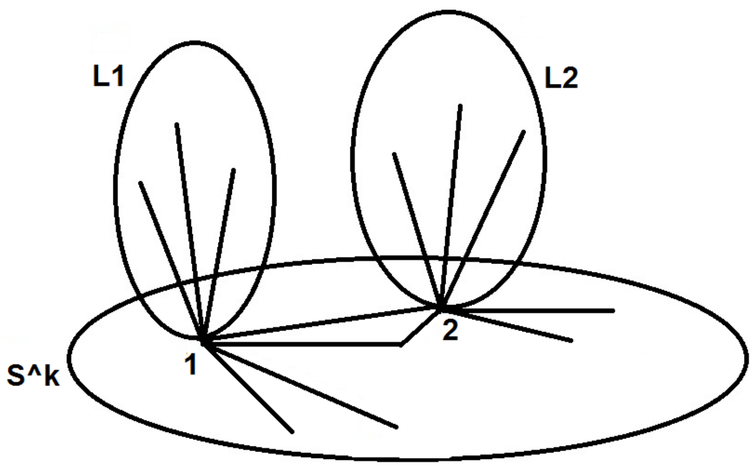

Рис. 1: Выделенные грани.

Рассмотрим любые 2 вершины в симплексе S^k, они соединены ребром. Пусть это ребро (12), вершины соответственно — 1 и 2. Тогда на ребро (12) и ребро, исходящее из вершины 1, пусть на $(11')$ (вершина $1'$ принадлежит $(n-k)$–грани, соответствующей вершине 1 — L_1^{n-k}), натягивается только четырехугольник. Треугольник на (12) и $(11')$ натянут быть не может, покажем это следующей леммой.

[1]Другими словами, S^k есть k–мерный симплекс, но не будем обозначать его стандартным образом, чтобы показать, что это некоторая грань в многограннике P^n.

Лемма. Никакие две из граней L_i^{n-k} и L_j^{n-k}, где $i, j = 1, \ldots, k+1$, не пересекаются.

Доказательство. Без ограничений общности рассмотрим грани L_1^{n-k}, L_2^{n-k}. Будем по-прежнему работать с ребром $(12) \in S_k$ и рассматривать исходящие ребра из 1 и 2 в выбранных гранях. Хотим показать, что пересечение этих граней пусто, а это равносильно следующему: на любое исходящее из вершины 1 ребро, например на $(11') \in L^1_{n-k}$, и на ребро (12) натягивается четырехугольник. На указанные ребра треугольник натянут быть не может, т.е. не может быть ребра $(1'2)$, иначе это означало бы, что вершина $1'$ является концом и ребра $(11')$, и ребра $(21')$, т.е. $1' \in L_1^{n-k} \cap L_2^{n-k}$. Предположим противное.

Допустим, на ребра $(12) \in S_k$ и произвольное ребро $(11') \in L^1_{n-k}$ натягивается треугольник, т.е. есть ребро $(1'2)$. Получили, что $1' \in L_1^{n-k} \cap L_2^{n-k}$, а пересечение $L_1^{n-k} \cap L_2^{n-k} =: L_{12}^{n-k-1}$ есть $(n-k-1)$-мерная грань, т.е. из вершины $1'$ в этой грани (L_{12}^{n-k-1}) исходит $n-k-1$ ребро (см. рис. 2). Вершина $1'$ есть вершина n-мерного простого многогранника, следовательно, из $1'$ вне грани L_{12}^{n-k-1} исходит ровно $k-1$ ребро. А на пары ребер $(11')$ и $(1i)$, $(21')$ и $(2i)$, где $i = 3, \ldots, k+1$, можно натянуть $2(k-1)$ двумерных граней. Это означает, что каждое исходящее вне L_{12}^{n-k-1} ребро (ребро $(1'i')$) будет общим для двумерных граней, натянутых на ребра $(11')$, $(1i)$ и на ребра $(21')$, $(2i)$. Запомним это.

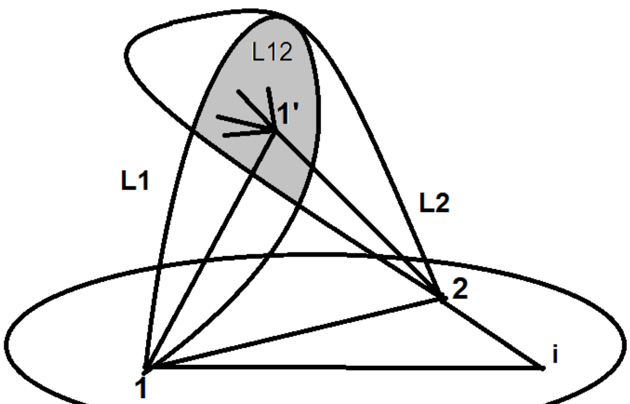

Рис. 2: Пересечение граней L_1^{n-k}, L_2^{n-k} не пусто.

Теперь, т.к. в грани S_k все вершины попарно соединены ребрами, то возьмем, например, треугольник $(123) \in S_k$ и посмотрим, какие двумерные грани (с участием ребер $(11')(12)$) «примыкают» к ребрам этого треугольника. К одному из них – к (12) – по предположению примыкает треугольник $(11'2)$. Тогда и на остальные ребра натягиваются треугольники, т.е. на пары ребер $\{(11'),(13)\}$ и на $\{(21'),(23)\}$ натягиваются только треугольники. Убедимся, что это так.

Допустим, что хотя бы на одну пару ребер можно натянуть четырехугольник. Пусть на ребра $(11')$ и (13) натягивается четырехугольник $(11'3'3)$, т.е. вершина $1'$ соединяется ребром с некоторой вершиной $3'$ (рис. 3). Причем это ребро $(1'3')$ не является ни одним из $n-k-1$–го ребра, исходящих из $1'$ в L_{12}^{n-k-1}, и вот почему.

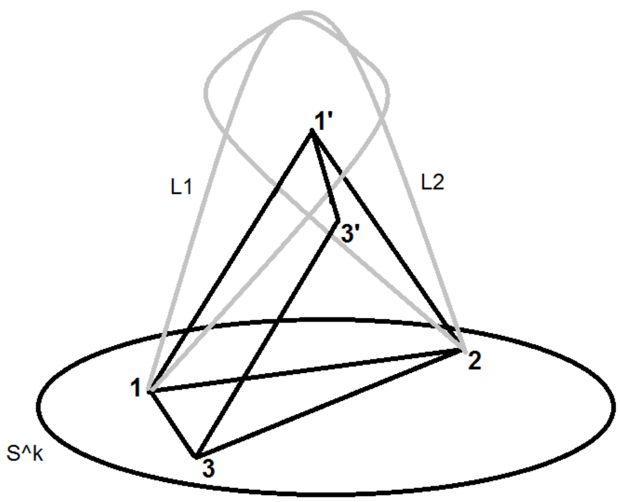

Рис. 3:

Для любого ребра $(1'x) \in L_{12}^{n-k-1}$ выполняется: на ребра $(1'x)$ и $(1'2)$ (и на $(1'x)$ и $(1'1)$) натягивается двумерная грань, принадлежащая L_2^{n-k} (соответственно L_1^{n-k}), т.е. либо треугольник $(1'x2) \in L_2^{n-k}$ (треугольник $(1'x1) \in L_1^{n-k}$), либо четырехугольник $(1'xx_2 2) \in L_2^{n-k}$ (четырехугольник $(1'xx_1 1) \in L_1^{n-k}$), где $x_2(x_1)$ – конец ребра, исходящего из вершины 2 (вершины 1), лежащего в L_2^{n-k} (в L_1^{n-k}).
Для ребра $1'3'$ четырехугольника $(11'3'3)$ не выполняется «условие принадлежности» грани L_{n-k}^{12}, т.е. что на ребра $(1'3')$, $(1'1)$ натягивается двумерная грань, принадлежащая L_1^{n-k}, т.к. четырехугольник $(11'3'3) \notin L_1^{n-k}$ (вершина $3 \notin L_1^{n-k}$, вершина 3 есть конец одного из k ребер, лежащих в грани S_k).

Значит, $(1'3')$ является одним из тех $k-1$ ребер, исходящих вне L_{12}^{n-k-1}. А мы помним, что каждое исходящее вне L_{12}^{n-k-1} ребро (ребро $(1'i')$, здесь $i' = 3'$) будет общим для двумерных граней, натянутых на ребра $(11')$, $(1i)$ (здесь $i = 3$) и на ребра $(21'), (2i)$, из-за того, что всего из $1'$ выходит $k-1$ ребро, а двумерных граней — $2(k-1)$.А значит, на ребра $(1'2)$ и (23) натягивается четырехугольник так, чтобы ребро $(1'3')$ было общим с четырехугольником $(11'3'3)$, т.е. натягивается четырехугольник $(1'233')$. Но последние два четырехугольника имеют две общие стороны, что невозможно (и треугольник $(1'23)$ натянуть нельзя, т.к. тогда $(1'23)$ и $(11'3'3)$ пересекались бы не по ребру). Получили, что на $(1'2)$ и (23) не может быть натянуто ни четырехугольника, ни треугольника, значит, предположение, что на ребра $(11')$ и (13) натягивается четырехугольник $(11'3'3)$, неверно.
Итак, если на ребра $(12) \in S_k$ и ребро $(11') \in L_{n-k}^1$ натягивается треугольник $(121')$, то и к другим сторонам треугольника $(123) \in S_k$ «примыкают» треугольники, т.е. на пары ребер $\{(11'), (13)\}$ и на $\{(21'), (23)\}$ натягиваются только треугольники (рис. 4). В силу произвольности выбора вершины 3, получим аналогичное утверждение и для треугольников $(12i) \in S_k, i = 4, \ldots, k+1$, ко всем их сторонам будут пристроены треугольники из-за уже «пристроенного» треугольника $(121')$. Но тогда получаем, что вершина $1'$ соединена ребрами со всеми вершинами $i \in S_k$, а это противоречит максимальности симплекса S_k.

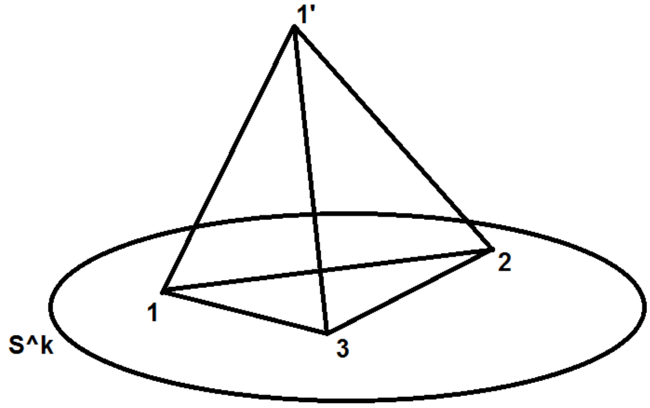

Рис. 4: Вершина $1'$ соединяется со всеми вершинами из S^k.

Значит, исходное предположение данной леммы, что на ребра $(12) \in S_k$

и ребро $(11') \in L^1_{n-k}$ натягивается треугольник, неверно. В силу произвольности выбора ребра $(11')$, на любое исходящее в L^1_{n-k} из вершины 1 ребро и на ребро (12) натягивается четырехугольник. А это равносильно тому, что не существует такой вершины $1'$, что $1' \in L_1^{n-k} \cap L_2^{n-k}$. В силу произвольного выбора этих двух граней, получаем верное утверждение для всех граней, т.е. что $L_i^{n-k} \cap L_j^{n-k} = \oslash$. □

Продолжим доказательство теоремы.
По доказанной лемме любое ребро, исходящее в L^1_{n-k} из вершины 1, и ребро (12) образуют двумерную грань, которая может быть только четырехугольником, это значит, что конец, например, ребра $(11')$ — вершина $1' \in L_1^{n-k}$ соединяется ребром с вершиной $1'' \in L_2^{n-k}$. Рассмотрим эту вершину $1' \in L_1^{n-k}$. (см. рис. 5)
Из $1'$ исходит $n-k$ ребер в L_1^{n-k} (L_1^{n-k} — $(n-k)$–мерный простой многогранник) и 1 ребро идет в L_2^{n-k} (это ребро $(1'1'')$). Так как в S_k все вершины соединены друг с другом, то вершина 1 соединена k ребрами со всеми остальными вершинами из S_k, и значит, из вершины $1'$ будет исходить k ребер, конец которых принадлежит L_j^{n-k}, $j = 2, \ldots, k+1$ (т.к. на $(11')$ и $(1j)$ по аналогии натягиваются четырехугольники). Получаем, что из вершины $1'$ исходит $n-k+k=n$ ребер, т.е. она стала «полной» и ни с какой другой вершиной из L_2^{n-k}, кроме вершины $1''$, она не может быть соединена ребром.

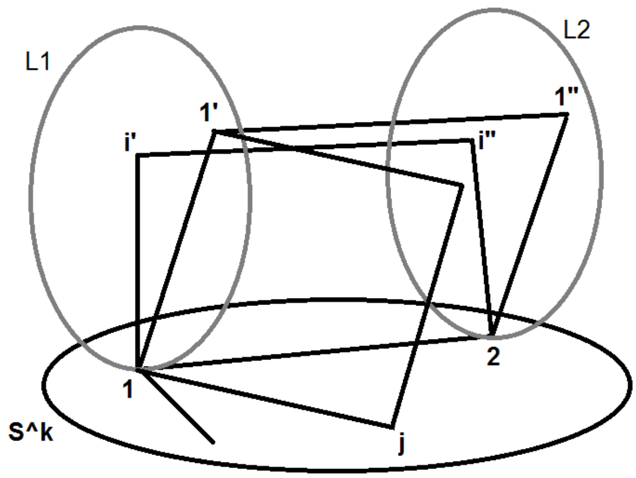

Рис. 5:

Итак, получили, что каждой такой вершине i' (являющейся концом ребра из вершины 1) из L_1^{n-k} соответствует единственная вершина i'' (конец

ребра, исходящего из вершины 2) из L_2^{n-k}, соединенная с ней ребром. Причем ребру $(1i') \in L_1^{n-k}$ соответствует ребро $(2i'') \in L_2^{n-k}$. Назовем такие вершины i' концевыми.
Рассмотрим теперь остальные вершины из L_1^{n-k} и L_2^{n-k}, и докажем, почему и они соответсвуют друг другу.

Возьмем вершину $m' \in L_1^{n-k}$, которая не является концевой вершиной, т.е. концом ребра $(1i')$, $i' = 1', \dots, (n-k)'$ (если такая есть). Вершина m' не соединена с вершиной 1, тогда и с никакой вершиной S_k не может быть соединена, т. к. все вершины грани S_k — уже полные, они соединены с k вершинами в S_k (m' не вершина в S_k) и с $n-k$ вершинами в L_i^{n-k} для каждой i ($m' \in L_1^{n-k}$ и по лемме грани L_i^{n-k} и L_1^{n-k} не пересекаются). Из m' выходит $n-k$ ребер в L_1^{n-k}, и еще k ребер вне L_1^{n-k}, и т.к. концы этих ребер в S^k лежать не могут, то они принадлежат граням L_i^{n-k}, $i = 2, \dots, k+1$ (их тоже ровно k). Причем в каждую L_i^{n-k} из вершины m выходит ровно одно ребро $(m'm^{(i)})$. Покажем это.

Возьмем конец одного из $n-k$ ребер в L_1^{n-k}, исходящих из m' — вершину p'. Пусть p' — это концевая вершина (т.е. конец одного из ребер, исходящих из вершины 1) (если это не так, то будем рассматривать все вершины, которые есть концы ребер, исходящих из m', и за конечное число шагов дойдем до некоторой концевой вершины. Тогда вершину, которая есть конец соответствующего ребра, исходящего из этой концевой, обозначим за m').

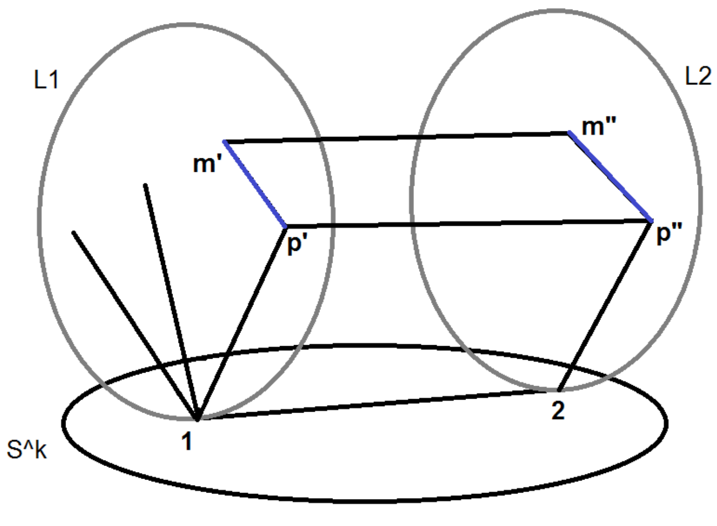

Рис. 6: Сопоставление неконцевых вершин и ребер граней L_1^{n-k}, L_2^{n-k}.

В некоторую L_i^{n-k}, $i = 2, \ldots, k+1$, должно исходить как минимум одно ребро из вершины m'. Без ограничений общности, пусть в L_2^{n-k} существует ребро $(m'm'')$, $m'' \in L_2^{n-k}$. Тогда на $(m'p')$ и $(m'm'')$ может быть натянут только четырехугольник $(p'm'm''p'')$ (рис. 6), где p'' — концевая вершина в L_2^{n-k} (т.к. концевая вершина p' — уже полная и не может быть соединена с m'', т.е. треугольник не может быть натянут).

Тогда если из m' в грань L_2^{n-k} исходит еще одно ребро, например, $(m'l'')$, $l'' \in L_2^{n-k}$, то на $(m'l'')$ и $(m'p')$ тоже натягивается только четырехугольник, из-за полноты p', причем, имеющий с уже построенным четырехугольником $(m'm''p''p')$, два общих ребра ($(m'p')$ и $(p'p'')$), что невозможно. Следовательно, вершины l'' быть не может, и m' из L_1^{n-k} соответствует единственная вершина m'' из L_2^{n-k}, причем ребру $(p'm') \in L_1^{n-k}$ соответствует ребро $(p''m'') \in L_2^{n-k}$ (стороны одного четырехугольника, лежащие в разных гранях).

За конечное число шагов мы «обойдем» все вершины грани L_1^{n-k}, двигаясь от концевых вершин по ребрам к неконцевым. При этом им в соответствие будут сопоставляться вершины грани L_2^{n-k}, и ребрам, по которым «шли» соответствующие ребра в L_2^{n-k}. Аналогично поступаем и для других L_i^{n-k}, $i = 2, \ldots, k+1$.

Получаем, что вершине m' ни в какой L_i^{n-k} больше одной вершины соответствовать не может, а количество граней L_i^{n-k}, $i = 2, \ldots, k+1$ ровно k, и k ребер должны исходить из m' вне L_1^{n-k}, значит, в каждую L_i^{n-k} из m' выходит ровно одно ребро.

В силу произвольности выбора m', получаем, что каждой неконцевой вершине из L_1^{n-k} соответствует единственная вершина (тоже неконцевая) из L_2^{n-k} (как и в L_i^{n-k}), и ребрам, исходящим в L_1^{n-k} из вершины m', соответствуют ребра в грани L_2^{n-k}, т.к. между L_1^{n-k} и L_2^{n-k} «идут» четырехугольники (соответствие естественное: противоположные стороны четырехугольника). А значит, имеем биекцию на всех вершинах (концевых и неконцевых) и ребрах граней L_1^{n-k} и L_2^{n-k}, т.е. граф L_1^{n-k} взаимнооднозначно сопоставляется графу L_2^{n-k}.

А т.к. граф простого многогранника однозначно задает этот многогранник, получаем комбинаторную эквивалентность L_1^{n-k} и L_2^{n-k} как многогранников. Аналогично поступаем для остальных граней L_i^{n-k}.

В итоге получаем произведение граней $S^k \times L^{n-k}$, дающее весь P^n, а по предположению индукции грани меньшей размерности (т.е. L_{n-k}, S^k

— симплекс по изначальному предположению) есть произведения симплексов, значит, и для размерности n получили верное утверждение.

□

4 Заключение.

Таким образом, в данной работе был изучен комбинаторный класс многогранников с определенным свойством, а именно, показана связь между информацией о двумерных гранях и комбинаторным типом многогранника. Доказательство велось индуктивно, база индукции была показана аналитическим способом, с помощью известных соотношений на число граней. Индукционный переход показан конструктивным способом, в основу которого легла простота исходного многогранника. Посредством комбинаторных данных, например, пространства орбит, которое является простым многогранником, изучаются и доказываются свойства квазиторических многообразий, что показывает применимость и пользу доказанного в данной работе утверждения.

Список литературы

[1] Александров А.Д. *Выпуклые многогранники.* М. ; Л. : Гостехтеориздат, 1950. - 428 с.

[2] Бухштабер В.М., Панов Т.Е. *Торические действия в топологии и комбинаторике.* М.: МЦНМО, 2004.

[3] Гюнтер М. Циглер. *Теория многогранников.* М.: МЦНМО, 2014. - 568 с.

[4] Grunbaum B. *Convex polytopes.* // Interscience, London 1967 / revised edition Eds. V. Kaibel, V.Rlee, G.M.Ziegler.

[5] Masuda M., Panov. T. E. *Semifree circle actions, Bott towers, and quasitoric manifolds.* // Sbornik Mathematics, 199 (2008), no.7-8, 1201-1223.