Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

Когомологии колец граней симплициальных комплексов

Журавлева Елизавета
303 группа

Научный руководитель:
Панов Т. Е.

2016 г.

Введение

В этой курсовой работе описаны некоторые свойства Tor-модулей кольца граней симплициального комплекса: теорема Хохстера, связывающая эти Tor-модули с приведёнными симплициальными гомологиями полных подкомплексов исходного симплициального комплекса, и мультипликативная структура, возникающая в связи с этим.

1 Основные определения и конструкции

Будем обозначать символом $\mathbf{k}$ основное кольцо, которое всегда будет кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел или полем.

Рассматривая полиномиальную алгебру $\mathbf{k}[v_1, \ldots, v_m]$ и внешнюю алгебру $\Lambda[u_1, \ldots, u_m]$, будем считать, что эти алгебры стандартно градуированы: $\deg v_i = 2, \deg u_i = -1$, т. е. $\mathbf{k}[v_1, \ldots, v_m] = \bigoplus\limits_{i \geqslant 0} \mathbf{k}^{2i}[v_1, \ldots, v_m]$ и $\Lambda[u_1, \ldots, u_m] = \bigoplus\limits_{i \geqslant 0} \Lambda^i[u_1, \ldots, u_m]$, где $\Lambda^i[u_1, \ldots, u_m]$ - мономы длины i, $\mathbf{k}^{2i}[v_1, \ldots, v_m]$ - многочлены обычной степени i (в обоих случаях нулевая компонента - кольцо $\mathbf{k}$). Заметим, что при этой градуировке обычная коммутативнеость алгебры многочленов совпадает с градуированной коммутативностью.

Обозначим множество $\{1, \ldots, m\}$ через $[m]$, а алгебры $\mathbf{k}[v_1, \ldots, v_m]$ и $\Lambda[u_1, \ldots, u_m]$ через $\mathbf{k}[m]$ и $\Lambda[m]$ соответственно.

Для подмножества $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset [m]$ обозначим через v_I свободный от квадратов моном $v_{i_1} \ldots v_{i_k}$ в $\mathbf{k}[m]$. Аналогично в алгебре $\Lambda[m]$ символ u_I будет обозначать внешний моном $u_{i_1} \ldots u_{i_k}$ (для $i_1 < \ldots < i_k$).

Определение. **Кольцом граней** (или **кольцом Стенли-Райснера**) симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$ называется градуированное факторкольцо

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}] = \mathbf{k}[v_1, \ldots, v_m]/\mathcal{I}_{\mathcal{K}},$$

где $\mathcal{I}_{\mathcal{K}} = (v_I : I \notin \mathcal{K})$ - идеал, порождённый мономами v_I, для которых I не является симплексом комплекса $\mathcal{K}$. Этот идеал также называется **идеалом Стенли-Райснера** симплициального комплекса $\mathcal{K}$. Градуировка на $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ индуцируется из градуировки на $\mathbf{k}[m]$, так как идеал $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ порождён однородными элементами.

На $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ можно естественным образом ввести структуру $\mathbf{k}[m]$-модуля: умножение на элементы $\mathbf{k}[m]$ определяется как сквозное отображение

$$\mathbf{k}[m] \times \mathbf{k}[\mathcal{K}] \xrightarrow{\pi \times \mathrm{id}} \mathbf{k}[\mathcal{K}] \times \mathbf{k}[\mathcal{K}] \xrightarrow{\mu} \mathbf{k}[\mathcal{K}],$$

где π - естественная проекция $\mathbf{k}[m]$ на $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$, а μ - умножение в кольце $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$.

Аналогично определим структуру $\mathbf{k}[m]$-модуля на $\mathbf{k}$, введя умножение на многочлены как композицию

$$\mathbf{k}[m] \times \mathbf{k} \xrightarrow{\varepsilon \times \mathrm{id}} \mathbf{k} \times \mathbf{k} \xrightarrow{\mu} \mathbf{k},$$

где ε переводит многочлен в его свободный член, а μ - умножение в $\mathbf{k}$.

Напомним, что модуль P называется проективным, если для любых модулей M и N, эпиморфизма $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ и гомоморфизма $P \xrightarrow{g} N$ существует гомоморфизм $P \xrightarrow{h} M$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "h"] & \end{tikzcd}$$

Например, свободные модули заведомо проективны.

Точная последовательность модулей

$$\cdots \xrightarrow{\ d\ } R^{-i} \xrightarrow{\ d\ } \cdots \xrightarrow{\ d\ } R^{-1} \xrightarrow{\ d\ } R^{0} \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

в которой все модули R^{-i} - проективные (соответственно, свободные) называется проективной (соответственно, свободной) резольвентой для модуля M.

Мы будем рассматривать в основном градуированные $\mathbf{k}[m]$-модули и их резольвенты. В этом случае естественно требовать, чтобы R^{-i} также были градуированными $\mathbf{k}[m]$-модулями.

Кроме того, напомним, что если даны два градуированных модуля A и B и два отображения градуированных модулей $f\colon A \to A$ и $g\colon B \to B$ степеней k и l соответственно (т. е. $f(A^i) \subset A^{i+k}$, $g(B^i) \subset B^{i+l}$), то отображение $f \otimes g\colon A \otimes B \to A \otimes B$ на элементе $a \otimes b \in A^p \otimes B^q$ определяется как

$$(f \otimes g)(a \otimes b) = (-1)^{lp} f(a) \otimes g(b)$$

Конструкция: **Резольвента Кошуля**. Построим свободную резольвенту для $\mathbf{k}[m]$-модуля $\mathbf{k}$. Рассмотрим тензорное произведение $E = E_m = \Lambda[m] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[m]$. Положив

$$\operatorname{bideg}(u_i \otimes 1) = (-1, 2),\ \operatorname{bideg}(1 \otimes v_i) = (0, 2),$$
$$du_i = v_i,\ dv_i = 0$$

мы превратим E в биградуированную дифференциальную алгебру. При этом имеем: $E^{-i,2j} = \left\langle a \otimes b \mid a \in \Lambda^i[u_1, \ldots, u_m], b \in \mathbf{k}^{2(j-i)}[v_1, \ldots, v_m] \right\rangle_{\mathbf{k}}$, $E^{-i} = \bigoplus\limits_j E^{-i,2j} = \Lambda^i[u_1, \ldots, u_m] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[m]$ и $d\colon E^{-i,2j} \to E^{-i+1,2j}$.

Добавляя вышеопределённое отображение взятия свободного члена $\varepsilon\colon \mathbf{k}[m] \to \mathbf{k}$ мы получаем коцепной комплекс $\mathbf{k}[m]$-модулей:

$$0 \longrightarrow \Lambda^m[m] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[m] \xrightarrow{d} \Lambda^{m-1-1}[m] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[m] \xrightarrow{d} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{d} \Lambda^1[m] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[m] \xrightarrow{d} \mathbf{k}[m] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{k} \longrightarrow 0$$

Так как все $\Lambda^i[m]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[m]$ являются свободными $\mathbf{k}[m]$-модулями, то чтобы убедиться, что построенная последовательность является свободной резольвентой для $\mathbf{k}$, осталось доказать её точность. Легко видеть, что это равносильно тому, что коцепной комплекс (E,d)

$$0 \longrightarrow \Lambda^m[m]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[m] \xrightarrow{\ d\ } \cdots \xrightarrow{\ d\ } \Lambda^1[m]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[m] \xrightarrow{\ d\ } \mathbf{k}[m] \longrightarrow 0$$

точен во всех членах, кроме последнего, а нулевые его когомологии изоморфны $\mathbf{k}$.

Для доказательства этого последнего утверждения мы докажем, что (E,d) коцепно гомотопен комплексу $(\mathbf{k},0)$

$$0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{k} \longrightarrow 0$$

Рассмотрим следующие отображения из одного комплекса в другой $\varepsilon\colon (E,d)\to(\mathbf{k},0)$ и $\eta\colon (\mathbf{k},0)\to(E,d)$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d"] & \Lambda^1[m]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[m] \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift left] & \mathbf{k}[m] \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\varepsilon"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[u, shift left] & \mathbf{k} \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\eta"] & 0
\end{tikzcd}$$

где $\eta\colon \mathbf{k}\to\mathbf{k}[m]$ - естественное вложение.

Ясно, что $\varepsilon\eta=\mathrm{id}$.

Осталось построить коцепную гомотопию s между $\eta\varepsilon$ и id

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d"] & \Lambda^1[m]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[m] \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "s^1"'] \arrow[d, shift right, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, shift left, "\eta\varepsilon"] & \mathbf{k}[m] \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dl, "s^0"'] \arrow[d, shift right, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, shift left, "\eta\varepsilon"] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "d"] & \Lambda^1[m]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[m] \arrow[r, "d"] & \mathbf{k}[m] \arrow[r, "\varepsilon"] & 0
\end{tikzcd}$$

т. е. семейство $s=\{s^i\colon E^{-i}\to E^{-i-1}\}=\{s^{i,2j}\colon E^{-i,2j}\to E^{-i-1,2j}\}$, такое что $sd+ds=\mathrm{id}-\eta\varepsilon$. Иными словами, речь идёт об отображении s_m дифференциальной биградуированной алгебры E_m в себя бистепени $(-1,0)$, удовлетворяющее тождеству $sd+ds=\mathrm{id}-\eta\varepsilon$ в E_m.

Будем определять s_m по индукции, начиная с $m=1$: определим $s_1\colon \mathbf{k}[v]\to\Lambda[u]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[v]$ по формуле $s_1(a_0+a_1v+\ldots+a_jv^j)=u(a_1+a_2v+\ldots+a_jv^{j-1})$.

Проверим, что это отображение коцепной гомотопии. Пусть $x=a_0+a_1v+\ldots+a_jv^j$, тогда $ds_1(x)=x-a_0=x-\eta\varepsilon(x), s_1d(x)=s_1(0)=0$. Для ux имеем: $ds_1(ux)=d(0)=0$, $s_1d(ux)=s_1(vx)=ux$, $\eta\varepsilon(ux)=0$. Таким образом, s_1 - коцепная гомотопия.

Пусть мы уже построили уже отображения s_k при $k<m$. Заметим, что $E_m=E_{m-1}\otimes_{\mathbf{k}}E_1$, $\varepsilon_m=\varepsilon_{m-1}\otimes\varepsilon_1$, $\eta_m=\eta_{m-1}\otimes\eta_1$ (так как отображения ε_i и η_i имеют степень 0). Определим $s_m=s_{m-1}\otimes\mathrm{id}+\eta_{m-1}\varepsilon_{m-1}\otimes s_1$.

Проверим, что эта формула задаёт требуемую коцепную гомотопию. Пусть $e_{m-1} \in E_{m-1}$ имеет степень p, $e_1 \in E_1$ имеет степень q. Тогда

$$s_m(e_{m-1} \otimes e_1) = s_{m-1}(e_{m-1}) \otimes e_1 + (-1)^p \eta_{m-1}\varepsilon_{m-1}(e_{m-1}) \otimes s_1(e_1),$$

$$\begin{aligned} ds_m(e_{m-1} \otimes e_1) = ds_{m-1}(e_{m-1}) \otimes e_1 + (-1)^{p+1} s_{m-1}(e_{m-1}) \otimes d(e_1) + \\ (-1)^p d\eta_{m-1}\varepsilon_{m-1}(e_{m-1}) \otimes s_1(e_1) + \eta_{m-1}\varepsilon_{m-1}(e_{m-1}) \otimes ds_1(e_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_m d(e_{m-1} \otimes e_1) = (s_{m-1} \otimes \mathrm{id})(d(e_{m-1}) \otimes e_1 + (-1)^p e_{m-1} \otimes d(e_1)) + \\ (\eta_{m-1}\varepsilon_{m-1} \otimes s_1)(d(e_{m-1}) \otimes e_1 + (-1)^p e_{m-1} \otimes d(e_1)) = \\ s_{m-1}d(e_{m-1}) \otimes e_1 + (-1)^p s_{m-1}(e_{m-1}) \otimes d(e_1) + \\ (-1)^{p+1} \eta_{m-1}\varepsilon_{m-1} d(e_{m-1}) \otimes s_1(e_1) + \eta_{m-1}\varepsilon_{m-1}(e_{m-1}) \otimes s_1 d(e_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(ds_m + s_m d)(e_{m-1} \otimes e_1) = \\ &\quad (ds_{m-1} + s_{m-1}d)(e_{m-1}) \otimes e_1 + \eta_{m-1}\varepsilon_{m-1}(e_{m-1}) \otimes (ds_1 + s_1 d)(e_1) = \\ &\quad (\mathrm{id} - \eta_{m-1}\varepsilon_{m-1})(e_{m-1}) \otimes e_1 + \eta_{m-1}\varepsilon_{m-1}(e_{m-1}) \otimes (\mathrm{id} - \eta_1\varepsilon_1)(e_1) = \\ &\qquad\qquad\qquad (\mathrm{id} - \eta_m\varepsilon_m)(e_{m-1} \otimes e_1). \end{aligned}$$

Таким образом, s_m - коцепная гомотопия.

Полученная свободная резольвента для $\mathbf{k}$ и называется резольвентой Кошуля.

2 Tor-модули и теорема Хохстера

Так как все $\Lambda^i[m] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[m]$ являются $\mathbf{k}[m]$-модулями, тензорно умножим резольвенту Кошуля на $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ и воспользуемся изоморфизмом $\mathbf{k}[m]$ - модулей:

$$\Lambda^i[m] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[m] \otimes_{\mathbf{k}[m]} \mathbf{k}[\mathcal{K}] \simeq \Lambda^i[m] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathcal{K}]$$

Получаем коцепной комплекс:

$$0 \longrightarrow \Lambda^m[m] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathcal{K}] \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Lambda^1[m] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathcal{K}] \xrightarrow{d} \mathbf{k}[\mathcal{K}] \longrightarrow 0,$$

где оператор d определяется как $d(a \otimes b) = d(a) \otimes b$ (т.е. $d \otimes \mathrm{id}$).

Тогда его $(-i)$-ый градуированный модуль когомологий - это $\mathrm{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[m]}(\mathbf{k}, \mathbf{k}[\mathcal{K}])$.

Так как оператор d $\mathbf{k}[m]$-линеен, повышает внешнюю градуировку на 1 и сохраняет внутреннюю, то $\mathrm{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[m]}(\mathbf{k}, \mathbf{k}[\mathcal{K}])$ раскладывается в прямую сумму $\mathbf{k}$-модулей:

$$\mathrm{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[m]}(\mathbf{k}, \mathbf{k}[\mathcal{K}]) = \bigoplus_{j \geqslant 0} \mathrm{Tor}^{-i,2j}_{\mathbf{k}[m]}(\mathbf{k}, \mathbf{k}[\mathcal{K}]).$$

Как известно, $\mathrm{Tor}_A^{-i}(M,N)$ не зависит (с точностью до изоморфизма) от резольвенты для M и модули M и N можно менять местами, т.е. $\mathrm{Tor}_A^{-i}(M,N) \simeq \mathrm{Tor}_A^{-i}(N,M)$.

Таким образом, из вышесказанного следует, что $\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}],\mathbf{k})$ - биградуированный $\mathbf{k}[m]$-модуль:

$$\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}],\mathbf{k}) = \bigoplus_{i,j} \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[m]}^{-i,2j}(\mathbf{k}[\mathcal{K}],\mathbf{k}),$$

и мы имеем изоморфизм биградуированных $\mathbf{k}[m]$-модулей:

$$\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}],\mathbf{k}) \simeq H(\Lambda[u_1,\ldots,u_m] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathcal{K}], d)$$

.

Теорема(Хохстер). Имеет место равенство (изоморфизм $\mathbf{k}$-модулей):

$$\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[m]}^{-i,2j}(\mathbf{k}[\mathcal{K}],\mathbf{k}) = \bigoplus_{J\subset[m]:|J|=j} \widetilde{H}^{j-i-1}(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}),$$

где $\mathcal{K}_J$ - полный подкомплекс в $\mathcal{K}$, натянутый на J. Здесь полагаем, что $H^{-1}(\mathcal{K}_{\varnothing};\mathbf{k}) = \mathbf{k}$.

Введем фактор-алгебру $R^*(\mathcal{K}) = \Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[\mathcal{K}]/(v_i^2 = u_iv_i = 0, 1 \le i \le m)$. Идеал $I = (v_i^2, u_iv_i, 1 \le i \le m)$ является однородным и инвариантным относительно действия дифференциала, так как порождающие элементы идеала являются однородными элементами относительно биградуировки, и $d(v_i^2) = 0, d(u_iv_i) = 0$. Из этих двух свойств следует, что фактор-алгебра $R^*(\mathcal{K})$ наследует действие дифференциала $(d(a+I) := d(a) + I)$ и биградуировку.

Рассмотрим отображение проекции $\varrho\colon \Lambda[u_1,\ldots,u_m] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathcal{K}] \to R^*(\mathcal{K})$. Заметим, что $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ как векторное пространство над $\mathbf{k}$ имеет базис, состоящий из мономов $v_I, I \in \mathbf{k}[\mathcal{K}]$. Тогда $\Lambda^i[m] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathcal{K}]$ имеет в качестве базиса над $\mathbf{k}$ элементы вида $u_Jv_I, I \in \mathcal{K}, J \subset [m], |J| = i$. Таким образом, алгебра $R^*(\mathcal{K})$ - это $\mathbf{k}$-модуль с базисом $u_Jv_I, I \in \mathcal{K}, J \subset [m], I \cap J = \varnothing$. Заметим, что эта алгебра конечномерна.

Определим $\mathbf{k}$-линейное отображение

$$i\colon R^*(\mathcal{K}) \to \Lambda[u_1,\ldots,u_m] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathcal{K}], \quad i\colon u_Jv_I \mapsto u_Jv_I$$

(каждый класс в $R^*(\mathcal{K})$ представлен элементом вида $\sum\limits_i k_iu_Jv_I$). Отображение i коммутирует с дифференциалом и сохраняет градуировку, следовательно i индуцирует гомоморфизм биградуированных $\mathbf{k}$-векторных пространств, причем $\varrho i = \mathrm{id}$.

Утверждение. Отображение проекции $\varrho\colon \Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[\mathcal{K}] \to R^*(\mathcal{K})$ индуцирует изоморфизм в когомологиях.

Для доказательства утверждения построим коцепную гомотопию между отображениями id и $i\varrho\colon \Lambda[m]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[\mathcal{K}]\to\Lambda[m]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[\mathcal{K}]$. Рассмотрим первый случай: $\mathcal{K}=\Delta^{m-1}$. Тогда

$$\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[\mathcal{K}]\simeq\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$$

$$R^*(\mathcal{K})\simeq\big(\Lambda[u]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[v]/(v^2,uv)\big)^{\otimes m}$$

.

Докажем для $m=1$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Lambda^1[u]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[v] \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, shift left, "i\varrho"] & \mathbf{k}[v] \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, shift left, "i\varrho"] \arrow[dl, "s_1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda^1[u]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[v] \arrow[r, "d"] & \mathbf{k}[v] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Напомним, что $E_m=\Lambda[m]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[m]$. Определим $s_1\colon E_1^{0,*}=\mathbf{k}[v]\to\Lambda^1[u]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[v]$:

$$s_1(a_0+a_1v+\dots+a_jv^j)=u(a_2v+a_3v^2+\dots+a_jv^{j-1}).$$

Нужно проверить что это, действительно, оператор коцепной гомотопии, то есть выполнено тождество: $ds+sd=\mathrm{id}-i\varrho$ (s_1 - обозначение для s в случае $m=1$). Достаточно проверить для элементов вида x и ux, где $x=a_0+a_1v+a_2v^2+\dots+a_jv^j$, так как остальные элементы $\mathbf{k}[m]$-модуля E_1 являются суммой элементов этих двух типов с коэффициентами из $\mathbf{k}$.

Проверим тождество для x: $ds_1(x)=d(u(a_2v+\dots+a_jv^{j-1}))=(a_2v+\dots+a_jv^{j-1})d(u)=a_2v^2+\dots+a_jv^j=x-a_0-a_1v$, $s_1d(x)=s_1(0)=0$, $i\varrho(x)=i\varrho(a_0+a_1v+\dots+a_jv^j)=a_0+a_1v$. Таким образом, тождество выполнено для x.

Проверим тождество для ux: $ds_1(ux)=d(0)=0$, $s_1d(ux)=s_1(d(u(a_0+a_1v+\dots+a_jv^j)))=s_1(a_0v+a_1v^2+\dots+a_jv^{j+1})=u(a_1v+\dots+a_jv^j)=ux-a_0u$. Таким образом, тождество для элемента ux верно и s_1 - оператор коцепной гомотопии.

Теперь постороим по индукции $s_m\colon E_m\to E_m$. Предположим, что для $m=k-1$ коцепная гомотопия уже постоена. Аналогично рассуждениям в построении резольвенты Кошуля, $E_k=E_{k-1}\otimes E_1,\varrho_k=\varrho_{k-1}\otimes\varrho_1,i_k=i_{k-1}\otimes i_1$, $s_k=s_{k-1}\otimes\mathrm{id}+i_{k-1}\varrho_{k-1}\otimes s_1$ - оператор коцепной гомотопии.

Пусть теперь $\mathcal{K}$ - произвольный комплекс на вершинах $[m]$. Заметим, что

$$\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]/\mathcal{I}_{\mathcal{K}}\simeq\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[\mathcal{K}],$$

$$R^*(\Delta^{m-1})/\mathcal{I}_{\mathcal{K}}\simeq R^*(\mathcal{K}),$$

где $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ - идеал Стенли-Райснера, $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}=(v_I,I\notin\mathcal{K})$. Пусть $M=\{v_I,I\notin\mathcal{K}\}$ - множество порождающих данного идеала, тогда идеал имеет вид:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{K}}=\langle a_1m_1+\dots+a_sm_s\mid a_i\in\Lambda[m]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[m],m_i\in M\rangle.$$

Заметим, что $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ - $\mathbf{k}$-модуль с базисом, состоящим из элементов вида $u_J v_{i_1}^{\alpha_1}\cdots v_{i_k}^{\alpha_k},\ I=\{i_1,\cdots i_k\}\notin\mathcal{K},\ \alpha_j>0$.

Нужно проверить: $d(\mathcal{I}_{\mathcal{K}})\subset\mathcal{I}_{\mathcal{K}}, i\varrho(\mathcal{I}_{\mathcal{K}})\subset\mathcal{I}_{\mathcal{K}}, s(\mathcal{I}_{\mathcal{K}})\subset\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$. Для того, чтобы $d(\mathcal{I}_{\mathcal{K}})\subset\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ достаточно выполнения $d(v_I)\subset\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ в силу разложения произвольного элемента $x\in\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ $(x=a_1m_1+\cdots+a_sm_s)$. Но $d(v_I)=0$, следовательно первое включение выполнено. Проверим второе включение. Так как ϱ - отображение проекции, то

$$i\varrho(u_J v_{i_1}^{\alpha_1}\cdots v_{i_k}^{\alpha_k})=\begin{cases}u_J v_{i_1}\cdots v_{i_k}, & \text{если } \alpha_i=1, J\cap\{i_1,\cdots,i_k\}=\varnothing\\ 0, & \text{иначе}\end{cases},$$

тогда $i\varrho(\mathcal{I}_{\mathcal{K}})\subset\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$. Остается проверить третье включение. Рассмотрим индуктивную формулу для s_m:

$$s_m=s_1\otimes\underbrace{\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}}_{m-1}+i_1\varrho_1\otimes s_1\otimes\underbrace{\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}}_{m-2}+\cdots+\underbrace{i_1\varrho_1\otimes\cdots\otimes i_1\varrho_1}_{m-1}\otimes s_1.$$

Проверим, что эта формула верна для произвольного m. Она верна для $m=1$, так как преобретает вид $s_1=s_1$, для $m=2$ она верна по определению s_2. Предположим, что формула верна для $m=k-1$. Тогда для $m=k$ имеем:

$$s_k=s_{k-1}\otimes\mathrm{id}+i_{k-1}\varrho_{k-1}\otimes s_1=\left(\sum_{j=0}^{k-2}\underbrace{i_1\varrho_1\otimes\cdots\otimes i_1\varrho_1}_{j}\otimes s_1\otimes\underbrace{\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}}_{k-j-2}\right)\otimes\mathrm{id}+$$

$$+\underbrace{i_1\varrho_1\otimes\cdots\otimes i_1\varrho_1}_{k-1}\otimes s_1=\sum_{j=0}^{k-1}\underbrace{i_1\varrho_1\otimes\cdots\otimes i_1\varrho_1}_{j}\otimes s_1\otimes\underbrace{\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}}_{k-j-1},$$

Справедливость индуктивной формулы доказана. Воспользуемся этим для доказательства третьего включения.

$$s_m(u_J v_{i_1}^{\alpha_1}\cdots v_{i_k}^{\alpha_k})=\sum_{p:\ \alpha_p>1}\pm u_J u_{i_p} v_{i_1}^{\alpha_1}\cdots v_{i_p}^{\alpha_p-1}\cdots v_{i_k}^{\alpha_k}.$$

Таким образом, $s(\mathcal{I}_{\mathcal{K}})\subset\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$.

Так как отображения $d, i\varrho, s$ переводят идеал в себя, они индуцируют отображения на фактор-пространствах $\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[\mathcal{K}], R^*(\mathcal{K})$, причем остается верным тождество $ds+sd=\mathrm{id}-i\varrho$.

Утверждение доказано.

Введем мультиградуировку на $\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]$: mdeg $v_1^{i_1}\cdots v_m^{i_m}=(2i_1,\ldots,2i_m)$. Кольцо $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ - это кольцо $\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]$, профакторизованное по идеалу $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$, однородному относительно мультиградуировки, поэтому $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ тоже наследует мультиградуировку.

Введем мультиградуировку на $\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]$:

$$\mathrm{mdeg}\ u_i=(-1;0,\ldots,0,2,0,\ldots,0),\ \mathrm{mdeg}\ v_i=(0;0,\ldots,0,2,0,\ldots,0),$$

$$\mathrm{mdeg}\; u_i \otimes v_i = (-1; 0, \ldots, 0, 4, 0, \ldots, 0),$$
$$\mathrm{mdeg}\; u_i \otimes v_j = (-1; 0, \ldots 0, 2, 0, \ldots 0, 2, 0, \ldots, 0).$$

Тогда в резольвенте Кошуля можно считать, что введена мультиградуировка, дифференциал повышает внешнюю компоненту на 1, оставляет на месте m внутренних. Также можно считать, чтто фактор-алгебра $R^*(\mathcal{K})$ мультиградуированна, так как идеал, по которому ведется факторизация, является однородным относительно мультиградуировки. Тогда

$$\mathrm{Tor}^{-i,2a}_{\mathbf{k}[m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}) \simeq H^{-i,2a}(\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathcal{K}], d) \simeq H^{-i,2a}(R^*(\mathcal{K}), d),$$

где $a = (a_1, \ldots, a_m) \in (\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^m$.

Представим подмножество $J \subset [m]$ в виде вектора, j-я координата которого равна 1, если $j \in J$, и 0 иначе. Тогда получаем следующую формулировку теоремы Хохстера:

Теорема. Для любого подмножества $J \subset [m]$ имеем

$$\mathrm{Tor}^{-i,2J}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}) \simeq \widetilde{H}^{|J|-i-1}(\mathcal{K}_J; \mathbf{k}),$$

и $\mathrm{Tor}^{-i,2a}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}) = 0$, если a - вектор, состоящий не только из 0 и 1.

Доказательство.

Пусть $C^p(\mathcal{K}_J)$ -p-я группа симплициальных коцепей с коэффициентами из $\mathbf{k}$. Обозначим за $\alpha_L \in C^{p-1}(\mathcal{K}_J)$ базисную функцию, равную 1 на $L = (l_1, \ldots, l_p) \in \mathcal{K}_J$ и 0 на остальных симплексах комплекса $\mathcal{K}_J$ размерности $p-1$. Определим семейство $\mathbf{k}$-линейных отображений $\{f_p, p = 0, 1, \ldots\}$, задав их на базисных элементах и продолжив по линейности:

$$f_p \colon C^{p-1}(\mathcal{K}_J) \to R^{p-|J|,2J}(\mathcal{K})$$
$$\alpha_L \mapsto \varepsilon(L, J) u_{J\setminus L} v_L,$$

где $\varepsilon(L, J)$ определяется как

$$\varepsilon(L, J) = \prod_{j \in L} \varepsilon(j, J),$$

где $\varepsilon(j, J) = (-1)^{r-1}$, если j - r-й по возростанию элемент множества J. Заметим, что отображение f_p переводит базис $\mathbf{k}$-модуля $C^{p-1}(\mathcal{K}_J)$ в базис $R^{p-|J|,2J}(\mathcal{K})$, следовательно f_p - изоморфизм $\mathbf{k}$-модулей. Проверим, что f_p коммутирует с дифференциалом:

$$f_{p+1}(d\alpha_L) = f_{p+1}\left(\sum_{j \in J\setminus L, j\cup L \in \mathcal{K}_J} \varepsilon(j, j \cup L)\alpha_{j\cup L}\right) =$$
$$= \sum_{j \in J\setminus L, j\cup L \in \mathcal{K}_J} \varepsilon(j, j\cup L) f(\alpha_{j\cup L}) = \sum_{j \in J\setminus L, j\cup L \in \mathcal{K}_J} \varepsilon(j, j\cup L)\varepsilon(j\cup L, J) u_{J\setminus(j\cup L)} v_{j\cup L},$$

$$df_p(\alpha_L) = d(\varepsilon(L,J)u_{J\setminus L}v_L) = \sum_{j\in J\setminus L,\, j\cup L\in\mathcal{K}_J} \varepsilon(L,J)\varepsilon(j,J\setminus L)u_{J\setminus(j\cup L)}v_{j\cup L}.$$

По определению $\varepsilon(L,J)$

$$\varepsilon(j\cup L,J)\varepsilon(j,j\cup L) = \varepsilon(j,J)\varepsilon(L,J)\varepsilon(j,j\cup L).$$

Осталось проверить, что $\varepsilon(j,J)\varepsilon(j,j\cup L) = \varepsilon(j,J\setminus L)$. Перепишем требуемое равенство в виде $\varepsilon(j,J) = \varepsilon(j,j\cup L)\varepsilon(j,J\setminus L)$. Пусть $\varepsilon(j,j\cup L) = (-1)^{k-1}$, $\varepsilon(j,J\setminus L) = (-1)^{l-1}$. Введем обозначение: $L_{\leqslant} = L\cap\{1,2,\ldots,j-1\}$. Тогда $\varepsilon(j,j\cup L) = \varepsilon(j,j\cup L_{\leqslant}) = (-1)^{k-1}$, $\varepsilon(j,J\setminus L) = \varepsilon(j,J\setminus L_{\leqslant}) = (-1)^{l-1}$, $|L_{\leqslant}| = k-1$ (количество элементов в множестве). Тогда элемент j в множестве J будет $(l+k-1)$-й по возрастанию, поэтому $\varepsilon(j,J) = (-1)^{l+k}$, что и требовалось.

Таким образом, $df_p = f_{p+1}d$.

Добавим в совокупность отображений $\{f_p, p = 0,1,\ldots\}$ отображение $f_{-1}\colon \mathbf{k}\to R^{-|J|,2J}, 1\mapsto u_J$. Тогда f_p определяет изоморфизм коцепных комплексов.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{k} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_{-1}"', "\cong"] & C^0(\mathcal{K}_J) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_0"', "\cong"] & \cdots \arrow[r, "d"] & C^{p-1}(\mathcal{K}_J) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_{p-1}"', "\cong"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & R^{-|J|,2J} \arrow[r, "d"] & R^{-|J|+1,2J} \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & R^{-|J|+p,2J} \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Из этого следует, что

$$\mathrm{Tor}^{p-|J|,2J}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}],\mathbf{k}) \simeq \widetilde{H}^{p-1}(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}).$$

Теорема Хохстера доказана.

3 Мультипликативная структура

Выше мы получили изоморфизм $\mathbf{k}[m]$-модулей $\varphi\colon \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[\mathrm{m}]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}],\mathbf{k}) \simeq H(\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathcal{K}])$. Так как справа стоит $\mathbf{k}$-алгебра, то с помощью этого изоморфизма можно перенести умножение в $\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[\mathrm{m}]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}],\mathbf{k})$.

Ввиду того, что мы имеем также изоморфизм $\mathbf{k}$-алгебр $\varrho^*\colon H(\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathcal{K}]) \simeq H(R^*)$, мы могли то же самое умножение получить, перенеся его из $H(R^*)$ с помощью $\varrho^*\varphi$.

Таким образом, мы ввели структуру $\mathbf{k}$-алгебры в $\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[\mathrm{m}]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}],\mathbf{k})$ (которой там априори не было). Полученный объект называется Tor-алгеброй симплициального комплекса $\mathcal{K}$.

В силу теоремы Хохстера мы имеем изоморфизм

$$\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[\mathrm{m}]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}],\mathbf{k}) \simeq \bigoplus_{J\subset[m],\, p\geqslant 0} \widetilde{H}^{p-1}(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})$$

С помощью него мы можем перенести умножение в указанную справа прямую сумму.

Оказывается, это умножение совпадает с точностью до знака с умножением, индуцированным следующими отображениями в симплициальных коцепях:

$$\mu\colon C^{p-1}(\mathcal{K}_I) \times C^{q-1}(\mathcal{K}_J) \to C^{p+q-1}(\mathcal{K}_{I\cup J}),$$

$$(\alpha_L, \alpha_M) \mapsto \begin{cases} \alpha_{L\sqcup M}, & \text{если } I\cap J = \varnothing,\ L\sqcup M \in \mathcal{K}_{I\sqcup J} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(Можно проверить, что эти отображения действительно поднимаются до отображений в когомологиях $\widetilde{H}^{p-1}(\mathcal{K}_I) \times \widetilde{H}^{q-1}(\mathcal{K}_J) \to \widetilde{H}^{p+q-1}(\mathcal{K}_{I\cup J})$ и тем самым задают умножение в $\bigoplus\limits_{J\subset[m],\,p\geqslant 0} \widetilde{H}^{p-1}(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})$.)

Будем обозначать первое умножение через $\alpha\cdot\beta$, а второе - через $\alpha*\beta$.

В силу определения умножения в Tor-алгебре, можно считать, что первое умножение в $\bigoplus \widetilde{H}^{p-1}(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})$ перенесено из $H(R^*)$ посредством построенных в конце доказательства теоремы Хохстера отображений $f=\{f_p\}$.

То есть, $\alpha_L\cdot\alpha_M = f^{-1}(f(\alpha_L)\,f(\alpha_M)) = f^{-1}(\varepsilon(L,I)u_{I\setminus L}v_L\,\varepsilon(M,J)u_{J\setminus M}v_M)$.

Если $I\cap J\neq\varnothing$ или $L\sqcup M\notin\mathcal{K}_{I\sqcup J}$, то $u_{I\setminus L}v_Lu_{J\setminus M}v_M$ равен нулю в R^*, и тогда $\alpha_L\cdot\alpha_M = f^{-1}(0) = 0 = \alpha_L*\alpha_M$.

Иначе $u_{I\setminus L}v_Lu_{J\setminus M}v_M = \zeta u_{(I\cup J)\setminus(L\cup M)}v_{L\cup M}$, где $\zeta = \prod\limits_{k\in I\setminus L}\varepsilon(k, k\cup J\setminus M)$.

И тогда $\alpha_L\cdot\alpha_M = \zeta\varepsilon(L,I)\varepsilon(M,J)f^{-1}(u_{(I\cup J)\setminus(L\cup M)}v_{L\cup M}) = \zeta\varepsilon(L,I)\varepsilon(M,J)\alpha_{L\cup M} = \zeta\varepsilon(L,I)\varepsilon(M,J)\alpha_L*\alpha_M$.

Что и требовалось показать.

Список литературы

[1] Victor M. Buchstaber, Taras E. Panov. Toric topology.