Эквивариантные когомологии момент-угол комплексов

Зейникешева Индира

23 июня 2018 г.

1. Основные понятия

Пусть $\mathcal{K}$ - симплициальный комплекс на множестве $[m] = \{1, \ldots, m\}$. Для каждого симплекса $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \in K$, определим множество

$$(D^2, S^1)^I = \{(x_1, \ldots, x_m) \in (D^2)^m : x_i \in S^1 \text{,когда}\, i \notin I\}. \tag{1}$$

Момент-угол комплекс — это полиэдральное произведение

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in K} (D^2, S^1)^I \subset (D^2)^m. \tag{2}$$

Кольцом Стенли-Райснера симплициального комплекса $\mathcal{K}$ назовем факторкольцо полиномиальной алгебры $\mathbb{Z}[\upsilon_1, \ldots, \upsilon_m]$ по мономиальному идеалу, порожденному несимплексами в $\mathcal{K}$. Положим $deg\, \upsilon_i = 2$. Кольцо когомологий момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ описывается следующим образом.

Теорема 1.1. ([1, §4.5]) *Следующие градуированные коммутативные алгебры изоморфны:*

$$H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong Tor_{\mathbb{Z}[\upsilon_1, \ldots, \upsilon_m]}(\mathbb{Z}[K], \mathbb{Z}) \cong H(\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d) \cong \bigoplus_{I \subset [m]} \widetilde{H}^*(\mathcal{K}_I) \tag{3}$$

Здесь, третья алгебра - это когомологии дифференциальной биградуированной алгебры с $deg\, u_i = 1, deg\, \upsilon_i = 2, du_i = \upsilon_i, d\upsilon_i = 0$.
На момент-угол комплексе действует m-ный тор T^m, посчитаем кольцо эквивариантных когомологий $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ для симплициального комплекса $\mathcal{K}$, который будет планарным графом. Согласно следующей лемме, имеем изоморфизм:

Лемма 1.2. *([2])*

$$H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong Tor_{\mathbb{Z}[\upsilon_1, \ldots, \upsilon_m]}(\mathbb{Z}[K], \mathbb{Z}[\upsilon_i]) \cong H(\Lambda[u_1, \ldots, \hat{u}_i, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d), \tag{4}$$

где $du_j = \upsilon_j, d\upsilon_j = 0$.

Задача данной курсовой работы состоит в том, чтобы частично ответить на вопрос, когда кольцо когомологий $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ для $\forall\, i$ свободно над $\mathbb{Z}[\upsilon_i]$.

2. Эквивариантные когомологии некоторых момент-угол комплексов

Рассмотрим в качестве симплициального комплекса K планарный граф, и таким образом, ответим на вопрос в размерности один. Основной результат данной работы следующий:

Теорема 2.1. *Пусть $\mathcal{K}$ планарный простой граф. Тогда следующие условия эквивалентны: 1) $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — свободный модуль над $\mathbb{Z}[v_i]$ для i. 2) $\mathcal{K}$ — один из следующих комплексов: Δ^2, $\partial\Delta^1 * \partial\Delta^1$, $\partial\Delta^1$, Δ^1, $\partial\Delta^1 * \Delta^0$, Δ^0.*

Доказательство: Рассмотрим два случая:

1) Пусть в нашем графе $\mathcal{K}$ нет циклов, тогда надо рассмотреть еще две возможности: связный граф и несвязный. Тогда покажем, что кольцо $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ свободно над $\mathbb{Z}[v_i]$ для i только для таких комплексов: $\partial\Delta^1$, Δ^1, $\partial\Delta^1 * \Delta^0$, Δ^0.
2) Пусть в нашем графе есть циклы, тогда кольцо когомологий будет свободным $\mathbb{Z}[v_i]$-модулем только для комплексов: Δ^2 и $\partial\Delta^1 * \partial\Delta^1$.

Случай 1.1. $\mathcal{K}$ — связный граф без циклов. Если в нем не больше двух вершин, тогда $\mathcal{K}$ либо Δ^0, либо Δ^1. И в том, и в другом случае $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — свободный $\mathbb{Z}[v_i]$-модуль, т.к. для $\mathcal{K} = \Delta^l$ кольцо эквивариантных когомологий $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathbb{Z}[v_i]$, который свободен над $H^*_{S^1_i}(pt) = \mathbb{Z}[v_i]$.
Пусть в $\mathcal{K}$ больше двух вершин, тогда есть как минимум полный подграф, равный $\partial\Delta^1 * \Delta^0$. Если граф состоит из трех вершин, т.е. в точности $\partial\Delta^1 * \Delta^0$, то $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — свободный модуль над $\mathbb{Z}[v_i]$. Достаточно проверить, для $i = 1$, $i = 2$ в силу симметричности относительно переименования вершин комплекса.
$H^*_{S^1_1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = H(\Lambda[u_2, u_3] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d)$, где $\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, v_2, v_3]/v_1v_3$. Заметим, что $H^2_{S^1_1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathbb{Z}\langle[v_1]\rangle$, $H^2_{S^1_1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathbb{Z}\langle[u_3v_1]\rangle$, а все старшие степени выражаются через них домножением на v_1, т.е. в качестве базиса можно выбрать коциклы $[v_1], [u_3v_1]$.
При $i = 2$ имеем: $H^2_{S^1_2}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathbb{Z}\langle[v_2]\rangle$, $H^2_{S^1_1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathbb{Z}\langle[u_1v_3]\rangle$, базисные коциклы — $[v_2], [u_1v_3]$.
Пусть теперь в $\mathcal{K}$ больше трех вершин. Будем пользоваться следующим утверждением:

Утверждение 2.2. *Если $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — свободный $\mathbb{Z}[v_i]$-модуль, то $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'})$ будет свободным модулем для любого полного подкомплекса $\mathcal{K}'$ в $\mathcal{K}$.*

Рассмотрим в $\mathcal{K}$ полный подграф на четырех вершинах, четвертая вершина может быть соединена ребром с любой из трех вершин в $\partial\Delta^1 * \Delta^0$, достаточно рассмотреть два случая: вершина 4 соединена с вершиной 3 и вершина 4 соединена с вершиной 2. Покажем, что в обоих случаях найдется элемент кручения, а значит, модуль будет несвободным. Рассмотрим $H^*_{S^1_1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = H(\Lambda[u_2, u_3, u_4] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d)$, где $\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, v_2, v_3, v_4]/v_1v_3, v_2v_4, v_1v_4$. Тогда коцикл u_2v_4 в $H^3_{S^1_1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ есть элемент

$\mathbb{Z}[v_1]$-кручения, т.к. $v_1 \cdot \mathrm{u}_2 v_4 = \mathrm{u}_2(v_1 v_4) = 0$, поскольку $v_1 v_4 = 0$ в $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$. В случае, когда вершина 4 соединена с вершиной 2, в кольце $H^*_{S^1_4}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = H(\Lambda[u_1, u_2, u_3] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d)$, где $\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, v_2, v_3, v_4]/v_1 v_3, v_3 v_4, v_1 v_4$ есть следующий элемент кручения — $u_1 v_3 \in \mathrm{H}^3_{S^1_4}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, так как $v_4 \cdot u_1 v_3 = u_1 \cdot v_4 v_3 = 0$.
Значит, в связном графе без циклов из более, чем трех вершин, рассматриваем кольцо эквивариантных когомологий $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ для подкомплекса из четырех вершин, которое оказывается несвободным $\mathbb{Z}[v_i]$-модулем, что не может быть в силу утверждения 2.2., если бы кольцо $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ было свободным.

Случай 1.2. Пусть $\mathcal{K}$ — несвязный граф без циклов.
Пусть в нем не больше двух вершин, тогда $\mathcal{K}$ либо Δ^0, либо $\partial\Delta^1$. Рассмотрим $\mathcal{K} = \partial\Delta^1$, тогда $H^*_{S^1_1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = H(\Lambda[u_2] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d)$, с $\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, v_2]/v_1 v_2$ будет свободным $\mathbb{Z}[v_i]$-модулем. Действительно, $H^2_{S^1_1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathbb{Z}\langle [v_1] \rangle$, $H^3_{S^1_1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathbb{Z}\langle [u_2 v_1] \rangle$, в старших когомологиях коциклы получаются из $[v_1], [u_2 v_1]$ домножением на v_1, тоже самое будет для $i = 2$.
Теперь несвязный граф без циклов $\mathcal{K}$ состоит из более, чем двух вершин. Представим $\mathcal{K}$ в виде объединения связных компонент: $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_s$.
а) Если среди $\mathcal{K}_i$ есть связный подграф с количеством вершин, большим трех, то рассматриваем кольцо $H^*_{S^1_j}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_i})$, которое по разобранному выше случаю 1.1. является не свободным $\mathbb{Z}[v_j]$-модулем.
б) Теперь среди $\mathcal{K}_i$ нет подкомплексов с количеством вершин, большим трех, пусть максимально возможная связная компонента состоит из не более, чем трех вершин. Если все $\mathcal{K}_i$ — точки, тогда комплекс $\mathcal{K}$ есть объединение m точек, в котором есть полный подкомплекс, состоящий из трех точек. Для $\mathcal{K}' = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ кольцо $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'})$ является несвободным, т.к. коцикл $u_1 v_2$ в $H^3_{S^1_3}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'})$ есть элемент кручения: $v_3 \cdot u_1 v_2 = u_1(v_3 v_2) = 0$.
Значит, пусть теперь среди $\mathcal{K}_i$ существует хотя бы одна компонента из двух и более точек. Если к тому же есть $\mathcal{K}_j = pt$, то по следующей лемме $H^*_{S^1_j}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_i})$ будет несвободным модулем.

Лемма 2.3. *Если $\mathcal{K} = \mathcal{K}' \cup pt$, где $\mathcal{K}'$ — связная компонента из двух и более вершин, то $H^*_{S^1_j}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ не является свободным $\mathbb{Z}[v_i]$-модулем.*

Доказательство леммы. Действительно, соответствующее кольцо Стенли-Райснера имеет вид $\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]/v_i v_m$, где $i = 1, \ldots, m$. Рассмотрим коцикл $[u_j v_m] \in H^3_{S^1_i}(\mathbb{Z}_\mathcal{K})$, тогда $v_i \cdot u_j v_m = u_j v_i v_m = 0$, чего не может быть в свободном модуле. $\square$

Пусть теперь нет изолированных точек, и максимальная связная компонента состоит из не более, чем трех точек. Тогда в $\mathcal{K}$ есть полный подграф вида $\mathcal{K}' = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, где $\mathcal{K}_i = \Delta^1$ либо $\partial\Delta^1 * \Delta^0$. Нумерацию вершин начнем с $\mathcal{K}_1$, т.е. первые две его вершины под номером 1 и 2. Тогда для $H^*_{S^1_1}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'})$ найдется коцикл $[u_2 v_j]$, такой что $v_1 \cdot u_2 v_i = 0$, так как существует такой i, что $v_1 v_i = 0$ в кольце

$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, v_2, v_w]/v_1v_q, v_2v_q$, где $w, q = \{3, \ldots, 5\}$, либо $\{3, \ldots, 6\}$, либо $\{3, 4\}$. Итого, несвязный лес с количеством вершин более, чем две, разобран полностью. Значит, для графа без циклов утверждение верное. Осталось рассмотреть графы с циклами.

Случай 2. Если $\mathcal{K}$ — это 3-цикл или 4-цикл, т.е. $\Delta^2, \partial\Delta^1 * \partial\Delta^1$, то $H^*_{S^1_j}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ является свободным $\mathbb{Z}[v_i]$-модулем [2, Ex.2.3]. Иначе, предъявим явно элементы $\mathbb{Z}[v_i]$-кручения, которых не может быть в свободном модуле.
Допустим, в графе минимальный бесхордовый цикл — это цикл длины 5, тогда кольцо эквивариантных когомологий будет несвободным модулем над $\mathbb{Z}[v_i]$. [2, Ex.2.3]
Пусть теперь в графе есть бесхордовые циклы длины 3 или 4, рассматриваем полный подкомплекс на соответственно четыре и пять вершин.
2.1. Пусть есть 3-цикл, рассматриваем полный подкомплекс на четырех вершинах, всего возможны 4 случая: а) вершина под номером 4 не соединена ребром с 3-циклом, но тогда модуль оказывается несвободным по Лемме 2.3..
б) 4-ая вершина соединена только с одной вершиной 3-цикла, пусть со 2-ой, а вершины 3-цикла занумерованы 1, 2 и 3, тогда предъявим элемент кручения. $\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_4]/v_1v_4, v_3v_4, v_1v_2v_3$. Есть коцикл $[u_2v_1v_3]$ размерности 5, который есть элемент кручения в $H^*_{S^1_4}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, т.к. $v_4v_1 = 0$.
в) 4-ая вершина соединена с двумя вершинами из 3-цикла: с вершинами 2 и 3. Снова найдется элемент кручения: $u_4v_2v_3$ в $H^5_{S^1_1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$.
г) 4-ая вершина соединена со всеми вершинами 3-цикла. Например, элемент кручения $u_1v_2v_3$ в $H^5_{S^1_4}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$.
2.2. Пусть есть 4-цикл, тогда рассматриваем полный подкомплекс на пяти вершинах:
а) 5-ая вершина изолированна от 4-цикла — см. Лемма 2.3.
б) вершина под номером 5 соединена только с одной вершиной, без ограничения общности, пусть соединена с вершиной под номером 4.
Тогда $\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_5]/v_1v_3, v_1v_5, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_5$ В $H^3_{S^1_5}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ будет элемент кручения: $v_5 \cdot u_3v_1 = u_3v_5v_1 = 0$.
в) 5-ая вершина соединена с вершинами 3 и 4.
В данном случае, $\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_5]/v_1v_5, v_2v_5, v_1v_3, v_2v_4, v_3v_4v_5$. В $H^3_{S^1_5}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ соответствующий элемент кручения: u_2v_4, т.к. $v_2v_5 = 0$ в $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$.
г) 5-ая вершина соединена с вершинами 2, 3 и 4. Кольцо граней комплекса следующего вида: $\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_5]/v_1v_5, v_2v_4, v_1v_3, v_2v_3v_5, v_3v_4v_5$. В $H^5_{S^1_2}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ соответствующий элемент кручения: $u_4v_3v_5$, т.к. $v_2 \cdot u_4v_3v_5 = u_4v_2v_3v_5 = 0$.
д) 5-ая вершина соединена со всеми вершинами 4-цикла. Кольцо граней имеет вид: $\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_5]/v_1v_3, v_2v_4, v_1v_2v_5, v_2v_3v_5, v_3v_4v_5, v_1v_4v_5$. Тогда в $H^5_{S^1_1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ найдется элемент кручения: $v_1 \cdot u_4v_3v_5 = u_4v_1v_3v_5 = 0$.
Случай 2 разобран полностью. Итого, когда $\mathcal{K}$ — планарный простой граф, кольцо эквивариантных когомологий $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ является $\mathbb{Z}[v_i]$-модулем только для тех комплексов, которые указаны в утверждении теоремы. $\square$
Следующей задачей является выявить критерий, для какого $\mathcal{K}$ модуль $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$

является свободным. Гипотеза в том, что $\mathcal{K}$ должен быть джойном симплекса и границ симплексов: $\partial\Delta^{k_1} * \cdots * \partial\Delta^{k_p} * \Delta^l, l \geq -1, k_i \geq 0$. В данной работе показано, что гипотеза верна для одномерного комплекса $\mathcal{K}$.

Список литературы

[1] Victor M. Buchstaber, Taras E. Panov. *Topic Topology*, Math. Surv. and Monogr., vol. 204, Amer. Math. Soc., Providence, Rl, 2015.

[2] Mikiya Masuda, Taras Panov. *Cohomological rigidity of moment-angle manifolds*