Произведения Масси в когомологиях момент-угол многообразий, соответствующих многогранникам класса Погорелова

Е. Г. Журавлева

УДК 515.14, 515.16

Аннотация

В этой работе построены нетривиальные произведения Масси в когомологиях момент-угол многообразий, соответствующих многогранникам класса Погорелова. Этот класс включает додекаэдр, а также все фуллерены — простые трёхмерные многогранники только с 5-угольными и 6-угольными гранями. Наличие нетривиальных произведений Масси влечёт неформальность рассматриваемых пространств в смысле рациональной теории гомотопий.

Ключевые слова: произведения Масси, момент-угол комплексы, многогранники Погорелова, фуллерены.

1 Введение

В работе рассматривается вопрос существования нетривиальных тройных произведений Масси в когомологиях момент-угол многообразий, соответствующих трёхмерным простым многогранникам P. Как показано в [1], такие многообразия $\mathcal{Z}_P$ представляют собой гладкие двусвязные многообразия размерности $m+3$, где m — количество двумерных граней в многограннике P. Первые примеры момент-угол многообразий с нетривиальными тройными произведениями Масси были построены И. В. Баскаковым в работе [2]. И. Ю. Лимонченко в [3] построил семейство момент-угол многообразий с нетривиальными n-кратными произведениями Масси для любого n.

Класс Погорелова простых трёхмерных многогранников представляет самостоятельный интерес. Этот класс состоит из комбинаторных трёхмерных простых многогранников, которые не имеют 3-поясов и 4-поясов двумерных граней. Известно, что класс многогранников Погорелова состоит в точности из таких трёхмерных комбинаторных многогранников, которые допускают реализацию с прямыми двугранными углами в пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^3$, и такая реализация единственна с точностью до изометрии (см. [4], [5], [6]). Имеется семейство гиперболических трёхмерных многообразиий, ассоциированных с многогранниками Погорелова, известное как семейство гиперболических многообразий типа Лёбеля. (см. [7]). Момент-угол многообразия, соответствующие многогранникам Погорелова, важны для изучения топологии гиперболических многообразий типа Лёбеля, а также для исследования когомологической жёсткости 6-мерных (квази)торических многообразий.

Известно, что в когомологиях момент-угол многообразий, соответствующих многогранникам Погорелова, любое тройное произведение Масси трёхмерных классов когомологий тривиально (см. [6]). Для когомологических классов большей размерности вопрос существования нетривиальных произведений Масси оставался открытым. Мы доказываем, что для произвольного многогранника Погорелова P в когомологиях соответствующего момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$ существует нетривиальное тройное произведение Масси. Отсюда следует, что все такие многообразия $\mathcal{Z}_P$ неформальны.

Наша конструкция нетривиальных произведений Масси основывается на комбинаторном описании когомологий момент-угол комплексов и определённых комбинаторных свойствах многогранников Погорелова. Класс Погорелова включает в себя фуллерены (простые трёхмерные многогранники только с 5-угольными и 6-угольными гранями), в частности, додекаэдр.

Автор благодарит своего научного руководителя Тараса Евгеньевича Панова за постановку задачи и его постоянное внимание к работе.

2 Предварительные сведения

Пусть $A = \bigoplus\limits_{i\geqslant 0} A^i$ — коммутативная дифференциальная градуированная алгебра над $\mathbb{Z}$. Пусть $\alpha_i \in H^{k_i}(A), i = 1,2,3$ такие, что $\alpha_1\alpha_2 = 0$, $\alpha_2\alpha_3 = 0$ в $H(A)$. Выберем представителей: $[a_i] = \alpha_i$, $a_i \in A^{k_i}$, $i = 1,2,3$. Так как попарные произведения классов когомологий обнуляются, мы имеем $a_1a_2 = da_{12}$ и $a_2a_3 = da_{23}$ для некоторых элементов $a_{12} \in A^{k_1+k_2-1}$ и $a_{23} \in A^{k_2+k_3-1}$. Легко проверить, что элемент

$$b = (-1)^{k_1+1}a_1a_{23} + a_{12}a_3$$

является коциклом в $A^{k_1+k_2+k_3-1}$.

Тройным произведением Масси $\langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle$ называется множество в $H^{k_1+k_2+k_3-1}(A)$, состоящее из элементов, полученных вышеописанной процедурой. Так как элементы a_{12} и a_{23} определены с точностью до коциклов в $A^{k_1+k_2-1}$ и $A^{k_2+k_3-1}$ соответственно, то, более точно:

$$\langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle = [b] + \alpha_1 H^{k_2+k_3-1} + \alpha_3 H^{k_1+k_2-1}.$$

При этом множество $\alpha_1 H^{k_2+k_3-1} + \alpha_3 H^{k_1+k_2-1}$ называется *неоднозначностью* произведения Масси $\langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle$.

Произведение Масси называется *тривиальным*, если $0 \in \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$, и *нетривиальным* в обратном случае.

Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m] = \{1, \ldots, m\}$. *Момент-угол комплексом* (см. [1]), соответствующим симплициальному комплексу $\mathcal{K}$, называется топологическое пространство

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\prod_{i \in I} D^2) \times (\prod_{i \notin I} S^1) \subseteq (D^2)^m.$$

Важный класс симплициальных комплексов $\mathcal{K}$ происходит из простых многогранников. Напомним, что n-мерный многогранник P называется *простым*, если каждая вершина содержится в точности в n гипергранях. Обозначим через $\mathcal{K}_P$ симплициальный комплекс двойственный к границе простого многогранника P. Более точно, если $\{F_1, \ldots, F_m\}$ — грани коразмерности 1 в многограннике P, то

$$\mathcal{K}_P = \{\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq [m] : F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k} \neq \varnothing\}.$$

Заметим, что $\mathcal{K}_P$ — триангуляция $(n-1)$-мерной сферы.

Теорема 2.1 ([1, Theorem 6.2.4, Corollary 6.2.5])**.** *$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является клеточным комплексом. А если $\mathcal{K} = \mathcal{K}_P$ для простого P, то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_\mathcal{P}}$ является гладким многообразием.*

Пусть $I = \{i_1, \ldots i_k\}$ — симплекс, причём $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. Обозначим через v_I мономы $v_{i_1} \cdots v_{i_k}$ в алгебре многочленов $\mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]$, и через u_I — мономы $u_{i_1} \cdots u_{i_k}$ во внешней алгебре $\Lambda[u_1, \ldots, u_m]$. *Кольцом граней* симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$ называется факторкольцо алгебры многочленов по идеалу, порождённому мономами, которым не соответствуют симплексы в $\mathcal{K}$:

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]/\mathcal{I}_{\mathcal{K}},$$

где $\mathcal{I}_{\mathcal{K}} = (v_I : I \notin \mathcal{K})$ — идеал Стенли–Райснера.

Введем фактор-алгебру

$$R^*(\mathcal{K}) = \Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}]/(v_i^2 = u_i v_i = 0, 1 \leqslant i \leqslant m).$$

Тогда $R^*(\mathcal{K})$ является биградуированной дифференциальной алгеброй с аддитивным базисом $\{u_J v_I\}$, где $I \in \mathcal{K}$, $J \subseteq [m]$, $I \cap J = \varnothing$;

$$\operatorname{bideg} u_i = (-1, 2), \operatorname{bideg} v_i = (0, 2), du_i = v_i, dv_i = 0.$$

Далее, для удобства на алгебре $R^*(\mathcal{K})$ рассматривается $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^m$-градуировка:

$$\operatorname{mdeg} u_i = (-1; 2e_i), \operatorname{mdeg} v_i = (0; 2e_i),$$

где e_i, $i = 1, \ldots, m$ — элементы стандартного базиса в $\mathbb{Z}^m$.

В доказательстве существования нетривиального произведения Масии важную роль играет мультиградуировка алгебры клеточных коцепей $C^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$, индуцированная из стандартного клеточного разбиения. Как следствие, мы имеем мультиградуированную структуру на алгебре $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$.

Теорема 2.2 ([1, Lemma 4.5.3]). *Имеет место изоморфизм дифференциальных градуированных алгебр:*

$$R^*(\mathcal{K}) \cong C^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}),$$

где $C^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ — алгебра клеточных коцепей с естественным умножением, индуцирующим стандартное произведение в когомологиях.

Пусть дано множество $J \subseteq [m]$. Определим *полный подкомплекс $\mathcal{K}_J$* симплициального комплекса $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K}_J = \{\, I \in \mathcal{K} \mid I \subseteq J \,\}.$$

Для каждого $\mathcal{K}_J$ рассмотрим коаугментированный комплекс симплициальных коцепей $(C^*(\mathcal{K}_J), d)$. Группа $C^p(\mathcal{K}_J)$ является свободной абелевой группой с базисом χ_L, где χ_L — характеристическая функция симплекса $L \in \in \mathcal{K}_J$, $|L| = p+1$.

Теорема 2.3 ([1, Theorem 3.2.4]). *Имеет место изоморфизм коцепных комплексов $(C^*(\mathcal{K}_J), d)$ и $(R^{*-|J|+1,2J}(\mathcal{K}), d)$:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_{-1}"', "\cong"] & C^0(\mathcal{K}_J) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_0"', "\cong"] & \cdots \arrow[r, "d"] & C^{p-1}(\mathcal{K}_J) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_{p-1}"', "\cong"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & R^{-|J|,\,2J} \arrow[r, "d"] & R^{-|J|+1,\,2J} \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & R^{-|J|+p,\,2J} \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

где $f_p(\chi_L) = \varepsilon(L,J) u_{J \setminus L} v_L$, $\varepsilon(L,J)$ — некоторый знак.

Таким образом, мы получаем изоморфизм дифференциальных градуированых алгебр

$$C^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong R^*(\mathcal{K}) \cong \bigoplus_{p \geqslant 0,\, J \subseteq [m]} C^{p-1}(\mathcal{K}_J), \tag{2.1}$$

а также

$$H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong H(R^*(\mathcal{K})) \cong \bigoplus_{p \geqslant 0,\, J \subseteq [m]} \widetilde{H}^{p-1}(\mathcal{K}_J).$$

Умножение на прямой сумме симплициальных коцепей — это умножение, перенесенное из алгебры $R^*(\mathcal{K})$ с помощью изоморфизма (2.1).
Так как алгебры $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ и $H(R^*(\mathcal{K}))$ мультиградуированны, мы имеем:

$$H^{-p,2J}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong H^{-p,2J}(R^*(\mathcal{K})) \cong \widetilde{H}^{-p+|J|-1}(\mathcal{K}_J) \subset H^{-p+2|J|}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}).$$

Теорема 2.4 ([1, Proposition 3.2.10]). *Произведение на* $\bigoplus\limits_{p\geqslant 0,\, J\subseteq[m]} C^{p-1}(\mathcal{K}_J)$, *индуцированное из алгебры* $R^*(\mathcal{K})$, *совпадает с точностью до знака с произведением, индуцированным отображениями*

$$\mu\colon C^{p-1}(\mathcal{K}_I)\times C^{q-1}(\mathcal{K}_J)\to C^{p+q-1}(\mathcal{K}_{I\cup J}),$$
$$(\chi_L,\chi_M)\mapsto \begin{cases}\chi_{L\sqcup M}, & \textit{if } I\cap J=\varnothing, L\sqcup M\in\mathcal{K}_{I\sqcup J}\\ 0, & \textit{otherwise},\end{cases}, \tag{2.2}$$

где χ_L *— характеристическая функция симплекса* L.

Простой n-мерный многогранник P называется *флаговым*, если любой набор его попарно пересекающихся гиперграней $F_{i_1},\dots,F_{i_k}$, $F_{i_s}\cap F_{i_t}\neq\varnothing$, $s,t=1,\dots,k$, имеет непустое пересечение $F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_k}\neq\varnothing$.

Пусть P — простой 3-мерный многогранник. Пусть $F_1,\dots,F_m$ — его гиперграни. Назовем *k-поясом* циклическую последовательность $(F_{i_1},\dots,F_{i_k})$ гиперграней, в которой каждая гипергрань пересекается только с соседними. Более точно: $F_{i_{j_1}}\cap\dots\cap F_{i_{j_r}}\neq\varnothing$ тогда и только тогда, когда $\{j_1,\dots,j_r\}\in$ $\in\{\{1,2\},\{2,3\},\dots,\{k-1,k\},\{k,1\}\}$. Заметим, что k-пояс соответствует бесхордовому циклу в двойственном комплексе $\mathcal{K}_P$, который является триангуляцией 2-мерной сферы.

Предложение 2.5 ([8, Proposition 2.3]). *Простой 3-мерный многогранник P является флаговым тогда и только тогда, когда $P\neq\Delta^3$ и P не содержит 3-пояса.*

Предложение 2.6 ([8, Proposition 2.5]). *Простой 3-мерный многогранник P является флаговым тогда и только тогда, когда каждая его гипергрань окружена k-поясом, где k — это количество рёбер у данной гиперграни.*

Будем говорить, что многогранник P принадлежит *классу Погорелова* $\mathcal{P}$ (или что P — *многогранник Погорелова*), если P — простой флаговый 3-мерный многогранник, не содержащий 4-пояса. В размерности 3 класс комбинаторных многогранников, допускающих реализацию с прямыми двугранными углами в пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^3$, совпадает с классом многогранников Погорелова. Из предложения 2.5 следует, что $P\in\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда $P\neq\Delta^3$ и P — простой 3-мерный многогранник, не содержащий 3-пояса и 4-пояса.

Следствие 2.7. *Многогранник P, принадлежащий классу Погорелова, не содержит 3-угольные и 4-угольные грани.*

Имеется следующее характеристическое свойство многогранников Погорелова.

Теорема 2.8 ([6, Proposition B.2 (b)]). *Простой 3-мерный многогранник P является многогранником Погорелова тогда и только тогда, когда любая пара смежных гиперграней многогранника P окружена k-поясом; если каждая из гиперграней содержит k_1 и k_2 рёбер соответственно, то $k = k_1 + k_2 - 4$.*

3 Произведения Масси и многогранники Погорелова

Для момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ мы имеем следующее тройное произведение Масси наименьшей размерности:

$$H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \to H^8(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}). \tag{3.1}$$

Тройные произведения Масси трёхмерных классов когомологий были полностью описаны Денхамом (Denham) и Сушю (Suciu) в [9]:

Теорема 3.1 ([9, Theorem 6.1.1]). *Следующие условия эквивалентны:*

(1) существуют классы когомологий $\alpha, \beta, \gamma \in H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$, для которых произведение Масси $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ определено и нетривиально;

(2) граф $\mathcal{K}^1$ (одномерный остов $\mathcal{K}$) содержит индуцированный подграф, изоморфный одному из пяти графов, изображённых на рис. 1.

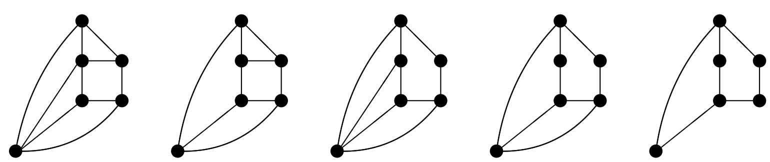

Рис. 1

Рассмотрим теперь вопрос существования нетривиальных произведений Масси в $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{P}})$ для многогранников Погорелова P. Как отмечено в ([6, Proposition 4.8]), тройное произведение Масси трёхмерных классов когомологий (3.1) тривиально для простых многогранников P без 4-поясов, в частности, для многогранников из класса Погорелова.

В данной работе доказано следующее утверждение:

Теорема 3.2. *Для любого многогранника Погорелова P в когомологиях момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_{\mathcal{P}}$ существует нетривиальное тройное произведение Масси $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle \subset H^{n+4}(\mathcal{Z}_{\mathcal{P}})$ для некоторого $n \geqslant 5$, где $\alpha \in H^4(\mathcal{Z}_{\mathcal{P}})$, $\beta \in H^{n-2}(\mathcal{Z}_{\mathcal{P}})$, $\gamma \in H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{P}})$. Число n описано в следующей лемме. Неоднозначность данного произведения Масси имеет вид $\alpha \cdot H^n(\mathcal{Z}_{\mathcal{P}}) + \gamma \cdot H^{n+1}(\mathcal{Z}_{\mathcal{P}})$.*

Лемма 3.3. *Для любого многогранника Погорелова P существует набор попарно различных граней $\{F_1, \dots F_{l+n-1}\}$ для некоторых натуральных $n \geqslant 5$ и $l \geqslant 5$ такой, что полный подкомплекс $\mathcal{K}_{\{1,\dots,l+n-1\}}$ комплекса $\mathcal{K}_P$, натянутый на соответствующие вершины, будет таким, как изображено на рис. 2. Иными словами, существуют три гиперграни F_1, F_2, F_3, окружённые поясом.*

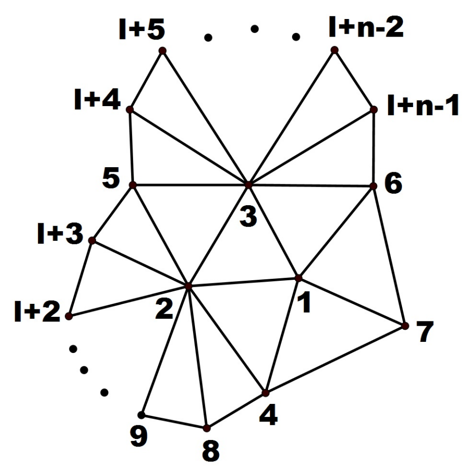

Рис. 2

Доказательство. Для простого 3-мерного многогранника P по теореме Эйлера имеем равенство

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 = 12 + \sum_{k \geqslant 7} (k-6)p_k,$$

где p_k – это количество k-угольных граней. Так как $P \in \mathcal{P}$, то $p_3 = 0, p_4 = 0$, а значит $p_5 \geqslant 12$. В частности, $p_5 \geqslant 1$.

Зафиксируем произвольную 5-угольную грань F_1 многогранника P. Рассмотрим вершину $v \in F_1$. Так как P — простой, то в вершине v сходится ровно 3 гиперграни F_1, F_2, F_3. Пусть F_2 и F_3 — l-угольная и n-угольная грани соответственно, обозначим это следующим образом: $|F_2| = l$, $|F_3| = n$. Из простоты многогранника также следует, что каждые 2 гиперграни 3-мерного многогранника P или не пересекаются, или пересекаются в точности по ребру (т. е. смежны). Таким образом, $F_1 \cap F_2 = e_{12}$, $F_2 \cap F_3 = e_{23}$, $F_1 \cap F_3 = e_{13}$, $v \in e_{ij}$. Существует в точности 2 гиперграни, пересекающие $F_1 \cap F_2 = e_{12}$ ровно в одной вершине. Одна из граней — F_3, вторую обозначим через F_4. Аналогично получаем, что $F_2 \cap F_3$ пересекает F_1 и F_5, $F_1 \cap F_3$ — F_2 и F_6. Так как P — флаговый, то каждая из гиперграней $F \subset P$ окружена k-поясом, где $k = |F|$. Из этого следует, что грань F_1 окружена 5-поясом, причем этот пояс содержит F_2 и F_6, следовательно, они не пересекаются. Аналогично получаем, что $F_3 \cap F_4 = \varnothing$, $F_1 \cap F_5 = \varnothing$. Рассмотрим двойственный комплекс $\mathcal{K}_P$, в котором грани F_i соответствует вершина i. Из вышесказанного следует, что полный подкомплекс $\mathcal{K}_{\{1,\ldots,6\}}$ симплициального комплекса $\mathcal{K}_P$ будет в точности таким, как показано на рис. 3.

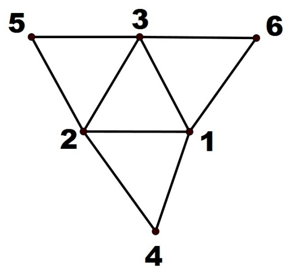

Рис. 3

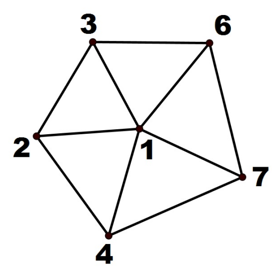

Рис. 4

Пятиугольная грань F_1 пересекается с каждой из граней F_6, F_3, F_2, F_4 по ребру. Оставшееся ребро данной грани есть пересечение F_1 и некоторой грани F_7. Грань F_1 окружена 5-поясом, и симплициальный комплекс $\mathcal{K}_{\{1,2,3,4,6,7\}}$ изображен на рис. 4.

Определим множество $\mathcal{G}_2$, состоящее из гипеграней, пересекающихся с гранью F_2, но не совпадающих с гранями $F_1, \ldots, F_6$:

$$\mathcal{G}_2 = \{F \subset P \mid F \cap F_2 \neq \varnothing, F \neq F_i, i = 1, \ldots, 6\}.$$

Легко видеть, что

$$\mathcal{G}_2 = \{F \subset P \mid F \cap F_2 \neq \varnothing, F \cap F_1 = \varnothing, F \cap F_3 = \varnothing\}.$$

Так как $|F_2| = l$, то $|\mathcal{G}_2| = l - 4$. Грани из $\mathcal{G}_2$ пересекаются с F_2, а значит, принадлежат l-поясу, окружающему данную грань. Данному l-поясу в двойственном комплексе $\mathcal{K}_P$ соответствует бесхордовый цикл, следовательно, грани из $\mathcal{G}_2$ можно занумеровать:

$$\mathcal{G}_2 = \{F_8, \ldots, F_{l+3} \mid F_8 \cap F_4 \neq \varnothing, F_{l+3} \cap F_5 \neq \varnothing\}.$$

Полный подкомплекс $\mathcal{K}_{\{1,\dots,5,8,\dots l+3\}}$ будет в точности таким, как показано на рис.5.

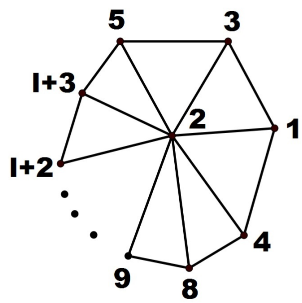

Рис. 5

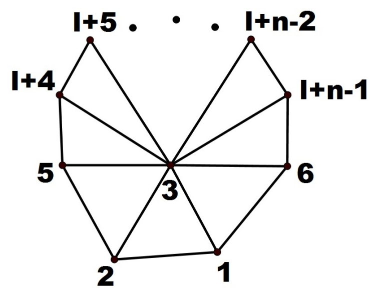

Рис. 6

Аналогично, для грани F_3 определим множество $\mathcal{G}_3$:

$$\mathcal{G}_3 = \{F \subset P \mid F \cap F_3 \neq \varnothing, F \neq F_i, i = 1, \dots, 6\}.$$

Так как $\mathcal{G}_3 = n - 4$, также будет верно, что

$$\mathcal{G}_3 = \{F \subset P \mid F \cap F_3 \neq \varnothing, F \cap F_1 = \varnothing, F \cap F_2 = \varnothing\},$$

$$\mathcal{G}_3 = \{F_{l+4}, \dots, F_{l+n-1} \mid F_{l+4} \cap F_5 \neq \varnothing, F_{l+n-1} \cap F_6 \neq \varnothing\}.$$

Полный подкомплекс $\mathcal{K}_{\{1,2,3,5,6,l+4\dots,l+n-1\}}$ изображён на рис. 6.

Комплексы, показанные на рис. 3, 4, 5 и 6 являются частями комплекса на рис. 2. Для доказательства леммы осталось проверить, что они соединяются воедино правильным образом. Таким образом, надо показать, что если $F_i \in \mathcal{G}_2$, $F_j \in \mathcal{G}_3$, то $F_i \cap F_j = \varnothing, F_7 \cap F_j = \varnothing, F_i \cap F_7 = \varnothing$; в частности, гиперграни F_i, F_j, F_7 различны. Так как P — многогранник Погорелова, то по теореме 2.8 пара смежных граней F_1 и F_2 окружена $(l+1)$-поясом $(F_4, F_8, \dots, F_{l+3}, F_5, F_3, F_6, F_7)$, следовательно, грани из этого цикла различны и пересекаются только последовательно. Тогда, так как $\mathcal{G}_2 = \{F_8, \dots, F_{l+3}\}$, то $F_i \cap F_7 = \varnothing$, если $F_i \in \mathcal{G}_2$. Аналогично, рассматривая пары смежных граней F_2, F_3 и F_3, F_1, получаем, что $\mathcal{G}_2 \cap \mathcal{G}_3 = \varnothing, F_7 \cap F_j = \varnothing$, если $F_j \in \mathcal{G}_3$. В частности, $(F_4, F_8, \dots, F_{l+3}, F_5, F_{l+4}, \dots, F_{l+n-1}, F_6, F_7)$ является $(l+n-4)$-поясом, окружающим тройку граней $\{F_1, F_2, F_3\}$. $\square$

Доказательство теоремы 3.2. В обозначениях рис. 2 рассмотрим следующие три набора вершин симплициального комплекса $\mathcal{K}_P$ (см. рис. 7):

$$J_1 = \{5, 6, 7\},\ J_2 = \{2, l+4, \dots, l+n-1\},\ J_3 = \{3, 4\}.$$

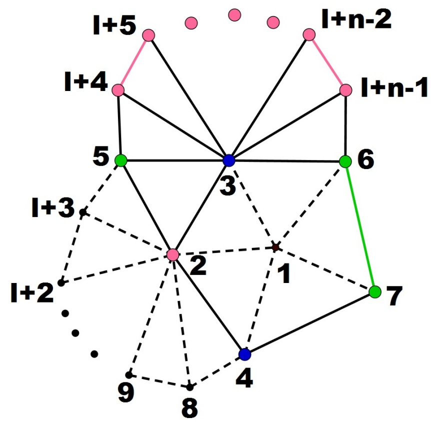

Рис. 7.

Для каждого $I \in \mathcal{K}_J$ обозначим через $\chi_{I,J}$ базисную $(|I|-1)$-мерную симплциальную коцепь комплекса $\mathcal{K}_J$, равную 1 на симплексе I. Определим классы α, β, γ:

$$\alpha = [\chi_{6,J_1} + \chi_{7,J_1}] \in \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{J_1}) \subset H^4(\mathcal{Z}_\mathcal{P}),$$

$$\beta = [\chi_{2,J_2}] \in \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{J_2}) \subset H^{n-2}(\mathcal{Z}_\mathcal{P}),$$

$$\gamma = [\chi_{4,J_3}] \in \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{J_3}) \subset H^3(\mathcal{Z}_\mathcal{P}).$$

Мы рассматриваем $\widetilde{H}^i(\mathcal{K}_J)$ как подгруппы в $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{P})$ в силу изоморфизма (2.7). Так как $\widetilde{H}^p(\mathcal{K}_J) \cdot \widetilde{H}^q(\mathcal{K}_I) \subset \widetilde{H}^{p+q+1}(\mathcal{K}_{I \cup J})$, получаем, что

$$\alpha\beta \in \widetilde{H}^1(\mathcal{K}_{J_1 \cup J_2}), \quad \beta\gamma \in \widetilde{H}^1(\mathcal{K}_{J_2 \cup J_3}).$$

Мы имеем $\widetilde{H}^1(\mathcal{K}_{J_1 \cup J_2}) = \widetilde{H}^1(\mathcal{K}_{J_2 \cup J_3}) = 0$, поскольку $\mathcal{K}_{J_1 \cup J_2}$ и $\mathcal{K}_{J_2 \cup J_3}$ стягиваемы. Таким образом, $\alpha\beta = \beta\gamma = 0$, и произведение Масси $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ определено. Далее,

$$(\chi_{6,J_1} + \chi_{7,J_1}) \cdot \chi_{2,J_2} = 0, \ \ \chi_{2,J_2} \cdot \chi_{4,J_3} = \pm \chi_{\{2,4\},J_2 \cup J_3} = \pm d(\chi_{4,J_2 \cup J_3}),$$

так как умножение (2.2) в алгебре $\bigoplus\limits_{p \geqslant 0,\, J \subseteq [m]} C^{p-1}(\mathcal{K}_J)$ совпадает с умножением в алгебре $C^*(\mathcal{Z}_\mathcal{P})$ с точностью до знака. Кроме того,

$$(\chi_{6,J_1} + \chi_{7,J_1}) \cdot (\pm \chi_{4,J_2 \cup J_3}) = \pm \chi_{\{4,7\},J_1 \cup J_2 \cup J_3},$$

причём $\pm[\chi_{\{4,7\},J_1 \cup J_2 \cup J_3}] \neq 0$, так как это порождающая группы $H^1(\mathcal{K}_{J_1 \cup J_2 \cup J_3}) = \mathbb{Z}$. Тогда

$$\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle = \pm [\chi_{\{4,7\},J_1 \cup J_2 \cup J_3}] + \alpha \cdot H^n(\mathcal{Z}_\mathcal{P}) + \gamma \cdot H^{n+1}(\mathcal{Z}_\mathcal{P}) \subset H^{n+4}(\mathcal{Z}_\mathcal{P}).$$

Докажем, что данное произведение Масси $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ нетривиально. От противного, пусть $0 \in \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$. Тогда существуют $\nu \in H^n(\mathcal{Z}_{\mathcal{P}})$ и $\mu \in$ $\in H^{n+1}(\mathcal{Z}_{\mathcal{P}})$ такие, что

$$0 = \pm[\chi_{\{4,7\}, J_1 \cup J_2 \cup J_3}] + \alpha \cdot \nu + \gamma \cdot \mu.$$

Поскольку $\alpha \in \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{J_1})$, $\gamma \in \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{J_3})$, $[\chi_{\{4,7\}, J_1 \cup J_2 \cup J_3}] \in \widetilde{H}^1(\mathcal{K}_{J_1 \cup J_2 \cup J_3})$, то из соображений мультиградуировки можно считать, что $\nu \in \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{J_2 \cup J_3})$, $\mu \in \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{J_1 \cup J_2})$. Но $\mathcal{K}_{J_1 \cup J_2}$ и $\mathcal{K}_{J_2 \cup J_3}$ стягиваемы, следовательно, $\mu = 0, \nu =$ $= 0$. Тогда $0 = \pm[\chi_{\{4,7\}, J_1 \cup J_2 \cup J_3}]$, что неверно. $\square$

Пример 3.4. Пусть P — додекаэдр, тогда $\mathcal{K}_P$ — это граница икосаэдра.

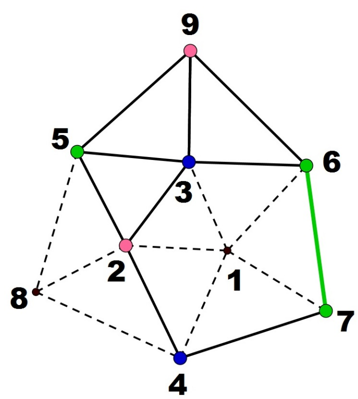

Рис. 8.

В этом случае мы имеем следующие множества вершин в $\mathcal{K}_P$ (см. рис. 8):

$$J_1 = \{5, 6, 7\},\ J_2 = \{2, 9\},\ J_3 = \{3, 4\}.$$

Соответствующие классы когомологий:

$$\alpha = [\chi_{6,J_1} + \chi_{7,J_1}] \in \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{J_1}) \subset H^4(\mathcal{Z}_{\mathcal{P}}),$$

$$\beta = [\chi_{2,J_2}] \in \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{J_2}) \subset H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{P}}),$$

$$\gamma = [\chi_{4,J_3}] \in \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{J_3}) \subset H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{P}}).$$

Мы получаем следующее нетривиальное произведение Масси:

$$\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle = \pm[\chi_{\{4,7\}, J_1 \cup J_2 \cup J_3}] \in H^9(\mathcal{Z}_{\mathcal{P}}).$$

Заметим, что в случае додекаэдра мы получили нетривиальное тройное произведение Масси наименьшей возможной размерности.

Список литературы

[1] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Toric Topology*, Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[2] И. В. Баскаков, “Тройные произведения Масси в когомологиях момент-угол комплексов”, УМН, 58:5(353) (2003), 199–200.

[3] И. Ю. Лимонченко, “Произведения Масси в когомологиях момент-угол-многообразий 2-усеченных кубов”, УМН, 71:2(428) (2016), 207–208.

[4] А. В. Погорелов, “О правильном разбиении пространства Лобачевского”, Матем. заметки, 1:1 (1967), 3–8.

[5] Е. М. Андреев, “О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского”, Матем. сб., 81(123):3 (1970), 445–478.

[6] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, М. Масуда, Т. Е. Панов, С. Пак, “Когомологическая жёсткость многообразий, задаваемых трёхмерными многогранниками”, УМН, 72:2(434) (2017), 3–66.

[7] А. Ю. Веснин, “Трехмерные гиперболические многообразия типа Лебелля”, Сиб. матем. журн., 28:5 (1987), 50–53.

[8] V. M. Buchstaber, N. Yu. Erokhovets, *Fullerenes, Polytopes and Toric Topology.*, Combinatorial and Toric Homotopy, Introductory Lectures, Lecture Notes Series, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore (LNIMSNUS), 35, World Scientific, 2017, 67–178.

[9] G. Denham, A. I. Suciu, “Moment-angle complexes, monomial ideals, and Massey products”, Pure Appl. Math. Q. 3 (2007), no. 1, 25–60.