**Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова**

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАССИ В КОГОМОЛОГИЯХ МОМЕНТ-УГОЛ МНОГООБРАЗИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ФУЛЛЕРЕНАМ

Журавлева Елизавета
403 группа

Научный руководитель:
Панов Т. Е.

2017 г.

1. Введение

В работе рассматривается вопрос существования нетривиальных тройных произведений Масси в когомологиях момент-угол многообразий $\mathcal{Z}_P$, соответствующих трехмерным простым многогранникам. Как показано в [1], такие многообразия $\mathcal{Z}_P$ представляют собой гладкие двусвязные многообразия размерности $m+3$, где m — количество двумерных граней в многограннике P. Первые примеры момент-угол многообразий с нетривиальными тройными произведениями Масси были построены И. В. Баскаковым в работе [4]. И. Ю. Лимонченко в [5] построил семейство момент-угол многообразий с нетривиальными n-кратными произведениями Масси. В этой работе доказывается существование нетривиальных произведений Масси в когомологиях многообразий $\mathcal{Z}_P$, соответствующих фуллеренам — простым 3-мерным многогранникам, содержащим только 5-угольные и 6-угольные грани. Известно, что это влечет неформальность данных пространств. Доказательство существования нетривиальных произведений Масси основывается на комбинаторном описании когомологий момент-угол комплексов, а также на некоторых свойствах фуллеренов.

2. Предварительные сведения и основные конструкции

Пусть (A,d) — дифференцальная градуированная алгебра над $\mathbb{Z}$. Пусть $\alpha_i \in H^{k_i}(A), i=1,2,3$, такие что $\alpha_1\alpha_2=0$, $\alpha_2\alpha_3=0$. Выберем представителей: $[a_i]=\alpha_i$, $i=1,2,3$. Тогда $a_1a_2=da_{1,2}$ и $a_2a_3=da_{2,3}$. Можно проверить, что элемент

$$b=(-1)^{k_1+1}a_1a_{2,3}+a_{1,2}a_3,\ b\in A^{k_1+k_2+k_3-1} \tag{2.1}$$

является коциклом.

Произведением Масси $\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$ называется множество в $H^{k_1+k_2+k_3-1}(A)$, состоящее из элементов, полученных вышеописанной процедурой. Так как элементы $a_{1,2}$ и $a_{2,3}$ выбираются с точностью до коциклов, то, более точно:

$$\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle=[b]+\alpha_1H^{k_2+k_3-1}+\alpha_3H^{k_1+k_2-1} \tag{2.2}$$

Произведение Масси называется *тривиальным*, если $0\in\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$, и *нетривиальным* в обратном случае.

Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m]=\{1,\ldots,m\}$. *Момент-угол комплексом* $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, соответствующим симплициальному комплексу $\mathcal{K}$, называется пространство

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K}=\bigcup_{I\in\mathcal{K}}(\prod_{i\in I}D^2)\times\prod_{i\notin I}S^1)\subset(D^2)^m. \tag{2.3}$$

Важный класс симплициальных комплексов $\mathcal{K}$ происходит из простых многогранников P. Напомним, что n-мерный многогранник P называется *простым*, если каждая вершина содержится в точности в n гипергранях. Обозначим через $\mathcal{K}_P$ комплекс, двойственный к границе многогранника P. Более подробно: если $\{F_1,\ldots,F_m\}$ — грани коразмерности 1 в многограннике P, то

$$\mathcal{K}_P=\{\{i_1,\ldots,i_k\}\subset[m]:F_{i_1}\cap\ldots\cap F_{i_k}\neq\varnothing\}. \tag{2.4}$$

Заметим, что если P — простой n-мерный многогранник, то $\mathcal{K}_P$ — триангуляция $(n-1)$-мерной сферы.

Теорема 2.1([1,Theorem 6.2.4, Corollary 6.2.5]). *$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является клеточным комплексом, а в случае $\mathcal{K} = \mathcal{K}_P$ для простого P — гладким многообразием.*

Пусть $I = \{i_1, \dots i_k\}$ — симплекс, причём $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Обозначим через v_I и u_I мономы $v_I = v_{i_1} \cdots v_{i_k}$, $u_I = u_{i_1} \cdots u_{i_k}$. *Кольцом граней* симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$ называется факторкольцо $\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$, где $\mathcal{I}_{\mathcal{K}} = (v_I : I \notin \mathcal{K})$ — идеал Стенли–Райснера.

Введем фактор-алгебру

$$R^*(\mathcal{K}) = \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}]/(v_i^2 = u_i v_i = 0, 1 \leqslant i \leqslant m). \tag{2.5}$$

$R^*(\mathcal{K})$ является биградуированной дифференциальной алгеброй с аддитивным базисом $u_J v_I$, где $I \in \mathcal{K},\ J \subset [m],\ I \cap J = \varnothing$; $\operatorname{bideg} u_i = (-1, 2)$, $\operatorname{bideg} v_i = (0, 2)$, и дифференциал определяется по правилу $du_i = v_i$, $dv_i = 0$.

Теорема 2.2([1, Lemma 4.5.3]). *Имеет место изоморфизм дифференциальных градуированных алгебр:*

$$R^*(\mathcal{K}) \cong C^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}), \tag{2.6}$$

где $C^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ — алгебра клеточных коцепей с некоторым умножением, индуцирующим стандартное произведение в когомологиях.

Далее, для удобства на алгебре $R^*(\mathcal{K})$ рассматривается $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^m$-градуировка: $\operatorname{mdeg} u_i = (-1; 2e_i)$, $\operatorname{mdeg} v_i = (0; 2e_i)$, где e_i, $i = 1 \dots m$, — элементы стандартного базиса в $\mathbb{Z}^m$.

Пусть дано множество $J \subset [m]$. *Полный подкомплекс* $\mathcal{K}_J$ комплекса $\mathcal{K}$ — это $\mathcal{K}_J = \{\, I \in \mathcal{K} \mid I \subset J \,\}$ (ограничение $\mathcal{K}$ на J). Для каждого $\mathcal{K}_J$ рассмотрим коаугментированный комплекс симплициальных коцепей $(C^*(\mathcal{K}_J), d)$. Группа $C^p(\mathcal{K}_J)$ является свободной абелевой группой с базисом χ_L, где χ_L — характеристическая функция симплекса $L \in \mathcal{K}_J$, $|L| = p + 1$.

Теорема 2.3([1, Theorem 3.2.4]). *Имеет место изоморфизм коцепных комплексов $(C^*(\mathcal{K}_J), d)$ и $(R^{*-|J|+1, 2J}(\mathcal{K}), d)$:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_{-1}"', "\cong"] & C^0(\mathcal{K}_J) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_0"', "\cong"] & \cdots \arrow[r, "d"] & C^{p-1}(\mathcal{K}_J) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_{p-1}"', "\cong"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & R^{-|J|,\, 2J} \arrow[r, "d"] & R^{-|J|+1,\, 2J} \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & R^{-|J|+p,\, 2J} \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

где $f_p(\chi_L) = \varepsilon(L, J) u_{J \setminus L} v_L$, $\varepsilon(L, J)$ — некоторый знак.

Таким образом, мы получаем изоморфизм дифференциальных градуированных алгебр

$$C^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong R^*(\mathcal{K}) \cong \bigoplus_{p \geqslant 0,\, J \subset [m]} C^{p-1}(\mathcal{K}_J), \tag{2.7}$$

а также

$$H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong H(R^*(\mathcal{K})) \cong \bigoplus_{p \geqslant 0,\, J \subset [m]} \widetilde{H}^{p-1}(\mathcal{K}_J). \tag{2.8}$$

Умножение на прямой сумме симплициальных коцепей — это умножение, перенесенное из алгебры $R^*(\mathcal{K})$.

Теорема 2.4([1, Proposition 3.2.10]). *Произведение $\bigoplus\limits_{p \geqslant 0,\, J \subset [m]} C^{p-1}(\mathcal{K}_J)$, индуцированное из алгебры $R^*(\mathcal{K})$, совпадает с точностью до знака с произведением, индуцированным отображениями*

$$\mu\colon C^{p-1}(\mathcal{K}_I) \times C^{q-1}(\mathcal{K}_J) \to C^{p+q-1}(\mathcal{K}_{I\sqcup J}),$$
$$(\chi_L, \chi_M) \mapsto \begin{cases} \chi_{L\sqcup M}, & \text{если } I \cap J = \varnothing, L \sqcup M \in \mathcal{K}_{I\sqcup J}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{2.9}$$

где χ_L *— характеристическая функция симплекса* L.

Пусть P — простой многогранник размерности 3. Пусть $F_1, \ldots, F_m$ — его гиперграни. Назовем *k-поясом* циклическую последовательность $(F_{i_1}, \ldots, F_{i_k})$ гиперграней, в которой каждая гипергрань пересекается в этой цепочке только с соседними, причем любые 3 гиперграни имеют пустое пересечение. Более точно: $F_{i_{j_1}} \cap \ldots \cap F_{i_{j_r}} \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\{ j_1, \ldots, j_r \} \in \in \{ \{ 1, 2 \}, \{ 2, 3 \}, \ldots, \{ k-1, k \}, \{ k, 1 \} \}$. Заметим, что k-пояс соответствует *бесхордовому циклу* в двойственном комплексе $\mathcal{K}_P$, который является триангуляцией 2-мерной сферы.

Фуллерен — это простой 3-мерный многогранник, каждая гипергрань которого или пятиугольная, или шестиугольная.

Теорема 2.5([3, Corollary 3.12, Corollary 3.16, Theorem 3.19]). *Пусть P — фуллерен. Тогда верны следующие утверждения.*

1. *P не содержит 3-пояса и 4-пояса.*
2. *Каждая пятиугольная грань окружена 5-поясом.*
3. *Если 5-пояс не окружает пятиугольную грань, то он состоит только из 6-угольников.*

3. Основной результат

Далее рассматривается вопрос существования нетривиальных произведений Масси в когомологиях момент-угол многообразий, соответствующих фуллеренам. Произведения Масси в наименьшей размерности

$$H^3(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \otimes H^3(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \otimes H^3(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \to H^8(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \tag{3.1}$$

были полностью описаны G.Denham и A.Suciu в [2]:

Теорема 3.1([2, Theorem 6.1.1]). *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *существуют классы когомологий $\alpha, \beta, \gamma \in H^3(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, для которых произведение Масси $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ определено и нетривиально;*

(2) *граф $\mathcal{K}^1$ (одномерный остов $\mathcal{K}$) содержит индуцированный подграф, изоморфный одному из пяти графов, изображенных на рис. 1.*

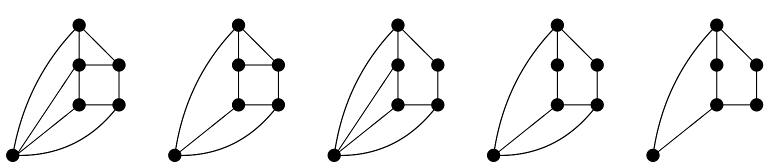

Рис. 1

Как отмечено в ([6, Proposition 4.8]), тройное произведение Масси тройных классов когомологий $H^3(\mathcal{Z}_\mathcal{P})$ тривиально для простых многогранников без 4-поясов, в частности, для фуллеренов.

В данной работе доказано следующее утверждение:

Теорема 3.2. *Для любого фуллерена P в когомологиях момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_{\mathcal{P}}$ существует нетривиальное тройное произведение Масси.*

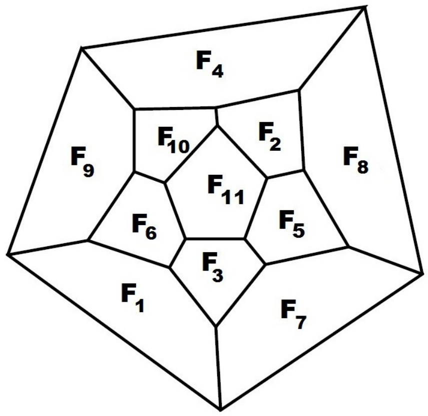

Рис. 2

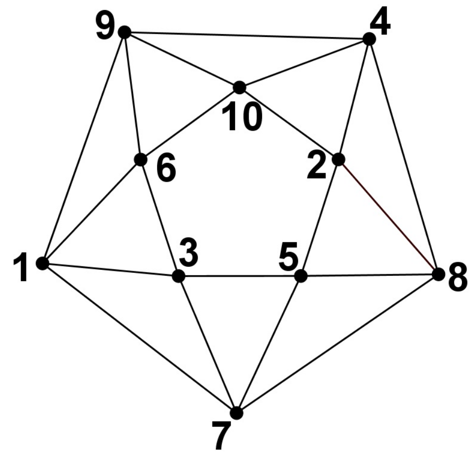

Рис. 3

Доказательство теоремы 3.2 в случае додекаэдра. Далее P — додекаэдр. Выше представлены диаграмма Шлегеля для додекаэдра (рис. 2) и полный подкомплекс двойственного комплекса $\mathcal{K}_P$, натянутый на множество вершин $\{1,\dots,10\}$ (см. рис. 3).

Рассмотрим следующие три набора вершин симплициального комплекса $\mathcal{K}_P$ (см. рис. 4):

$$J_1=\{1,2,7,9\},\ J_2=\{3,4\},\ J_3=\{5,6,10\}. \tag{3.2}$$

Обозначим через $\chi_{I,J}$, $I\in\mathcal{K}_J$ базисную симплциальную коцепь в комплексе $\mathcal{K}_J$, равную 1 на симплексе I. Определим классы α,β,γ. Пусть

$$\alpha=[\chi_{2,J_1}]\in\widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{J_1})\subset H^5(\mathcal{Z}_{\mathcal{P}}),\ \ \beta=[\chi_{3,J_2}]\in\widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{J_2})\subset H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{P}}),$$

$$\gamma=[\chi_{5,J_3}]\in\widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{J_3})\subset H^4(\mathcal{Z}_{\mathcal{P}}). \tag{3.3}$$

Мы рассматриваем $\widetilde{H}^i(\mathcal{K}_J)$ как подгруппы в $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{P}})$ в силу изоморфизма (2.7). Так как $\widetilde{H}^p(\mathcal{K}_J)\cdot\widetilde{H}^q(\mathcal{K}_I)\subset\widetilde{H}^{p+q+1}(\mathcal{K}_{I\cup J})$, получаем, что

$$\alpha\beta\in\widetilde{H}^1(\mathcal{K}_{J_1\cup J_2}),\beta\gamma\in\widetilde{H}^1(\mathcal{K}_{J_2\cup J_3}). \tag{3.4}$$

Мы имеем $\widetilde{H}^1(\mathcal{K}_{J_1\cup J_2})=\widetilde{H}^1(\mathcal{K}_{J_2\cup J_3})=0$, поскольку $\mathcal{K}_{J_1\cup J_2}$ и $\mathcal{K}_{J_2\cup J_3}$ стягиваемы. Таким образом, $\alpha\beta=\beta\gamma=0$, и произведение Масси $\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle$ определено. Далее,

$$\chi_{2,J_1}\cdot\chi_{3,J_2}=0,\ \ \chi_{3,J_2}\cdot\chi_{5,J_3}=\pm\chi_{\{3,5\},J_2\cup J_3}=d(\pm\chi_{5,J_2\cup J_3}), \tag{3.5}$$

так как умножение (2.5) в алгебре $\bigoplus\limits_{p\geqslant 0,\ J\subset[m]} C^{p-1}(\mathcal{K}_J)$ совпадает с умножением в алгебре $C^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{P}})$ с точностью до знака. Далее,

$$\chi_{2,J_1}\cdot(\pm\chi_{5,J_2\cup J_3})=\pm\chi_{\{2,5\},J_1\cup J_2\cup J_3}, \tag{3.6}$$

причем $\pm[\chi_{\{2,5\},J_1\cup J_2\cup J_3}] \neq 0$, так как это образующая в $H^1(\mathcal{K}_{J_1\cup J_2\cup J_3}) = \mathbb{Z}$. Тогда

$$\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle = \pm[\chi_{\{2,5\},J_1\cup J_2\cup J_3}] + \alpha\cdot H^6(\mathcal{Z}_\mathcal{P}) + \gamma\cdot H^7(\mathcal{Z}_\mathcal{P}) \subset H^{11}(\mathcal{Z}_\mathcal{P}). \qquad (3.7)$$

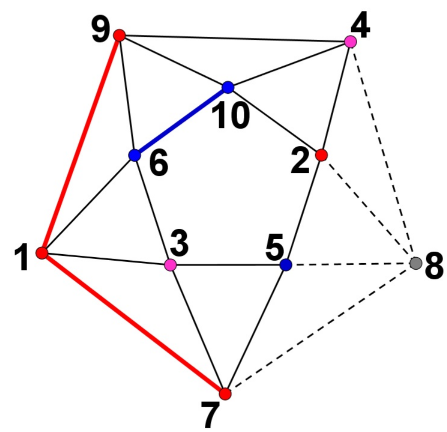

Рис. 4

Докажем, что данное произведение Масси $\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle$ нетривиально. От противного, пусть $0 \in \langle\alpha,\beta,\gamma\rangle$. Тогда $\exists\nu \in H^6(\mathcal{Z}_\mathcal{P}), \exists\mu \in H^7(\mathcal{Z}_\mathcal{P})$, такие что $0 = \pm[\chi_{\{2,5\},J_1\cup J_2\cup J_3}] + \alpha\cdot\nu + \gamma\cdot\mu$. Поскольку $\alpha \in \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{J_1})$, $\gamma \in \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{J_3})$, $[\chi_{\{2,5\},J_1\cup J_2\cup J_3}] \in \widetilde{H}^1(\mathcal{K}_{J_1\cup J_2\cup J_3})$, то из соображений размерности можно считать, что $\nu \in \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{J_2\cup J_3})$, $\mu \in \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{J_1\cup J_2})$. Но $\mathcal{K}_{J_1\cup J_2}$ и $\mathcal{K}_{J_1\cup J_2}$ стягиваемы, следовательно, $\mu = 0, \nu = 0$. Тогда $0 = \pm[\chi_{\{2,5\},J_1\cup J_2\cup J_3}]$, противоречие. $\square$

В случае произвольного фуллерена используется следующее комбинаторное утверждение.

Лемма 3.3. *Пусть P — фуллерен, F_1 — его 5-угольная грань. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1. *Грани $F_1^{(1)},\dots,F_5^{(1)}$, окружающие F_1, образуют 5-пояс.*
2. *Грани $F_1^{(2)},\dots,F_k^{(2)}$, окружающие пояс $(F_1^{(1)},\dots,F_5^{(1)})$, образуют k-пояс.*

Доказательство. Утверждение 1 следует из теоремы 2.6 . Докажем утверждение 2. От противного, пусть $F_1^{(2)},\dots,F_k^{(2)}$ не является k-поясом. Случай (1): некоторые грани среди $F_1^{(2)},\dots,F_k^{(2)}$ совпадают, например $F_i^{(2)}$ и $F_j^{(2)}$. Тогда существуют такие номера s,t, что грани $F_i^{(2)}, F_s^{(1)}, F_1, F_t^{(1)}, F_j^{(2)}$, образуют 4-пояс ($F_i^{(2)} = F_j^{(2)}$). Это невозможно, так как по теореме 2.5 фуллерен не содержит 4-поясов. Случай (2): некоторые грани среди $F_1^{(2)},\dots,F_k^{(2)}$ пересекаются, например $F_i^{(2)}$ и $F_j^{(2)}$, причем $\{i,j\} \notin \{\{1,2\},\dots,\{k-1,k\},\{k,1\}\}$. Тогда существуют такие номера s,t, что грани $F_i^{(2)}, F_s^{(1)}, F_1, F_t^{(1)}, F_j^{(2)}$, образуют 5-пояс, он содержит 5-угольную грань F_1. Легко видеть, что этот пояс не окружает никакую 5-угольную грань. Таким образом, по теореме 2.6 мы приходим к противоречию, так как данный 5-пояс не состоит целиком из 6-угольников. Оба случая невозможны, следовательно, грани $F_1^{(2)},\dots,F_k^{(2)}$ образуют k-пояс. $\square$

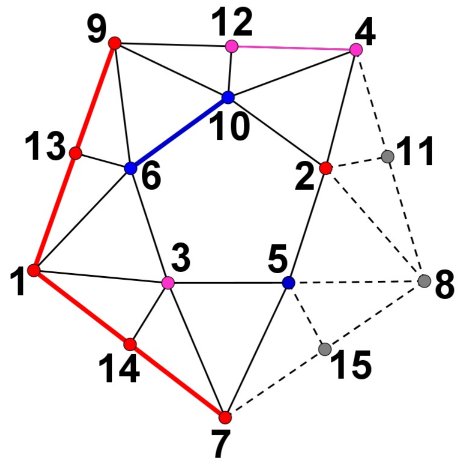

Рис. 5

Доказательство теоремы 3.2 в случае произвольного фуллерена. Рассмотрим произвольную 5-угольную грань фуллерена (она всегда есть, так как в любом фуллерене ровно двенадцать 5-угольных граней). По теореме 2.6 эта грань окружена 5-поясом G_1, который, в свою очередь, окружен k-поясом G_2. Рассмотрим полный подкомплекс двойственного комплекса $\mathcal{K}_P$, натянутый на множество вершин двух бесхордовых циклов C_1 и C_2, соответствующих двух поясам G_1 и G_2. Например, на рис. 5 бесхордовый цикл, соответствующий поясу G_1, есть $C_1 = \{2, 5, 3, 6, 10\}$, а бесхордовый цикл, соответствующий поясу G_2, есть $C_2 = \{1, 13, 9, 12, 4, 11, 8, 15, 7, 14\}$. Заметим, что этот симплициальный комплекс, натянутый на множество вершин C_1 и C_2, отличается от симплициального комплекса, изображенного на рис. 4, валентностью вершин цикла C_1. Таким образом, мы можем определить множества J_1, J_2, J_3 аналогично, включив в них дополнительные вершины:

$$J_1 = \{1, 2, 7, 9, 13, 14\},\ J_2 = \{3, 4, 12\},\ J_3 = \{5, 6, 10\}. \tag{3.8}$$

Каждая из новых вершин $(11, 12, 13, 14, 15)$ может присутствовать в комплексе или отсутствовать, в зависимости от валентности вершины цикла C_1, или, иначе говоря, в зависимости от количества сторон у граней пояса G_1. Однако, несмотря на новые вершины, доказательство дословно переносится с предыдущего случая, а именно: классы α, β, γ определяются точно так же, соответствующие полные подкомплесы стягиваемы и произведение Масси оказывается нетривиальным по тем же причинам. □

Список литературы

[1] V. M. Buchstaber, T. E. Panov. *Toric Topology.* Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[2] G. Denham, A. I. Suciu. *Moment-angle complexes, monomial ideals, and Massey products.* Pure Appl. Math. Q., 3:1 (2007), 25–60.

[3] V. M. Buchstaber, N. Yu. Erokhovets. *Fullerenes, Polytopes and Toric Topology.* Lecture Note Series, IMS, National University of Singapore; arXiv:1609.02949.

[4] И. В. Баскаков. *Тройные произведения Масси в когомологиях момент-угол комплексов.* УМН, 58:5(353) (2003), 199–200; Russian Math. Surveys, 58:5 (2003), 1039–1041.

[5] И. Ю. Лимонченко. *Произведения Масси в когомологиях момент-угол-многообразий 2-усеченных кубов.* УМН, 71:2(428) (2016), 207–208; Russian Math. Surveys, 71:2 (2016), 376–378.

[6] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, М. Масуда, Т. Е. Панов, С. Пак. *Когомологическая жёсткость многообразий, задаваемых трёхмерными многогранниками.* УМН, 72:2 (2017), 3-66.