МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет
Кафедра высшей геометрии и топологии

Выпускная квалификационная работа

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОЛЕЦ ЭКВИВАРИАНТНЫХ КОГОМОЛОГИЙ МОМЕНТ-УГОЛ КОМПЛЕКСОВ.

Выполнила: Зейникешева И.К.

Научный руководитель: профессор Панов Т.Е.

Москва
2019

Содержание

1. Введение

В статье [2] изучался вопрос о когомологической жесткости семейства момент-угол многообразий $\mathcal{Z}_P$. Семейство момент-угол многообразий называется когомологически жестким, если многообразия из семейства различаются с точностью до диффеоморфизма их кольцами когомологий. Была рассмотрен вопрос о когомологической жесткости [2, Th. 2.1] для момент-угол многообразий, соответствующих произведению симплексов. Далее, возьмем кольцо эквивариантных когомологий $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, соответствующее действию i-ой координатной окружности $S^1_i \subset T^m$ на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$. Оказалось, что $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ может быть несвободным модулем над $H^*(BS^1_m) = \mathbb{Z}[\upsilon_m]$. Условие того, что $H^*(BS^1_m)$–модуль $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ свободный влечет следующее: вложение слоя в $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \to ES^1_m \times_{S^1_m} \mathcal{Z}_\mathcal{K} \to BS^1_m$ индуцирует эпиморфизм $H^*(ES^1_m \times_{S^1_m} \mathcal{Z}_\mathcal{K}) \to H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$.
В связи с этим возникает вопрос: когда $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ является свободным $\mathbb{Z}[\upsilon_i]$–модулем для любого i. В данной работе было доказано достаточное условие на симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ и получен критерий для одномерных и флаговых комплексов.

2. Основные понятия

Пусть $\mathcal{K}$ — *симплициальный комплекс* на множестве $[m] = \{1, \ldots, m\}$. *Недостающей гранью* комплекса $\mathcal{K}$ называется подмножество ω в $[m]$ такое, что $\omega \notin \mathcal{K}$, но любое собственное подмножество в ω является симплексом в $\mathcal{K}$. Множество недостающих граней комплекса $\mathcal{K}$ обозначим: $MF(\mathcal{K})$.
Для каждого симплекса $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \in \mathcal{K}$, определим множество

$$(D^2, S^1)^I = \{(x_1, \ldots, x_m) \in (D^2)^m : x_i \in S^1 \text{ , если } i \notin I\}. \qquad (2.1)$$

Момент-угол комплекс — это полиэдральное произведение

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} := (D^2, S^1)^\mathcal{K} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (D^2, S^1)^I \subset (D^2)^m. \qquad (2.2)$$

Кольцом Стенли-Райснера (кольцом граней) симплициального комплекса $\mathcal{K}$ назовем факторкольцо полиномиальной алгебры $\mathbb{Z}[\upsilon_1, \ldots, \upsilon_m]$ по мономиальному идеалу, порожденному несимплексами в $\mathcal{K}$:

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] := \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m] / \big(v_{i_1} \cdots v_{i_k} = 0 \quad \text{при } \{i_1, \ldots, i_k\} \notin \mathcal{K}\big)$$

где $\deg v_i = 2$.

Кольцо когомологий момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ описывается следующим образом (далее рассматриваем целочисленные когомологии).

Теорема 2.1 ([1, §4.5]). *Следующие градуированные коммутативные алгебры изоморфны:*

$$\begin{aligned} H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) &\cong \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}\big(\mathbb{Z}[\mathcal{K}],\mathbb{Z}\big) \\ &\cong H\big(\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[\mathcal{K}],d\big) \\ &\cong \bigoplus_{I\subset[m]} \widetilde{H}^*(\mathcal{K}_I). \end{aligned}$$

Здесь, во второй строке — когомологии дифференциальной биградуированной алгебры с $deg\, u_i = 1$, $deg\, v_i = 2$ и $du_i = v_i$, $dv_i = 0$.
В третьей строке $\widetilde{H}^*(\mathcal{K}_I)$ обозначает приведенные симплициальные когомологии полного подкомплекса $\mathcal{K}_I \subset \mathcal{K}$ (ограничение $\mathcal{K}$ на $I \subset [m]$).
Последний изоморфизм — это сумма изоморфизмов:

$$H^p(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong \sum_{I\subset[m]} \widetilde{H}^{p-|I|-1}(\mathcal{K}_I),$$

и структура кольца задается отображениями:

$$H^{p-|I|-1}(\mathcal{K}_I)\otimes H^{q-|I|-1}(\mathcal{K}_J)\to H^{p+q-|I|-|J|-1}(\mathcal{K}_{I\cup J})$$

которые индуцируются каноническими симплициальными отображениями $\mathcal{K}_{I\cup J}\to\mathcal{K}_I * \mathcal{K}_J$ для $I\cap J=\varnothing$ и нуль иначе.

2.1. Эквивариантные когомологии

Определение 2.2. Действием (левым) группы G на пространстве X называется отображение $G\times X\to X$: $(g,x)\mapsto gx$, такое что $ex = x$ и $g(hx) = (gh)x$.
Пространство X с действием группы G будем называть *G–пространством.*
Аналогично определяются правое действие и правое G–пространство.
Действие называется *свободным*, если для любых различных $g, h \in G$ и любого $x \in X$ выполняется $gx \neq hx$.

Определение 2.3. *Главным G–расслоением* называется расслоение $p : X \to B$ со слоем G, на котором группа G действует правыми сдвигами (т.е. элемент $g \in G$ переводит точку g' слоя в точку $g'g$). Для любого главного G–расслоения $p : X \to B$ существует каноническое свободное левое G–действие на X, накрывающее тривиальное действие на B.

Отображение $p : X \to B$ индуцирует гомеоморфизм $X/G \cong B$ и потому может рассматриваться как проекция на пространство орбит, ассоциированное с данным G–действием. Если группа G компактна, то для достаточно хороших G–пространств верно и обратное, т.е. если G свободно действует на X, то X есть тотальное пространство некоторого главного G–расслоения.

Конструкция 2.4. Пусть G — компактная группа Ли. Тогда существует главное G–расслоение $EG \to BG$, на котором G действует свободно, и тотальное пространство EG которого стягиваемо. Это расслоение обладает следующим свойством универсальности.
Пусть $E \to B$ — другое главное G–расслоение. Тогда существует единственное с точностью до гомотопии отображение $f : B \to BG$ такое, что расслоение $E \to B$ индуцируется из расслоения $EG \to BG$ при помощи отображения f.
Пространство EG называется *универсальным G–пространством*, а пространство BG — *классифицирующим пространством* для свободных G–действий.

Конструкция 2.5. Группа G свободно действует (в силу свободности действия на EG) на произведении $EG \times X$ следующим образом:

$$g(e, x) = (eg^{-1}, gx),\ g \in G,\ e \in EG,\ x \in X$$

Пространство орбит этого действия называется *гомотопическим пространством орбит (конструкцией Бореля)*, обозначение: $EG \times_G X$.

Определение 2.6. *Эквивариантные когомологии* пространства X (с коэффициентами в кольце k) определяются как

$$H^*_G(X; k) := H^*(EG \times_G X; k).$$

Рассмотрим действие m–мерного тора T^m на момент-угол комплексе, получим кольцо эквивариантных когомологий $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, где S^1_i — i-ая координатная окружность.
Для группы S^1 главным S^1–расслоением является проекция
$p : S^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$, и с точностью до гомотопической эквивалентности $\mathbb{C}P^\infty$ является классифицирующим пространством BS^1 для окружности. Тогда

$$H^*_{S^1}(pt; \mathbb{Z}) = H^*(ES^1 \times_{S^1} pt; \mathbb{Z}) = H^*(BS^1; \mathbb{Z}) = H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[v],$$

где $deg\, v = 2$.
Постоянное отображение $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \to pt$ индуцирует гомоморфизм колец

$H^*(pt) \to H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, что наделяет $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ структурой модуля над кольцом $H^*(pt)$. Таким образом, при действии окружности в эквивариантных когомологиях кольцом коэффициентов будет кольцо полиномов с порождающим степени два.

Эквивариантные когомологии момент-угол комплекса считаются следующим образом:

Лемма 2.7 ([2]). *Имеем изоморфизм колец*

$$\begin{aligned} H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) &\cong \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}\big(\mathbb{Z}[\mathcal{K}], \mathbb{Z}[v_i]\big) \\ &\cong H\big(\Lambda[u_1,\dots,\widehat{u_i},\dots,u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d\big), \end{aligned}$$

где $du_j = v_j, dv_j = 0$, и во внешней алгебре u_i пропущена.

Доказательство. Положим $i = m$ и рассмотрим спектральную последовательность Эйленберга-Мура [3, Гл.7] коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} ES^1_m \times_{S^1_m} \mathcal{Z}_\mathcal{K} \arrow[r] \arrow[d] & ET^m \times_{T^m} \mathcal{Z}_\mathcal{K} \arrow[d] \\ BS^1_m \arrow[r, hook] & BT^m \end{tikzcd}$$

Имеем гомотопическую эквивалентность $BT^\mathcal{K} \xrightarrow{\simeq} ET^m \times_{T^m} \mathcal{Z}_\mathcal{K}$, которая естественна по $\mathcal{K}$ (см.[1, Theorem 4.3.2]), поэтому

$$H^*_{T^m}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = H^*(ET^m \times_{T^m} \mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}[\mathcal{K}].$$

В спектральной последовательности имеем

$$E_2 = \mathrm{Tor}_{H^*(BT^m)}\big(H^*(BT^\mathcal{K}), H^*(BS^1_m)\big) = \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}\big(\mathbb{Z}[\mathcal{K}], \mathbb{Z}[v_m]\big),$$

и она сходится к

$$H^*_{S^1_m}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathrm{Tor}_{C^*(BT^m)}\big(C^*(BT^\mathcal{K}), C^*(BS^1_m)\big),$$

где C^* означает нормализованный коцепной сингулярный функтор. Как в [4], имеем гомотопически коммутативную диаграмму сильно гомотопических мультипликативных отображений

$$\begin{array}{ccccccc} H^*(BS^1_m) & \longleftarrow & H^*(BT^m) & \longrightarrow & \lim_{I\in\mathcal{K}} H^*(BT^I) & = \mathbb{Z}[\mathcal{K}] = H^*(BT^\mathcal{K}) \\ \downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & \\ C^*(BS^1_m) & \longleftarrow & C^*(BT^m) & \longrightarrow & \lim_{I\in\mathcal{K}} C^*(BT^I) & \\ \| & & \| & & \uparrow & \\ C^*(BS^1_m) & \longleftarrow & C^*(BT^m) & \longrightarrow & C^*(\mathrm{colim}_{I\in\mathcal{K}} BT^I) & = C^*(BT^\mathcal{K}) \end{array}$$

Из этого следует, что:

$$\mathrm{Tor}_{C^*(BT^m)}\big(C^*(BT^{\mathcal{K}}), C^*(BS^1_m)\big) \cong \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}\big(\mathbb{Z}[\mathcal{K}], \mathbb{Z}[v_m]\big),$$

в силу расширенной функториальности Tor. Поэтому спектральная последовательность Эйленберга–Мура выше сходится, и мы получаем нужные изоморфизмы

$$\begin{aligned} H^*_{S^1_m}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) &= \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}\big(\mathbb{Z}[\mathcal{K}], \mathbb{Z}[v_m]\big) \\ &= H\big(\Lambda[u_1,\dots,u_{m-1}] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d\big). \end{aligned}$$

□

3. Постановка проблемы

Рассмотрим кольцо эквивариантных когомологий $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$. Поставим следующий вопрос: при каких условиях $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ является свободным модулем над $H^*_{S^1_i}(pt) = \mathbb{Z}[v_i]$ для любого i? В данной работе попытаемся максимально на него ответить.

Лемма 3.1. *Для симплициального комплекса $\mathcal{K}$ следующего вида:*

$$\partial\Delta^{k_1} * \dots * \partial\Delta^{k_p} * \Delta^l, \quad l \geq -1, k_i \geq 0$$

кольцо $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ является свободным модулем над $\mathbb{Z}[v_i]$ для любого i.

Доказательство: Сначала покажем, что если симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ является джойном нескольких комплексов, то вопрос о свободности модуля кольца эквивариантных когомологий можно ограничить на сомножители, а именно:

Предложение 3.2. *Пусть симплициальный комплекс $\mathcal{K} = \mathcal{K}' * \mathcal{K}''$. Тогда если кольца $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'})$, $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}''})$ являются свободными модулями над $\mathbb{Z}[v_i]$, то и $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ будет свободным $\mathbb{Z}[v_i]$–модулем для данного i.*

Доказательство: Если $\mathcal{K} = \mathcal{K}' * \mathcal{K}''$, то момент–угол комплекс будет вида $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \mathcal{Z}_{\mathcal{K}'} \times \mathcal{Z}_{\mathcal{K}''}$. Пусть вершина $i \in K'$. Тогда справедливо следующее:

$$\begin{aligned} H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'} \times \mathcal{Z}_{\mathcal{K}''}) = H^*(ES^1_i \times_{S^1_i} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}'} \times \mathcal{Z}_{\mathcal{K}''}) = \\ = H^*(ES^1_i \times_{S^1_i} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}'}) \otimes H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}''}) = H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'}) \otimes H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}''}). \end{aligned}$$

Предпоследнее равенство справедливо по формуле Кюннета, т.к.
$H^*(ES^1_i \times_{S^1_i} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}'}) = H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'})$ по условию является свободным $\mathbb{Z}[\upsilon_i]$–модулем, а значит, и свободным $\mathbb{Z}$–модулем.
А значит, свободность $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ как $\mathbb{Z}[\upsilon_i]$–модуля будет определяться свободностью $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'})$, т.к. вершина i принадлежит комплексу K'. $\Box$

Вернемся к доказательству леммы.
В случае, $\mathcal{K} = \partial\Delta^{k_1} * \cdots * \partial\Delta^{k_p} * \Delta^l, l \geq -1, k_i \geq 0$ достаточно рассмотреть кольца когомологий для следующих комплексов: $\mathcal{K} = \partial\Delta^{k_i}$ и $\mathcal{K} = \Delta^l$.
Пусть $\mathcal{K} = \partial\Delta^n$, тогда покажем, что $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ будет свободным $\mathbb{Z}[\upsilon_i]$–модулем в силу кольца граней данного комплекса. Для границы симплекса кольцо граней будет:

$$\mathbb{Z}[\partial\Delta^n] = \mathbb{Z}[\upsilon_1, \ldots, \upsilon_{n+1}]/(\upsilon_1 \ldots \upsilon_{n+1}).$$

Положим $i = 1$, тогда $H^*_{S^1_1}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = H\big(\Lambda[u_2, \ldots, u_{n+1}] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d\big)$.
Получаем:

$$H^{2k+1}_{S^1_1}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = 0 \quad \text{для} \quad 1 \leq 2k+1 < 2n+1,$$

т.к. в кольце граней только одно соотношение, и в этих размерностях оно не появляется.
$H^2_{S^1_1}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \mathbb{Z}\left\langle[\upsilon_1]\right\rangle$, откуда получаем (т.к. вершина υ_1 пропущена), что $H^{2k}_{S^1_1}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \mathbb{Z}\left\langle[\upsilon_1^k]\right\rangle$.
Так как в кольце граней есть соотношение $\upsilon_1 \ldots \upsilon_{n+1} = 0$, то

$$H^{2n+1}_{S^1_1}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \mathbb{Z}\left\langle[u_2\upsilon_1\upsilon_3 \ldots \upsilon_{n+1}]\right\rangle.$$

Отсюда получаем в старших степенях:

$$H^{2n+2k-1}_{S^1_1}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \mathbb{Z}\left\langle[u_2\upsilon_1^k\upsilon_3 \ldots \upsilon_{n+1}]\right\rangle.$$

Таким образом, получили свободный $\mathbb{Z}[\upsilon_1]$–модуль (когомологии в старших степенях выражались через «базисные» домножением на υ_1).
Пусть теперь $\mathcal{K} = \Delta^n$. Кольцом граней данного комплекса будет кольцо многочленов:

$$\mathbb{Z}[\Delta^n] = \mathbb{Z}[\upsilon_1, \ldots, \upsilon_{n+1}].$$

Пусть $i = 1$, имеем $H^*_{S^1_1}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = H\big(\Lambda[u_2, \ldots, u_{n+1}] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d\big)$.
Получаем следующие когомологии:

$$H^2_{S^1_1}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \mathbb{Z}\left\langle[\upsilon_1]\right\rangle, H^{2k}_{S^1_1}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \mathbb{Z}\left\langle[\upsilon_1^k]\right\rangle$$

и нуль в нечетных степенях.
Видно, что кольцо таких когомологий является свободным $\mathbb{Z}[v_1]$–модулем. Значит, по предыдущему предложению имеем: для джойна границ симплексов и симплекса соответствующее кольцо когомологий является свободным $\mathbb{Z}[v_1]$–модулем. $\square$

В случае одномерного симплициального комплекса условие выше становится критерием свободности модуля эквивариантных когомологий:

Теорема 3.3. *Пусть $\mathcal{K}$ — планарный простой граф. Тогда следующие условия эквивалентны:*
1) $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — свободный модуль над $\mathbb{Z}[v_i]$ для любого i.
2) $\mathcal{K}$ — один из следующих комплексов: $\partial\Delta^2$, $\partial\Delta^1 * \partial\Delta^1$, $\partial\Delta^1$, Δ^1, $\partial\Delta^1 * \Delta^0$, Δ^0.

Доказательство. Рассмотрим два случая:
1) Пусть в нашем графе $\mathcal{K}$ нет циклов, тогда надо рассмотреть еще две возможности: связный граф и несвязный. Тогда покажем, что кольцо $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ свободно над $\mathbb{Z}[v_i]$ для i только для таких комплексов: $\partial\Delta^1$, Δ^1, $\partial\Delta^1 * \Delta^0$, Δ^0.
2) Пусть в нашем графе есть циклы, тогда кольцо когомологий будет свободным $\mathbb{Z}[v_i]$-модулем только для комплексов: Δ^2 и $\partial\Delta^1 * \partial\Delta^1$.

Случай 1.1. $\mathcal{K}$ — связный граф без циклов. Если в нем не больше двух вершин, тогда $\mathcal{K}$ либо Δ^0, либо Δ^1. И в том, и в другом случае $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — свободный $\mathbb{Z}[v_i]$-модуль, т.к. для $\mathcal{K} = \Delta^l$ кольцо эквивариантных когомологий $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathbb{Z}[v_i]$, который свободен над $H^*_{S^1_i}(pt) = \mathbb{Z}[v_i]$.
Пусть в $\mathcal{K}$ больше двух вершин, тогда есть как минимум полный подграф, равный $\partial\Delta^1 * \Delta^0$. Если граф состоит из трех вершин, т.е. в точности $\partial\Delta^1 * \Delta^0$, то $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — свободный модуль над $\mathbb{Z}[v_i]$. Достаточно проверить, для $i = 1$, $i = 2$ в силу симметричности относительно переименования вершин комплекса.
$H^*_{S^1_1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = H(\Lambda[u_2, u_3] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d)$, где $\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, v_2, v_3]/v_1v_3$. Заметим, что $H^2_{S^1_1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathbb{Z}\langle[v_1]\rangle$, $H^2_{S^1_1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathbb{Z}\langle[u_3v_1]\rangle$, а все старшие степени выражаются через них домножением на v_1, т.е. в качестве базиса можно выбрать коциклы $[v_1], [u_3v_1]$.
При $i = 2$ имеем: $H^2_{S^1_2}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathbb{Z}\langle[v_2]\rangle$, $H^2_{S^1_1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathbb{Z}\langle[u_1v_3]\rangle$, базисные коциклы — $[v_2], [u_1v_3]$.
Пусть теперь в $\mathcal{K}$ больше трех вершин. Будем пользоваться следующим очевидным свойством:

Утверждение 3.4. *Если $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — свободный $\mathbb{Z}[\upsilon_i]$-модуль, то $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'})$ будет свободным модулем для любого полного подкомплекса $\mathcal{K}'$ в $\mathcal{K}$.*

Рассмотрим в $\mathcal{K}$ полный подграф на четырех вершинах, четвертая вершина может быть соединена ребром с любой из трех вершин в $\partial\Delta^1 * \Delta^0$, достаточно рассмотреть два случая: вершина 4 соединена с вершиной 3 и вершина 4 соединена с вершиной 2. Покажем, что в обоих случаях найдется элемент кручения, а значит, модуль будет несвободным.
Рассмотрим $H^*_{S^1_1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = H(\Lambda[u_2, u_3, u_4] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d)$, где

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4]/\upsilon_1\upsilon_3, \upsilon_2\upsilon_4, \upsilon_1\upsilon_4.$$

Тогда коцикл $u_2\upsilon_4$ в $H^3_{S^1_1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ есть элемент $\mathbb{Z}[\upsilon_1]$-кручения, т.к. $\upsilon_1 \cdot \mathrm{u}_2\upsilon_4 = \mathrm{u}_2(\upsilon_1\upsilon_4) = 0$, поскольку $\upsilon_1\upsilon_4 = 0$ в $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$.
В случае, когда вершина 4 соединена с вершиной 2, в кольце $H^*_{S^1_4}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = H(\Lambda[u_1, u_2, u_3] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d)$, где

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4]/\upsilon_1\upsilon_3, \upsilon_3\upsilon_4, \upsilon_1\upsilon_4$$

есть следующий элемент кручения — $u_1\upsilon_3 \in \mathrm{H}^3_{S^1_4}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, так как $\upsilon_4 \cdot u_1\upsilon_3 = u_1 \cdot \upsilon_4\upsilon_3 = 0$.
Значит, в связном графе без циклов из более, чем трех вершин, рассматриваем кольцо эквивариантных когомологий $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ для подкомплекса из четырех вершин, которое оказывается несвободным $\mathbb{Z}[\upsilon_i]$-модулем, что не может быть в силу утверждения 3.4, если бы кольцо $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ было свободным.

Случай 1.2. Пусть $\mathcal{K}$ — несвязный граф без циклов.
Пусть в нем не больше двух вершин, тогда $\mathcal{K}$ либо Δ^0, либо $\partial\Delta^1$.
Рассмотрим $\mathcal{K} = \partial\Delta^1$, тогда $\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[\upsilon_1, \upsilon_2]/\upsilon_1\upsilon_2$.
Тогда $H^*_{S^1_1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = H(\Lambda[u_2] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d)$ будет свободным $\mathbb{Z}[\upsilon_i]$-модулем. Действительно, $H^2_{S^1_1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathbb{Z}\langle[\upsilon_1]\rangle$, $H^3_{S^1_1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathbb{Z}\langle[u_2\upsilon_1]\rangle$, в старших когомологиях коциклы получаются из $[\upsilon_1], [u_2\upsilon_1]$ домножением на υ_1, тоже самое будет для $i = 2$.
Пусть теперь несвязный граф без циклов $\mathcal{K}$ состоит из более, чем двух вершин. Представим $\mathcal{K}$ в виде объединения связных компонент:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_s.$$

а) Если среди $\mathcal{K}_i$ есть связный подграф с количеством вершин, большим трех, то рассматриваем кольцо $H^*_{S^1_j}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_i})$, которое по разобранному выше случаю 1.1. является не свободным $\mathbb{Z}[v_j]$-модулем.

б) Теперь среди $\mathcal{K}_i$ нет подкомплексов с количеством вершин, большим трех, пусть максимально возможная связная компонента состоит из не более, чем трех вершин.
Если все $\mathcal{K}_i$ — точки, тогда комплекс $\mathcal{K}$ есть объединение m точек, в котором есть полный подкомплекс, состоящий из трех точек. Для $\mathcal{K}' = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ кольцо $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'})$ является несвободным, т.к. коцикл u_1v_2 в $H^3_{S^1_3}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'})$ есть элемент кручения: $v_3 \cdot u_1v_2 = u_1(v_3v_2) = 0$.

Значит, пусть теперь среди $\mathcal{K}_i$ существует хотя бы одна компонента из двух и более точек. Если к тому же есть $\mathcal{K}_j = pt$, то по следующей лемме $H^*_{S^1_j}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_i})$ будет несвободным модулем.

Лемма 3.5. *Если $\mathcal{K} = \mathcal{K}' \cup pt$, где $\mathcal{K}'$ — связная компонента из двух и более вершин, то $H^*_{S^1_j}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ не является свободным $\mathbb{Z}[v_i]$-модулем.*

Доказательство леммы. Действительно, соответствующее кольцо Стенли-Райснера имеет вид $\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/v_iv_m$, где $i = 1, \dots, m$. Рассмотрим коцикл $[u_jv_m] \in H^3_{S^1_i}(\mathbb{Z}_{\mathcal{K}})$, тогда $v_i \cdot u_jv_m = u_jv_iv_m = 0$, чего не может быть в свободном модуле. □

Пусть теперь нет изолированных точек, и максимальная связная компонента состоит из не более, чем трех точек. Тогда в $\mathcal{K}$ есть полный подграф вида $\mathcal{K}' = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, где $\mathcal{K}_i = \Delta^1$ либо $\partial\Delta^1 * \Delta^0$. Нумерацию вершин начнем с $\mathcal{K}_1$, т.е. первые две его вершины под номером 1 и 2.
Тогда для $H^*_{S^1_1}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'})$ найдется коцикл $[u_2v_j]$, такой что $v_1 \cdot u_2v_i = 0$, так как существует такой i, что $v_1v_i = 0$ в кольце

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, v_2, v_w]/v_1v_q, v_2v_q,$$

где $w, q = \{3, \dots, 5\}$, либо $\{3, \dots, 6\}$, либо $\{3, 4\}$.
Итого, несвязный лес с количеством вершин более, чем две, разобран полностью. Значит, для графа без циклов утверждение верное. Осталось рассмотреть графы с циклами.

Случай 2. Если $\mathcal{K}$ — это 3-цикл или 4-цикл, т.е. $\Delta^2, \partial\Delta^1 * \partial\Delta^1$, то $H^*_{S^1_j}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ является свободным $\mathbb{Z}[v_i]$-модулем [2, Ex. 2.3].
Допустим, в графе минимальный бесхордовый цикл — это цикл длины 5, тогда кольцо эквивариантных когомологий будет несвободным модулем над $\mathbb{Z}[v_i]$. [2, Ex. 2.3]

Пусть теперь в графе есть бесхордовые циклы длины 3 или 4, рассматриваем полный подкомплекс на соответственно четырех и пяти вершинах.

2.1. Пусть есть 3-цикл, рассматриваем полный подкомплекс на четырех вершинах, всего возможны 4 случая:
а) вершина под номером 4 не соединена ребром с 3-циклом, но тогда модуль оказывается несвободным по Лемме 3.5.

б) 4-ая вершина соединена только с одной вершиной 3-цикла, пусть со 2-ой, а вершины 3-цикла занумерованы 1, 2 и 3, тогда предъявим элемент кручения.

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_4]/v_1v_4, v_3v_4, v_1v_2v_3.$$

Есть коцикл $[u_2v_1v_3]$ размерности 5, который есть элемент кручения в $H^*_{S^1_4}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$, т.к. $v_4v_1 = 0$.

в) 4-ая вершина соединена с двумя вершинами из 3-цикла: с вершинами 2 и 3. Снова найдется элемент кручения: $u_4v_2v_3$ в $H^5_{S^1_1}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$.

г) 4-ая вершина соединена со всеми вершинами 3-цикла. Например, элемент кручения $u_1v_2v_3$ в $H^5_{S^1_4}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$.

2.2. Пусть есть 4-цикл, тогда рассматриваем полный подкомплекс на пяти вершинах:
а) 5-ая вершина изолированна от 4-цикла — см. Лемма 3.5.

б) вершина под номером 5 соединена только с одной вершиной, без ограничения общности, пусть соединена с вершиной под номером 4.
Тогда
$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_5]/v_1v_3, v_1v_5, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_5.$$
В $H^3_{S^1_5}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ будет элемент кручения: $v_5 \cdot u_3v_1 = u_3v_5v_1 = 0$.

в) 5-ая вершина соединена с вершинами 3 и 4.
В данном случае,

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_5]/v_1v_5, v_2v_5, v_1v_3, v_2v_4, v_3v_4v_5.$$

В $H^3_{S^1_5}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ соответствующий элемент кручения: u_2v_4, т.к. $v_2v_5 = 0$ в $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$.

г) 5-ая вершина соединена с вершинами 2, 3 и 4. Кольцо граней комплекса будет следующего вида:

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_5]/v_1v_5, v_2v_4, v_1v_3, v_2v_3v_5, v_3v_4v_5.$$

В $H^5_{S^1_2}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ соответствующий элемент кручения: $u_4v_3v_5$, т.к. $v_2 \cdot u_4v_3v_5 = u_4v_2v_3v_5 = 0$.

д) 5-ая вершина соединена со всеми вершинами 4-цикла. Кольцо граней имеет вид:

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_5]/v_1v_3, v_2v_4, v_1v_2v_5, v_2v_3v_5, v_3v_4v_5, v_1v_4v_5.$$

Тогда в $H^5_{S^1_1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ найдется элемент кручения: $v_1 \cdot u_4v_3v_5 = u_4v_1v_3v_5 = 0$.

Случай 2 разобран полностью. Итого, когда $\mathcal{K}$ — планарный простой граф, кольцо эквивариантных когомологий $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ является $\mathbb{Z}[v_i]$-модулем только для тех комплексов, которые указаны в утверждении теоремы. □

Пример 3.6. Условие на симплициальный комплекс $\mathcal{K}$, показанное в лемме 3.1, не является необходимым для свободности модуля $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$. Например, пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на пяти вершинах с множеством недостающих граней $MF(\mathcal{K}) = \{I_1, I_2\}$, где $I_1 = (123), I_2 = (345)$. Тогда можно показать, что $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ является свободным модулем для любого i, хотя $\mathcal{K}$ — не джойн симплекса и границ симплексов.

4. Результаты

Рассмотрим теперь вопрос о несвободности модуля $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, и попытаемся из него выявить критерий.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс, в множестве недостающих граней $MF(\mathcal{K})$ которого найдутся такие I_k, I_l, что $I_k - I_l = \{i\}$, тогда $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — несвободный модуль над $\mathbb{Z}[v_i]$ для любого i.*

Доказательство: Примем для простоты: в $MF(\mathcal{K})$ для I_1, I_2 справедливо, что $I_1 - I_2 = \{i\}$. Покажем, что тогда в $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ найдется элемент кручения, откуда следует, что $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — несвободный модуль. Рассмотрим коцикл $u_sv_{I_1\setminus s} \in H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, где $s \neq i$, в таком случае он будет образовывать класс и в эквивариантных когомологиях. Покажем, что

$[u_s\upsilon_{I_1\setminus s}] \in H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ является элементом кручения. Действительно, в силу $I_1 - I_2 = \{i\}$, имеем

$$\upsilon_i[u_s\upsilon_{I_1\setminus s}] = [u_s\upsilon_i\upsilon_{I_1\setminus s}] = [u_s\upsilon_i\upsilon_{I_1\cap I_2}\upsilon_{I_1\setminus(s,I_1\cap I_2)}] = 0,$$

так как $\upsilon_i\upsilon_{I_1\cap I_2} = \upsilon_{I_1} = 0$. Получили, что $[u_s\upsilon_{I_1\setminus s}]$, где $s \neq i$, есть элемент кручения, что доказывает несвободность модуля $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$. $\square$

Отсюда получаем критерий для флаговых комплексов:

Теорема 4.2. *Пусть $\mathcal{K}$ — флаговый симплициальный комплекс. Тогда следующие условия эквивалентны:*
а) $\mathcal{K} = \partial\Delta^{k_1} * \cdots * \partial\Delta^{k_p} * \Delta^l, l \geq -1, k_i \geq 0$
б) $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — свободный модуль над $\mathbb{Z}[\upsilon_i]$) для любого i

Доказательство. Импликация а) $\Rightarrow$ б) следует из леммы 3.1.
Имликация б) $\Rightarrow$ а) следует из предыдущей леммы 4.1. Действительно, согласно предыдущей лемме, если $H^*_{S^1_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ — свободный модуль, то в множестве $MF(\mathcal{K})$ нет таких I_k, I_l, что $I_k - I_l = \{i\}$. Так как все $I_k, I_l \in MF(\mathcal{K})$ для флагового комплекса $\mathcal{K}$ состоят из двух вершин, это означает, что $I_k \cap I_l = \varnothing \quad \forall k, l$. А это эквивалентно тому, что $\mathcal{K} = \partial\Delta^{k_1} * \cdots * \partial\Delta^{k_p} * \Delta^l$. $\square$

Список литературы

[1] Victor Buchstaber, Taras Panov. *Toric Topology* Mathematical Surveys and Monographs, 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[2] Mikiya Masuda, Taras Panov. *Cohomological rigidity of moment-angle manifold.*

[3] John McCleary. *A User's Guide to Spectral Sequences.* Second edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 58. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[4] Taras Panov. *On the cohomology of quotients of moment-angle complexes.* Uspekhi Mat. Nauk **70** (2015), no. 4, 209–210 (Russian); Russian Math. Surveys **70** (2015), no. 4 (English translation).