ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАССИ И ВЫСШИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ УАЙТХЕДА В ТОРИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ

Выполнил студент
603 группы
Журавлева Елизавета Григорьевна

____
подпись студента

Научный руководитель:
профессор Панов Тарас Евгеньевич

____
подпись научного руководителя

Москва
2019 г.

Содержание

Введение

В данной работе изучается пространство $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ — момент-угол комплекс, играющий важную роль в торической топологии. Известно, что гомотопическая алгебра Ли $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ для топологического пространства X является алгеброй Ли относительно произведения Самельсона (перенесенного произведения Уайтхеда), и поэтому для произведения Самельсона выполнено тождество Якоби. Имеется конструкция высшего n-местного произведения Уайтхеда, определяемая как некоторое подмножество в гомотопических группах. Для пространства $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$, тесно связанного с момент-угол комплексом $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, высшее произведение Уайтхеда можно определить каноническим образом как некоторый элемент в этом подмножестве. В данной работе мы доказываем, что произведения Самельсона для пространства $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$ с некоторыми условиями на симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ удовлетворяют некоторым обобщенным тождествам Якоби, происходящим из тождеств L_∞ алгебры. Для доказательства этого утверждения используется конструкция L_∞ алгебры на гомотопической алгебре Ли для пространства $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$.

Имеется теорема Кадеишвили, доказанная в [**7**], в которой утверждается, что если мы рассмотрим дифференциальную градуированную алгебру A как A_∞ алгебру, у которой все скобки, начиная с третьей, равны нулю, то имеется A_∞ структура на $H(A)$, квазиизоморфная структуре на A. Мы доказываем, что верна теорема Кадеишвили для L_∞ алгебр, следуя схеме доказательства из [**4**]. Также в работе доказывается, что произведение Уайтхеда можно восстановить, то есть для любого элемента x из произведения Уайтхеда существует такая L_∞ структура, что $\ell_k(x_1 \otimes \ldots \otimes x_k) = \pm x$. Теорема Кадеишвили и восстановление произведения Масси известны в случае A_∞ алгебр, доказательство в случае L_∞ структур проводится аналогично.

Структура работы имеет следующий вид.

В первом разделе приводятся известные факты из [**1**], касающиеся произведения Уайтхеда момент-угол комплекса, определяются канонические элементы.

Во втором разделе дается общее определение произведений Уайтхеда, а также рассказывается об алгебраическом подходе к произведениям Уайтхеда, освещенный в [**2**].

В третьем разделе определяются A_∞ алгебры и их основные свойства. Рассказывается про теорему Кадеишвили для A_∞ алгебр. Это освещено, например, в [**3**].

В четвертом разделе вводятся высшие произведения Масси, приводятся известные результаты из [**3**] о связи A_∞ структур и произведений Масси. В частности, в этом разделе упоминается утверждение о восстановлении элемента из произведения Масси A_∞ структурой.

В пятом разделе определяются L_∞ алгебры и их основные свойства, которые можно найти в [**2**].

В шестом разделе приводятся известные факты из [**2**] о связи произведений Уайтхеда и L_∞ структур.

В седьмом разделе мы доказываем теорему Кадеишвили для L_∞ алгебр.

В восьмом разделе мы доказываем, что элемент из произведения Уайтхеда можно восстановить, а в случае пространства $(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}$ восстановить одной L_∞ структурой можно целую группу элементов, откуда уже следуют некоторые обобщенные тождества Якоби.

1. Момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ и произведения Уайтхеда специального вида

Все объекты в данной работе понимаются над $\mathbb{Q}$.

Обозначение: $\deg(a) := |a|$.

Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m] = \{1, \ldots, m\}$. *Момент-угол комплексом* (см. [**1**]), соответствующим симплициальному комплексу $\mathcal{K}$, называется топологическое пространство

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} = \bigcup_{I\in\mathcal{K}} (\prod_{i\in I} D^2) \times (\prod_{i\notin I} S^1) \subseteq (D^2)^m.$$

Важную роль для описания свойств данного пространства играет следующее расслоение:

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} \to (\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K} \to (\mathbb{C}P^\infty)^m.$$

Мы можем взять петли от этой конструкции:

$$\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K} \longrightarrow \Omega\,(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K} \longrightarrow T^m.$$

Из точной последовательности расслоения (и тривиальности связывающего гомоморфизма) получаем точную последовательности алгебр Ли (относительно произведения Самельсона):

$$0 \longrightarrow \pi_*\,(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \pi_*\left(\Omega\,(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}\right) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow CL\,(u_1, \ldots, u_m) \longrightarrow 0,$$

где $CL\,(u_1, \ldots, u_m)$ обозначает коммутативную алгебру Ли с образующими u_i , deg $u_i = 1$.

Так как гомотопическая группа $\pi_2(X)$ для клеточного пространства X полностью определяется его 3-мерным остовом, имеем

$$\pi_2\left((\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}\right) \cong \pi_2\left((\mathbb{C}P^\infty)^m\right) \cong \mathbb{Z}^m.$$

Первое равенство выполнено, так как симплициальном комплексе $\mathcal{K}$ нет призрачных вершин.

Конструкция произведения Уайтхеда для $(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}$, а также следующие результаты изложены в [**1**].

Рассмотрим отображения $\widehat{\mu}_i, 1 \leqslant i \leqslant m$, которые являются представителями канонических порождающих группы $\pi_2\left((\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}\right)$:

$$\widehat{\mu}_i : S^2 \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty \longrightarrow (\mathbb{C}P^\infty)^{\vee m} \longrightarrow (\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K},$$

где левое отображение — это вложение в 2-остов, среднее отображение — вложение как i-е слагаемое букета, правое отображение — каноническое вложение, индуцированное вложением m-точечного комплекса в симплициальный комплекс $\mathcal{K}$.

Рассмотрим сопряженные к $\widehat{\mu}_i$ отображения:

$$\mu_i : S^1 \longrightarrow \Omega\,(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}.$$

Имеется комбинаторная классификация произведений Самельсона этих отображений.

Предложение 1.1. *Произведения Самельсона канонических классов* $\mu_i \in \pi_1\left(\Omega\left(\mathbb{C}P^\infty\right)^\mathcal{K}\right)$ *обладают следующими свойствами:*

$$[\mu_i, \mu_i]_s = 0, \quad [\mu_i, \mu_j]_s = 0 \quad \textit{тогда и только тогда, когда} \quad \{i, j\} \in \mathcal{K}.$$

Так как $\pi_k\left(T^m\right) = 0$ для $k \geqslant 2$, любое итерированное произведение Самельсона вида $\left[\mu_{i_1}, \left[\mu_{i_2}, \cdots \left[\mu_{i_{k-1}}, \mu_{i_k}\right] \cdots\right]\right]$ для $k \geqslant 2$ является тривиальным при отображении в T^m, и поэтому поднимается до отображения в $\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}$.

Произведение Уайтхеда $[\widehat{\mu}_i, \widehat{\mu}_j]_w : S^3 \to \left(\mathbb{C}P^\infty\right)^\mathcal{K}$ в случае пространства $\left(\mathbb{C}P^\infty\right)^\mathcal{K}$ обобщается следующим образом. Пусть $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \in \mathcal{K}$, при этом все собственные подграни лежат в $\mathcal{K}$, то есть $\partial\Delta \subset \mathcal{K}$.

Высшее k-местное произведение Уайтхеда $[\widehat{\mu}_{i_1}, \ldots, \widehat{\mu}_{i_k}]_w$ для пространства $\left(\mathbb{C}P^\infty\right)^\mathcal{K}$ — это элемент $\pi_{2k-1}\left(\left(\mathbb{C}P^\infty\right)^\mathcal{K}\right)$, определяющийся как композиция

$$[\widehat{\mu}_{i_1}, \ldots, \widehat{\mu}_{i_k}]_w : S^{2k-1} \xrightarrow{w} \left(S^2\right)^{\partial\Delta} \longrightarrow \left(\mathbb{C}P^\infty\right)^{\partial\Delta} \longrightarrow \left(\mathbb{C}P^\infty\right)^\mathcal{K},$$

где $\left(S^2\right)^{\partial\Delta}$ — это толстый букет k сфер, w — приклеивающее отображение $2k$-мерной клетки в произведении $\left(S^2\right)^I$, а последние 2 отображения индуцированы вложениями.

Высшее k-местное произведение Самельсона $[\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_k}]_s$ для пространства $\left(\mathbb{C}P^\infty\right)^\mathcal{K}$ определено как сопряженное к $[\widehat{\mu}_{i_1}, \ldots, \widehat{\mu}_{i_k}]_w$:

$$[\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_k}]_s : S^{2k-2} \longrightarrow \Omega\left(\mathbb{C}P^\infty\right)^\mathcal{K}$$

Произведения Уайтхеда и Самельсона для произвольных топологических пространств определяются как некоторые подмножества, точные определения будут даны позже. В случае $\left(\mathbb{C}P^\infty\right)^\mathcal{K}$ неоднозначность избегается, произведение задается как фиксированный элемент. Это связано с тем, что в данном частном случае имеются канонические продолжения отображений $\widehat{\mu}_i$.

Как и в случае стандартных (2-местных) произведений, высшие произведения Уайтхеда и Самельсона классов μ_i можно итерировать и поднять до отображения в $\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}$.

Предложение 1.2. *Любое итерированное произведение Уайтхеда* $\widehat{\nu} : S^p \to \left(\mathbb{C}P^\infty\right)^\mathcal{K}$ *канонических отображений* $\widehat{\mu}_i : S^2 \to \left(\mathbb{C}P^\infty\right)^\mathcal{K}$ *поднимается до отображения* $S^p \to \mathcal{Z}_\mathcal{K}$.

Аналогично, любое итерированное произведение Самельсона $\nu : S^{p-1} \to \Omega\left(\mathbb{C}P^\infty\right)^\mathcal{K}$ *отображений* $\mu_i : S^1 \to \Omega\left(\mathbb{C}P^\infty\right)^\mathcal{K}$ *поднимается до отображения* $S^{p-1} \to \Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}$.

Известно, что стандартное (2-местное) произведение Самельсона на пространстве $\pi_*\left(\Omega X\right) \otimes \mathbb{Q}$ определяет структуру алгебры Ли. Таким образом, 2-местное произведение Самельсона удовлетворяет тождеству Якоби. Однако неизвестно, удовлетворяют ли подобным свойствам k-местные произведения Самельсона. На этот вопрос мы и пытаемся ответить в некоторых частных случаях.

2. Произведения Уайтхеда: топологическое и алгебраическое определения

Следующие конструкции изложены в **[2]**.

Дадим общее определение произведения Уайтхеда в случае произвольного топологического пространства X.

Пусть даны сферы $S^{n_1}, \ldots, S^{n_k}$, обозначим через $W = S^{n_1} \vee \cdots \vee S^{n_k}$ и $T = T\left(S^{n_1}, \ldots, S^{n_k}\right)$ букет этих сфер и толстый букет соответственно. Рассмотрим приклеивающее отображение $\omega : S^{N-1} \to T$, $N = n_1 + \cdots + n_k$, для N-мерной клетки:

$$S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k} = T \cup_\omega e^N.$$

Пусть даны гомотопические классы $x_j \in \pi_{n_j}(X)$, $j = 1, \ldots, k$, рассмотрим индуцированное отображение $g = (x_1, \ldots, x_k) : W \to X$. Высшее k-местное произведение Уайтхеда определим как множество $[x_1, \ldots, x_k]_W \subset \pi_{N-1}(X)$:

$$\{f \circ \omega | f : T \to X \text{ — продолжение отображения } g\}.$$

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & X \\ S^{N-1} \arrow[r, "\omega"] & T \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Заметим, что в случае момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ продолжение f на толстый букет определено канонически.

Используя подход Квиллена, можно получить алгебраическую интерпретацию произведений Уайтхеда.

В работе [**5**] Квиллен построил эквивалентность

$$\begin{array}{c} \text{Односвязные} \\ \text{пространства X} \end{array} \;\underset{\langle - \rangle}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}}\; \begin{array}{c} \text{Редуцированные дифференциальные} \\ \text{градуированные алгебры Ли L} \end{array}$$

между гомотопической категорией односвязных рациональных комплексов и гомотопической категорией редуцированных DGL. Редуцированная DGL L называется *моделью* односвязного комплекса X, если имеется последовательность DGL-квазиизоморфизмов

$$L \xrightarrow{\simeq} \cdots \xleftarrow{\simeq} \lambda X.$$

Для каждой такой модели выполнено $H(L) \cong \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$. Если алгебра Ли $L = (\mathbb{L}(V), \partial)$ свободная, мы говорим, что это модель Квиллена для X. Для такой модели выполнено $H(V, \partial_1) \cong s\widetilde{H}(X; \mathbb{Q})$, где $\partial_1 \colon V \to V$ обозначает линейную часть оператора ∂, оператор s есть оператор надстройки степени 1, определенный для любого градуированного векторного пространства W: $(sW)_p = W_{p-1}$.

Определим произведение Уайтхеда для односвязного клеточного комплекса X в модели Квиллена L, см. [**6**, V].

Отображение $g : W \to X$ моделируется следующим отображением алгебр Ли:

$$\varphi : (\mathbb{L}(u_1, \ldots, u_k), 0) \longrightarrow L,$$

где $|u_j| = n_j - 1$, $j = 1, \ldots, k$, и классы $\overline{\varphi(u_j)} \in H_{n_j-1}(L) \cong \pi_{n_j-1}(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ соответствуют элементам $x_j \in \pi_{n_j}(X) \otimes \mathbb{Q}$.

С другой стороны, вложение $W \hookrightarrow T$ моделируется вложением DGL, см. [**6**, V.2]:

$$(\mathbb{L}(u_1, \ldots, u_k), 0) \hookrightarrow (\mathbb{L}(U), \partial),$$

где

$$U = \langle u_{i_1 \ldots i_s} \rangle, \quad 1 \le i_1 < \cdots < i_s \le k, \quad s < k, \quad |u_{i_1 \ldots i_s}| = n_{i_1} + \cdots + n_{i_s} - 1,$$

каждая образующая из U соответствует клетке в T. Дифференциал в $(\mathbb{L}(U), \partial)$ задается следующим образом:

$$\partial u_{i_1 \ldots i_s} = \sum_{p=1}^{s-1} \sum_{\sigma \in \widetilde{S}(p, s-p)} \varepsilon(\sigma)(-1)^{|u_{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(p)}}|} \left[u_{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(p)}}, u_{i_{\sigma(p+1)} \cdots i_{\sigma(s)}} \right],$$

где через $\widetilde{S}(p, s-p)$ обозначаются тасующие перестановки σ со свойством $\sigma(1) = 1$, и $\varepsilon(\sigma)$ есть Кошулев знак элементов $su_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, su_{i_{\sigma(s)}}$.

Модель Квиллена для $S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k}$ можно получить аналогично, добавив единственную образующую к $\mathbb{L}(U)$:

$$(\mathbb{L}(U \oplus \langle u_{1 \ldots k} \rangle), \partial),$$

где $|u_{1\dots k}| = N-1$, дифференциал задается также:

$$\partial u_{1\dots k} = \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{\sigma\in\widetilde{S}(p,k-p)} \varepsilon(\sigma)(-1)^{|u_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(p)}}|} \left[u_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(p)}}, u_{i_{\sigma(p+1)}\cdots i_{\sigma(k)}}\right].$$

Обозначим через $\omega := \partial u_{1\dots k}$ элемент, задающий гомотопический класс приклеивающего отображения $S^{N-1} \xrightarrow{\omega} T$. Тогда определелим алгебраическое k-местное произведение Уайтхеда:

$$[x_1, \dots, x_k]_W = \{\overline{\phi(\omega)} | \phi : (\mathbb{L}(U), \partial) \to L \text{ — продолжение } \varphi\}$$

(2.1)
$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{L}(u_1,\dots,u_k),0) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & L . \\
(\mathbb{L}(U),\partial) \arrow[ur, dashed, "\phi"'] &
\end{tikzcd}$$

Видно, что топологическое определение произведения Уайтхеда совпадает с алгебраическим.

3. A_∞ алгебра

Далее, перед тем как переходить к связи L_∞ алгебр и произведений Уайтхеда, опишем известные факты и результаты, касающиеся A_∞ алгебр и произведений Масси.

Дано векторное пространство V, определим редуцированную тензорную коалгебру на V: $\overline{T}(V) = \bigoplus_{n\geq 1} V^{\otimes n}$.

Копроизведение задается следующей формулой:

$$\Delta\left(v_1\otimes\cdots\otimes v_n\right) = \sum_{r=1}^{n-1} \left(v_1\otimes\cdots\otimes v_r\right)\otimes\left(v_{r+1}\otimes\cdots\otimes v_n\right).$$

Напомним, что A_∞ алгебра — это градуированное векторное пространство $A = \{A^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ вместе с линейными отображениями $m_k : A^{\otimes k} \to A$ степени $2-k$, $k\geq 1$, удовлетворяющими тождествам Сташеффа для каждого $n \geq 1$:

(3.1)
$$\sum_{\substack{n=r+s+t\\ r,t\geq 0, s\geq 1}} (-1)^{rs+t} m_{r+1+t} \circ \left(1^{\otimes r}\otimes m_s \otimes 1^{\otimes t}\right) = 0.$$

Любая дифференциальная градуированная алгебра (A,d) (DGA для краткости) является A_∞ алгеброй, если положить $m_1 = d$, m_2 — умножение, $m_k = 0$ для всех $k\geq 3$.

Определим надстройку SA: $(SA)^n = A^{n+1}$. В отличие от топологического случая, если рассматривать надстойку как отображение $S : A \to SA$, верно, что $deg(S) = -1$. Это связано с тем, что рассматриваемые кодифференциалы степени 1.

Хорошо известным является факт, что A_∞ структуры на векторном пространстве A биективно соответствуют кодифференциалам b, $deg(b) = 1$, на редуцированной тензорной коалгебре $\overline{T}(SA)$. Это утверждение будет использоваться далее, поэтому опишем его поподробнее.

Определим отображения b_k, $deg(b_k) = 1$:

$$b_k = S\circ m_k \circ \left(S^{-1}\right)^{\otimes k} : (SA)^{\otimes k} \to SA.$$

Тогда m_k будут выражаться следующим образом:

$$m_k = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} S^{-1}\circ b_k \circ S^{\otimes k} : A^{\otimes k} \to A.$$

В каком из двух выражений стоит знак $(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$, не является важным, это соглашение. Если поставить его в другом выражении, нужно будет менять знак в тождестве Сташеффа (3.1), поэтому у разных авторов могут не совпадать определения A_∞ алгебр.

Предложение 3.1. *Пусть V — градуированное векторное пространство.*

Тогда каждое дифференцирование b, $b \in \mathrm{Coder}^1(\overline{T}(V), \overline{T}(V))$, биективно соответствует совокупности отображений $\{b_k, k \geq 1\}$,$b_k \in \mathrm{Hom}^1(V^{\otimes k}, V)$, и определяется следующей формулой:

$$\begin{aligned} & b\left(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n\right) = \sum\nolimits_{i,l} 1^{\otimes i} \otimes b_l \otimes 1^{\otimes n-i-l} \left(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n\right) = \\ & = \sum\nolimits_{i,l} (-1)^{(|a_1|+\cdots+|a_i|)} a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes b_l \left(a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{i+l}\right) \otimes \cdots \otimes a_n \end{aligned}.$$

Таким образом, с помощью утверждения выше можно указать, какое кодифференцирование $b \in \mathrm{Coder}^1(\overline{T}(SA), \overline{T}(SA))$ соответствует фикисированной A_∞ структуре $\{m_k\}$ на A. В случае DGA, $(\overline{T}(SA), b)$ — это бар конструкция. Тот факт, что b является именно дифференциалом ($b^2 = 0$), соответствует в точности тождествам Сташеффа (3.1).

Пусть даны две A_∞ алгебры $(A', \{m'_k\})$ и $(A, \{m_k\})$. A_∞ морфизм $f : A' \to A$ — это совокупность линейных отображений $f_k : A'^{\otimes k} \to A$ степени $1-k$, удовлетворяющих условию для каждого $k \geq 1$:

$$\sum_{\substack{k=r+s+t \\ r,t\geq 0, s\geq 1}} (-1)^{r+st} f_{r+1+t}\left(\mathrm{id}^{\otimes r} \otimes m'_s \otimes \mathrm{id}^{\otimes t}\right) = \sum_{\substack{1\leq r\leq k, i_s\geq 1 \\ k=i_1+\cdots+i_r}} (-1)^v m_r\left(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_r}\right), \tag{3.2}$$

где

$$v := \sum_{1\leq t<s\leq r} (1-i_s)\, i_t.$$

A_∞ морфизм $f : A' \to A$ называют квазиизоморфизмом, если $f_1 : (A', m'_1) \to (A, m_1)$ есть квазиизоморфизм коцепных комплексов.

Определим отображения F_k, $deg(F_k) = 0$:

$$F_k = S \circ f_k \circ \left(S'^{-1}\right)^{\otimes k} : (SA')^{\otimes k} \to SA.$$

Обратное выражение для f_k:

$$f_k = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} S^{-1} \circ F_k \circ S'^{\otimes k} : A'^{\otimes k} \to A.$$

Предложение 3.2. *Пусть U, V — градуированные векторные пространства.*

Тогда каждый морфизм коалгебр F, $F \in \mathrm{Morf}(\overline{T}(U), \overline{T}(V))$ биективно соответствует совокупности отображений $\{F_k, k \geq 1\}$,$F_k \in \mathrm{Hom}^0(U^{\otimes k}, V)$, и определяется следующей формулой:

$$F\left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n\right) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{i_1+\cdots+i_s=n,\ \text{все } i_s\geq 1} F_{i_1} \otimes \cdots \otimes F_{i_s}\left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n\right) =$$

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{i_1+\cdots+i_s=n,\ \text{все } i_s\geq 1} F_{i_1}\left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i_1}\right) \otimes \cdots \otimes F_{i_s}\left(v_{n-i_s+1} \otimes \cdots \otimes v_n\right).$$

Совокупность $\{f_k, k \geq 1\}$ задает морфизм коалгебр $F \in \mathrm{Morf}(\overline{T}(U), \overline{T}(V))$,и условие (3.2) на f_k есть в точности условие $F \circ b' = b \circ F$. Таким образом, это условие эквивалентно тому, что F — морфизм дифференциальных градуированных коалгебр.

Рассмотрим дифференциальную градуированную алгебру A, введем индуцированную A_∞ структуру, для которой скобки, начиная с третьей, равны нулю. Когомологии

$H(A)$ тоже являются дифференциальной градуированной алгеброй, однако эту структуру можно продеформировать так, что получится A_∞ структура на пространстве $H(A)$, A_∞ квазиизоморфная структуре на A. Об этом говорит следующая теорема.

Теорема 3.3. [**7**, T.1] *Для данной DGA A можно ввести структуру A_∞ алгебры на когомологиях $H(A)$, для которой $H(A)$ и A являются квазиизоморфными A_∞ алгебрами. При этом для построенных скобок верно: $m_1 = 0, m_2$ индуцировано из умножения на A.*

Эта теорема интересна нам не столько своим результатом, сколько методом доказательства, идея которого будет использована в дальнейшем.

Набросок доказательства. Необходимо построить 2 набора отображений $\{f_k : H(A)^{\otimes k} \to A\}$ и $\{m_k : H(A)^{\otimes k} \to H(A)\}$, которые должны удовлетворять условиям (3.1) и (3.2). Определим $f\colon (H(A), 0) \overset{\simeq}{\hookrightarrow} (A, d)$ как линейное отображение выбора циклов, которое обязательно будет являться квазиизоморфизмом (здесь пользуемся свободностью $H(A)$, так как все над $\mathbb{Q}$). Положим $f_1 = f$, $m_1 = 0$. Определим $q\colon Ker(d) \to H(A)$ — линейное отображение взятия когомологического класса.

Предположим, что f_k и m_k уже построены для $k < p$ и удовлетворяют условиям (3.1) и (3.2). Далее, для $i = p$ заметим, что выражение

$$U_p := f_1 m_p - d f_p\colon H(A)^{\otimes p} \to A,$$

согласно условию (3.2), должно выражаться только через $\{m_k\}_{k<p}$ и $\{f_k\}_{k<p}$. Проведя непосредственную, но очень утомительную выкладку, можно убедиться, что $dU_p = 0$. Определим m_p как композицию U_p со взятием когомологического класса, то есть $m_p = \ q \circ U_p$.

Теперь надо определить f_p, исходя из условия $df_p = f_1 m_p - U_p$. Выражение

$$(f_1 m_p - U_p)\,(a_1 \otimes \ldots \otimes a_p) = (f_1 q U_p - U_p)\,(a_1 \otimes \ldots \otimes a_p) = d(c)$$

когомологично нулю. Для базисных элементов $a_i \in H(A)$ определим $f_p\,(a_1 \otimes \ldots \otimes a_p) = c$ и продолжим по линейности.

Таким образом, построены отображения $\{f_k\}$ и $\{m_k\}$, удовлетворяющие условию (3.2). Однако до этого момента не проверялось, что построенные отображения $\{m_k\}$ удовлетворяют условию Сташеффа (3.1). Этот факт — еще одна непосредственная длинная проверка. □

Нужно отметить, что в в построенной индуктивной процедуре имеется некоторая произвольность в определении $\{f_k\}$, которая в дальнейшем будет использоваться.

Заметим, что любая A_∞ структура на $H(A)$, A_∞-квазиизомофная структуре на A, возникает вышеприведенным способом.

Доказательство теоремы можно провести, используя только язык морфизмов и кодифференциалов на редуцированной тензорной коалгебре $\overline{T}(SA)$. Такой путь, во-первых, избавляет от длинных непосредственных выкладок, а во-вторых, открывает возможность обобщения процедуры на случай L_∞ алгебр. Доказательство теоремы Кадеишвили на языке морфизмов и кодифференциалов можно найти в [**4**].

Имеется процедура получения A_∞ структуры на $H(A)$ в случае, когда $H(A)$ представимо гомотопическим ретрактом от A:

Определение 3.4. Пусть M, N — коцепные комплексы. Гомотопическая ретракция (M на N) — это диаграмма следующего вида:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[loop left, "K"] \arrow[r, shift left, "q"] & N \arrow[l, shift left, "i"] \end{tikzcd} ,$$

где q и i — коцепные отображения, такие что $qi = \mathrm{id}_N$, $iq \simeq \mathrm{id}_M$ цепная гомотопия осуществляется с помощью отображения K, удовлетворяющего свойствам $K^2 = Ki = qK = 0$. Гомотопическая ретракция будет обозначаться через (M, N, i, q, K).

Имеет место следующая

Теорема 3.5. [**8**, Homotopy transfer theorem] *Пусть дана гомотопическая ретракция* $(A, H(A), i, q, K)$ *дифференциальной градуированной алгебры* A *на когомологии* $H(A)$. *Тогда существует структура* A_∞ *алгебры* $\{m_k\}$ *на* $H(A)$ *с* $m_1 = 0$ *и* A_∞*-квазиизоморфизм* $I : H(A) \to A$, *продолжающий некоторое отображение* $i\colon (H(A), 0) \to (A, d)$ *выбора циклов.*

В данном случае перенесенные скобки $\{m_k\}$ и отображения-компоненты $\{I_k\}$ заданы следующим индуктивным способом.

Определим $\lambda_k : H^k \to A$, $k \geq 2$, рекурсивно:

$$\lambda_k = m\left(\sum_{s=1}^{k-1} (-1)^{s+1} K\lambda_s \otimes K\lambda_{k-s}\right),$$

где m обозначает умножение на A. Далее,

$$m_k = q \circ \lambda_k \quad \text{и} \quad I_k = K \circ \lambda_k \quad \text{для всех } k \geq 2.$$

Данная теорема — это другой подход к определению A_∞ структуры на $H(A)$, иной по отношению к теореме (3.3) Кадеишвили. Процедура, описанная в теореме (3.3), позволяет получать любую A_∞ структуру. В отличие от этого, A_∞ структуры на $H(A)$, полученные с помощью теоремы (3.5), определяются благодаря фиксированному гомотопическому ретракту $(A, H(A), i, q, K)$. Как отмечено в [**3**, Пример 2.8], класс таких A_∞ структур строго меньше класса всех A_∞ структур.

4. Взаимосвязь A_∞ структуры и произведений Масси

Введем обозначение $\overline{a} = (-1)^{|a|+1} a$ для однородных элементов из A.

Пусть A — дифференциальная градуированная алгебра.

Определение 4.1. Произведения Масси.

Пусть $x_1, x_2, x_3 \in H(A)$ — когомологические классы, такие что $x_1 x_2 = x_2 x_3 = 0$. Определяющая система для тройного произведения Масси — это множество $\{a_{ij}\}_{0 \leq i < j \leq 3, 1 \leq j - i \leq 2} \subseteq A$, выбранное следующим образом:

Для $i = 1, 2, 3$ элементы $a_{i-1,i}$ — это циклы, представляющие x_i. Таким образом, получаем элементы $\{a_{01}, a_{12}, a_{23}\}$. Для $0 \leq i < j \leq 3$ и $j - i = 2$ выберем $a_{ij} \in A$ исходя из свойства $d\,(a_{ij}) = \overline{a}_{i,i+1} a_{i+1,j}$. Получаем элементы $\{a_{02}, a_{13}\}$.

Тройное произведение Масси — это множество всевозможных когомологических классов, полученных следующей процедурой:

$$\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \{[\overline{a}_{01} a_{13} + \overline{a}_{02} a_{23}]\,, \{a_{ij}\} \text{ — определяющая система } \} \subseteq H^{s-1},$$

где $s = |x_1| + |x_2| + |x_3|$. Будем говорить, что $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \emptyset$, если условие $x_1 x_2 = x_2 x_3 = 0$ не выполнено.

Произведение Масси тривиально, если $0 \in \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$.

Высшие произведения Масси определяются индуктивно. Пусть $x_1, \ldots, x_n \in H(A)$, такие что при $1 \leq i < j \leq n$ и $j - i \leq n - 2$, выполнено $\langle x_i, \ldots, x_j \rangle \ni 0$ (элементы берутся по порядку, без пропусков). Определяющая система для n-метного произведения Масси — это множество $\{a_{ij}\}_{0 \leq i < j \leq n, 1 \leq j - i \leq n-1} \subseteq A$, определенное следующим образом:

Для $i = 1, 2, 3$ элементы $a_{i-1,i}$ — это циклы, представляющие x_i. Для $0 \leq i < j \leq n$ и $2 \leq j - i \leq n - 1$, выберем $a_{ij} \in A$ со свойством

$$d\,(a_{ij}) = \sum_{0 \leq i < k < j \leq n} \overline{a}_{ik} a_{kj}.$$

Существование таких элементов следует из тривиальности произведений Масси меньшей длины.

Определим n-местное произведение Масси как множество всевозможных когомологических классов, полученных следующей процедурой:

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \left\{ \left[\sum_{1 \le k \le n-1} \overline{a}_{0k} a_{kn} \right], \{a_{ij}\} \text{ — определяющая система} \right\} \subseteq H^{s+2-n},$$

где $s = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. Если какие-то из произведений $\langle x_i, \ldots, x_j \rangle$ нетривиальны, положим $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \emptyset$.

Всюду далее каждая A_∞ структура на $H(A)$ для дифференциальной градуированной алгебры A подразумевается A_∞-квазиизоморфной структуре на A.

Далее, опишем известные результаты, касающиеся связи A_∞ алгебр и произведений Масси.

Теорема 4.2. [**3**, Т. 2.1] *Пусть $x \in \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, $n \ge 3$. Тогда выполнено:*
(i) Существует A_∞ структура на $H(A)$, такая что $x = \pm m_n (x_1 \otimes \ldots \otimes x_n)$.
(ii) В общем случае для произвольной A_∞ структуры на $H(A)$ выполнено:

$$\varepsilon m_n (x_1, \ldots, x_n) = x + \Gamma, \quad \Gamma \in \sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{Im}(m_j), \quad \varepsilon = (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)|x_j|}$$

Особенно нам будет интересен первый пункт данной теоремы. Это утверждение доказывается индуктивным построением из теоремы (3.3) Кадеишвили, при этом используется уже упоминавшаяся свобода выбора функций f_k. Доказательство здесь приводиться не будет, так как в сущности оно будет повторено позже в случае L_∞ структуры.

Следующие утверждения непосредственно использоваться не будут, и нужны лишь для сравнения известных фактов, связывающих A_∞, L_∞ и произведения Масси и произведения Уайтхеда соответственно.

Предложение 4.3. [**3**, Сл. 2.2] *Пусть A — DGA, такая что для некоторой (и, следовательно, для любой) A_∞ структуры на $H(A)$ выполнено $m_k = 0$ для $1 \le k \le n-1$. Тогда для любых когомологических классов $x_1, \ldots, x_n \in H(A)$, произведение Масси $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \{x\}$ состоит из ровно одного класса, при этом $\varepsilon m_n (x_1, \ldots, x_n) = x$, где ε определен из теоремы* (4.2).

Определение 4.4. Пусть $x \in \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Гомотопическая ретракция $(A, H(A), i, q, K)$ называется приспосабливаемой к x, если существует некоторая определяющая система $\{a_{ij}\}$ для x, такая что $i(x_j) = a_{j-1,j}$ для каждого j, а также $\{a_{ij}\}_{j-i \ge 2} \subseteq KdA$.

Теорема 4.5. [**3**, Т. 2.5] *Пусть $x \in \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Тогда для каждой гомотопической ретракции, приспосабливаемой к x, выполнено $\varepsilon m_n (x_1, \ldots, x_n) = x$, где $\varepsilon = (-1)^{1+|x_{n-1}|+|x_{n-3}|+\cdots}$.*

Теорема 4.6. *Пусть $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \ne \emptyset$, $n \ge 3$. Если для некоторой (и, следовательно, для любой) . гомотопической ретракции A на $H(A)$ индуцированные скобки $m_k = 0$ для $k \le n-2$, тогда*

$$\varepsilon m_n (x_1, \ldots, x_n) \in \langle x_1, \ldots, x_n \rangle,$$

где ε — знак, определенный в теореме (4.2).

Предложение 4.7. [**3**, Сл. 3.3] *Пусть A — DGA с когомологиями $H(A)$.*

(i) Если $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle \ne \emptyset$, тогда для любой A_∞ структуры на $H(A)$, индуцированной гомотопической ретракцией,

$$\varepsilon m_3 (x_1, x_2, x_3) \in \langle x_1, x_2, x_3 \rangle.$$

(ii) Если произведение, индуцированное на $H(A)$, тривиально, при этом $\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle \neq \emptyset$, тогда для любой A_∞ структуры на $H(A)$, индуцированной гомотопической ретракцией,

$$\varepsilon m_4\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) \in \langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle$$

5. L_∞ алгебра и симметрическая коалгебра

Дано векторное пространство V. На пространстве $\otimes^n V$ действует группа перестановок Σ_n. Более точно, для однородных элементов $v_1, \dots, v_n$ и перестановки $\sigma \in \Sigma_n$ имеем

$$\sigma_{\mathrm{tw}}\left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n\right) = \pm\left(v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}\right),$$

$$\mathrm{tw}(v_1 \otimes v_2) = (-1)^{|v_1||v_2|} v_2 \otimes v_1.$$

Определение 5.1. Кошулев знак $\varepsilon(\sigma, v_1, \dots, v_n) = \varepsilon(\sigma) = \pm 1$ определем из соотношения

$$\sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}\left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n\right) = \varepsilon(\sigma, v_1, \dots, v_n)\left(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}\right).$$

Определение 5.2. Симметрическая степень на векторном пространстве V определена следующим образом:

$$\odot^n V = \frac{\otimes^n V}{I},$$

где I обозначает векторное подпространство, порожденное элементами вида

$$v - \sigma_{\mathrm{tw}}(v), \sigma \in \Sigma_n, v \in \otimes^n V.$$

Обозначим через $\pi : \otimes^n V \to \odot^n V$ естественную проекцию, а также

$$v_1 \odot \cdots \odot v_n = \pi\left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n\right).$$

Определение 5.3. Обозначим через $N : \odot^n V \to \otimes^n V$ следующее отображение:

$$\begin{aligned} N\left(v_1 \odot \cdots \odot v_n\right) &= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon\left(\sigma; v_1, \dots, v_n\right)\left(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}\right) \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \sigma_{\mathrm{tw}}\left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n\right), \quad v_1, \dots, v_n \in V \end{aligned}$$

Предложение 5.4. *Отображение N корректно определено, инъективно, и его образ есть в точности подпространство $\left(\bigotimes^n V\right)^{\Sigma_n}$ всех тензоров, инвариантных относительно перестановки аргументов (со знаком).*

Определение 5.5. Множество (p, q)-тасующих перестановок — это множество $S(p, q) \subset \Sigma_{p+q}$ следующего вида:

$$S(p, q) = \left\{\sigma \in \Sigma_{p+q} | \sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(p), \quad \sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \ldots < \sigma(p+q)\right\}.$$

Определение 5.6. Определим редуцированную симметрическую коалгебру на V:

$$\overline{S}(V) = \bigoplus_{n>0} \odot^n V.$$

Кокоммутативное копроизведение задается следующей формулой:

$$\mathfrak{l}\left(v_1 \odot \cdots \odot v_n\right) = \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{\sigma \in S(a, n-a)} \varepsilon(\sigma)\left(v_{\sigma(1)} \odot \cdots \odot v_{\sigma(a)}\right) \otimes \left(v_{\sigma(a+1)} \odot \cdots \odot v_{\sigma(n)}\right)$$

Предложение 5.7. *Отображение N задает инъективный морфизм коалгебр:*

$$N : \overline{(S(V)}, \mathfrak{l}) \to \overline{(T(V)}, \Delta).$$

Определение 5.8. L_∞ алгебра — это градуированное векторное пространство $L = \{L^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ вместе с линейными отображениями $\ell_k : L^{\otimes k} \to L$ степени $k-2$, $k \geq 1$, удовлетворяющими следующим двум условиям:

(i) Для каждой перестановки σ на k элементах

$$\ell_k\left(x_{\sigma(1)}\dots x_{\sigma(k)}\right) = sgn(\sigma)\varepsilon(\sigma)\ell_k\left(x_1\dots x_k\right), \tag{5.1}$$

где $sgn(\sigma)$ есть знак перестановки, $\varepsilon(\sigma)$ — Кошулев знак для элементов $x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)}$.

(ii) Выполнено обобщенное тождество Якоби для каждого $n \geq 1$:

$$\sum_{i+j=n+1}\ \sum_{\sigma\in S(i,n-i)} sgn(\sigma)\varepsilon(\sigma)(-1)^{i(j-1)}\ell_j\left(\ell_i\left(x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(i)}\right)x_{\sigma(i+1)}\dots x_{\sigma(n)}\right) = 0, \tag{5.2}$$

где через $S(i,n-i)$ обозначается множество $(i,n-i)$-тасующих перестановок.

Любая дифференциальная градуированная алгебра Ли (L,d) является L_∞ алгеброй, если положить $\ell_1 = d$, ℓ_2 — скобка Ли, $\ell_k = 0$ для всех $k \geq 3$.

Определим надстройку sL: $(sL)^n = L^{n-1}$, $s : L \to sL$. Здесь $deg(s) = 1$, так как рассматриваемые кодифференциалы степени -1.

Хорошо известным является факт, что L_∞ структуры на векторном пространстве L биективно соответствуют кодифференциалам b, $deg(b) = -1$, на редуцированной симметрической коалгебре $\overline{S}(sL)$, опишем поподробнее.

Определим отображения g_k, $deg(g_k) = -1$:

$$g_k = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} s\circ\ell_k\circ\left(s^{-1}\right)^{\otimes k} : (sL)^{\otimes k} \to sL.$$

Тогда ℓ_k будут выражаться следующим образом:

$$\ell_k = s^{-1}\circ g_k\circ s^{\otimes k} : L^{\otimes k} \to L.$$

Аналогично случаю A_∞ алгебр, в каком из двух выражений стоит знак $(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$, является соглашением. Если поставить его в другом выражении, нужно будет менять знак в обобщенном тождестве Якоби, поэтому у разных авторов могут не совпадать определения L_∞ алгебр.

Определим $b_k : (sL)^{\odot k} \to sL$ с помощью g_k:

$$b_k\circ\pi = g_k.$$

Отображения b_k определены корректно в точности тогда, когда ℓ_k удовлетворяют тождеству (5.1).

Предложение 5.9. *Пусть V — градуированное векторное пространство.*

Тогда каждое кодифференцирование b, $b \in \mathrm{Coder}^{-1}(\overline{S}(V),\overline{S}(V))$, биективно соответствует совокупности отображений $\{b_k, k\geq 1\}$,$b_k \in \mathrm{Hom}^{-1}(V^{\odot k},V)$ и определяется следующей формулой:

$$b\left(v_1\odot\dots\odot v_n\right) = \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{\sigma\in S(i,n-i)} \varepsilon(\sigma)b_i\left(v_{\sigma(1)}\odot\dots\odot v_{\sigma(k)}\right)\odot v_{\sigma(k+1)}\odot\dots\odot v_{\sigma(n)} \tag{5.3}$$

Замечание. Кодифференцирование $b \in \mathrm{Coder}^{-1}(\overline{S}(V),\overline{S}(V))$ не увеличивает длины элементов, то есть

$$b|_{V^{\odot k}} : V^{\odot k} \to \overline{S}(V)_{\leq k}.$$

Как и в случае A_∞ структуры, с помощью утверждения выше можно указать, какое кодифференцирование $b \in \mathrm{Coder}^{-1}(\overline{S}(sL),\overline{S}(sL))$ соответствует фиксированной L_∞ структуре $\{\ell_k\}$ на L. Тот факт, что b является именно дифференциалом ($b^2 = 0$), соответствует в точности обобщенным тождествам Якоби (5.2).

Определение 5.10. Пусть даны две L_∞ алгебры $(L', \{\ell'_k\})$ и $(L, \{\ell_k\})$. L_∞ морфизм $f : L' \to L$ — это совокупность линейных отображений $f_k : L'^{\otimes k} \to L$ степени $k-1$, удовлетворяющих условию (5.1), а также условиям для каждого $n \geq 1$:

$$\sum_{\substack{p+t=n \\ p\geq 1, t\geq 0}} \sum_{\sigma \in S(p,t)} \operatorname{sgn}(\sigma)(-1)^{tp} f_{t+1} \circ \left(\ell'_p \otimes \mathbf{1}^{\otimes t}\right) \circ \sigma_{\mathrm{tw}}^{-1} = \tag{5.4}$$

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{\substack{i_1,\dots i_r \\ i_s \geq 1, i_1+\dots+i_r=n}} \sum_{\tau \in S(i_1,\dots,i_r)} \frac{1}{r!} \operatorname{sgn}(\tau) \widetilde{\varepsilon_{r,i_1,\cdots i_r}} \ell_r \circ (f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_r}) \circ \tau_{\mathrm{tw}}^{-1},$$

где $\widetilde{\varepsilon_{r,i_1,\cdots i_r}}$ — некоторый знак, который будет описан позже, так как данная конструкция еще понадобится.

L_∞ морфизм $f : L' \to L$ называют квазиизоморфизмом, если $f_1 : (L', \ell'_1) \to (L, \ell_1)$ есть квазиизоморфизм цепных комплексов.

Определим отображения H_k, $deg(H_k) = 0$:

$$H_k = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} s \circ f_k \circ \left(s'^{-1}\right)^{\otimes k} : (sL')^{\otimes k} \to sL.$$

Обратное выражение для f_k:

$$f_k = s^{-1} \circ H_k \circ s'^{\otimes k} : L'^{\otimes k} \to L.$$

Определим $F_k : (sL')^{\odot k} \to sL$ с помощью H_k:

$$F_k \circ \pi = H_k.$$

Отображения F_k определены корректно в точности тогда, когда f_k удовлетворяют условию кососимметричности (5.1).

Предложение 5.11. *Пусть U, V — градуированные векторные пространства.*

Тогда каждый морфизм коалгебр F, $F \in \operatorname{Morf}(\overline{S}(U), \overline{S}(V))$, биективно соответствует совокупности отображений $\{F_k, k \geq 1\}$,$F_k \in \operatorname{Hom}^0(U^{\odot k}, V)$, и определяется следующей формулой:

$$F\left(v_1 \odot \cdots \odot v_t\right) = \tag{5.5}$$

$$\sum_{n=1}^{t} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=t, \\ \text{все } k_s \geq 1}} \sum_{\sigma \in S(k_1,\cdots,k_n)} \frac{1}{n!} \varepsilon(\sigma) F_{k_1}\left(v_{\sigma(1)} \odot \cdots \odot v_{\sigma(k_1)}\right) \odot \cdots \odot F_{k_n}\left(v_{\sigma(t-k_n+1)} \odot \cdots \odot v_{\sigma(t)}\right).$$

Замечание. Морфизм $F \in \operatorname{Morf}(\overline{S}(U), \overline{S}(V))$ не увеличивает длины элементов, то есть

$$F|_{U^{\odot k}} : U^{\odot k} \to \overline{S}(V)_{\leq k}.$$

Совокупность $\{f_k, k \geq 1\}$ задает морфизм коалгебр $F \in \operatorname{Morf}(\overline{S}(U), \overline{S}(V))$,и условие на f_k (5.4), есть в точности условие $F \circ b' = b \circ F$. Таким образом, это условие эквивалентно тому, что F — морфизм дифференциальных градуированных коалгебр.

Пусть L — DGL. Как и в случае A_∞ алгебр, для $H(L)$ верна теорема о переносе L_∞ структуры, когда $H(L)$ представимо гомотопическим ретрактом от L.

$$K \circlearrowright (L, \partial) \underset{i}{\overset{q}{\rightleftarrows}} (H, 0)$$

Теорема 5.12. [**8**, Homotopy transfer theorem] *Пусть дана гомотопическая ретракция $(L, H(L), i, q, K)$ дифференциальной градуированной алгебры Ли L на когомологии $H(L)$. Тогда существует структура L_∞ алгебры $\{\ell_k\}$ на $H(L)$ с $m_1 = 0$ и L_∞ — квазиизоморфизм $I : H(L) \to L$, продолжающий некоторое отображение $i\colon (H(L), 0) {\to} (L, d)$ выбора циклов.*

6. Взаимосвязь L_∞ структуры и произведений Уайтхеда

Пусть L — дифференциальная градуированная алгебра Ли. Далее будем использовать алгебраическое произведение Уайтхеда.

Всюду далее каждая L_∞ структура на $H(L)$ для дифференциальной градуированной алгебры Ли L подразумевается L_∞-квазиизоморфной структуре на L.

Далее, опишем известные результаты, касающиеся связи L_∞ алгебр и произведений Уайтхеда.

Теорема 6.1. [**2**, Утв. 3.1] *Пусть $x \in [x_1, \ldots, x_k]_W$, $k \geq 3$. Тогда для произвольной L_∞ структуры на $H(L)$ выполнено:*

$$\varepsilon \ell_k (x_1, \ldots, x_k) = x + \Gamma, \quad \Gamma \in \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{Im}\,(\ell_j)\,, \quad \varepsilon = (-1)^{\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)|x_j|}.$$

В частности, если $\ell_j = 0$ для $j \leq k-1$, тогда с точностью до знака $\ell_k (x_1, \ldots, x_k) \in [x_1, \ldots, x_k]_W$.

Пусть элемент $x \in [x_1, \ldots, x_k]_W$ получен с помощью DGL-морфизма $\phi : (\mathbb{L}(U), \partial) \to L$, как на диаграме (2.1). Введем обозначения:

$$U = \langle u_1, \ldots, u_k \rangle \oplus V, \quad \text{, где} \quad V = \langle u_{i_1 \ldots i_s} \rangle\,, \quad s \geq 2.$$

С другой стороны, описание фиксированного гомотопического ретракта эквивалентно описанию следующего разложения: $L = A \oplus \partial A \oplus C$, где $\partial : A \overset{\cong}{\to} \partial A$, подпространство $C \cong H$ есть подпространство циклов. Имея гомотопический ретракт, мы можем получить разложение следующим образом: $i : H \cong C \hookrightarrow L, q : L \to C \cong H$, и $K(A) = K(C) = 0, K : \partial A \overset{\cong}{\to} A$.

Определение 6.2. Пусть $x \in [x_1, \ldots, x_k]_W$. Гомотопическая ретракция $(L, H(L), i, q, K)$ называется приспосабливаемой к $x \in [x_1, \ldots, x_k]_W$, если $\phi(V) \subset A$. В частности,

$$K\partial\phi\,(u_{i_1 \ldots i_s}) = \phi\,(u_{i_1 \ldots i_s}) \quad \text{для каждой порождающей} \quad u_{i_1 \ldots i_s} \in V.$$

Замечание. Если провести сравнение между определениями адаптируемости ректракта в случаях A_∞ и L_∞ алгебр, можно заметить, что определения схожи. Задание определяющей системы $\{a_{ij}\}$ для произведения Масси схоже заданию системы элементов $\{\phi\,(u_{i_1 \ldots i_s})\}$ с некоторыми свойствами.

Теорема 6.3. [**2**, Т. 3.3] *Пусть $x \in [x_1, \ldots, x_k]_W$. Тогда для каждой гомотопической ретракции, приспосабливаемой к x, выполнено*

$$\varepsilon \ell_k (x_1, \ldots, x_k) = x,$$

где $\varepsilon = (-1)^{1+|x_{k-1}|+|x_{k-3}|+\cdots}$.

Теорема 6.4. [**2**, Т. 3.5] *Пусть $[x_1, \ldots, x_k]_W \neq \emptyset$, $k \geq 3$. Если для некоторой гомотопической ретракции L на $H(L)$ индуцированные скобки $\ell_i = 0$ для $i \leq k-2$, тогда*

$$\varepsilon \ell_k (x_1, \ldots, x_k) \in [x_1, \ldots, x_k]_W\,,$$

где ε — знак, определенный в предыдущей теореме.

Предложение 6.5. [**2**, Сл. 3.6] *Пусть L — DGL с когомологиями $H(L)$.*

(i) Если $[x_1, x_2, x_3]_W \neq \emptyset$, тогда для любой L_∞ структуры на $H(L)$, индуцированной гомотопической ретракцией,

$$\varepsilon \ell_3 (x_1, x_2, x_3) \in [x_1, x_2, x_3]_W\,.$$

(ii) Если $H(L)$ абелева, при этом $[x_1, x_2, x_3, x_4]_W \neq \emptyset$, тогда для любой L_∞ структуры на $H(L)$, индуцированной гомотопической ретракцией,

$$\varepsilon \ell_4 (x_1, x_2, x_3, x_4) \in [x_1, x_2, x_3, x_4]_W\,.$$

7. Теорема Кадеишвили для L_∞ алгебры

В предыдущих секциях были описаны известные результаты и свойства A_∞ и L_∞ алгебр. Заметим, что многие свойства структур схожи, например, определения структур как кодифференциалов на некоторых коалгебрах ($\overline{T}(SA)$ и $\overline{S}(sL)$ соответственно), определения ∞-морфизмов. Более глубинная взаимосвязь A_∞ и L_∞ алгебр освещена, например, в **[9]** и **[10]**.

Сравнивая известные результаты о связи произведений Масси и A_∞ алгебр, а также теоремы, связывающие произведения Уайтхеда и L_∞ структуры, можно заметить, что среди этих результатов для L_∞ структуры отсутствует аналог теоремы Кадеишвилли. Формально, утверждение теоремы Кадеишвилли для L_∞ структур следует из применения теоремы (5.12) (homotopy transfer theorem) для некоторого гомотопического ретракта L на $H(L)$.

Однако в контекте поиска обобщенных тождеств Якоби в случае момент-угол комплекса нам интересно не столько само утверждение, сколько индуктивная процедура из оригинальной теоремы Кадеишвилли для A_∞. Используя эту процедуру для произведений Масси, можно получить утверждение из теоремы (4.2): $x \in \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, тогда существует A_∞ структура, восстанавливающая x, то есть $x = \pm m_n\left(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n\right)$, причем знак является известным.

Теорема (4.2) является основообразующей в моей работе, так как в случае момент-угол комплекса все произведения Уайтхеда специального вида, полученные с помощью канонических продолжений, являются согласованными (все продолжения на толстые букеты выбраны канонически и продолжают друг друга). Благодаря этому, можно получить обобщение теоремы (4.2) в случае момент угол комплекса: оказывается, что можно найти такую L_∞ структуру, которая восстанавливает все элементы вида $[\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_k}]_s$ одновременно, откуда можно уже получить обобщенные тождества Якоби.

Индуктивная процедура теоремы Кадеишвили для L_∞ алгебр мною найдена в литературе не была, хотя я не исключаю, что она могла бы как-то следовать из результатов, связывающих L_∞ и A_∞ алгебры. Далее я привожу доказательство этой теоремы, следуя способу, изложенному в **[4]** для A_∞ алгебр, в котором используется только язык морфизмов и кодифференциалов на симметрической тензорной коалгебре $\overline{S}(sA)$.

Напомним, что редуцированная симметрическая коалгебра на V — это

$$\overline{S}(V) = \bigoplus_{n \geq 1} \odot^n V.$$

Кокоммутативное копроизведение задается следующей формулой:

$$\mathfrak{l}\left(v_1 \odot \cdots \odot v_n\right) = \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{\sigma \in S(a, n-a)} \varepsilon(\sigma)\left(v_{\sigma(1)} \odot \cdots \odot v_{\sigma(a)}\right) \otimes \left(v_{\sigma(a+1)} \odot \cdots \odot v_{\sigma(n)}\right).$$

Заметим, что $\ker(\mathfrak{l}) = V$.

Обозначим через $\overline{S}(V)_{\leq n} = \bigoplus_{k=1}^{n} \odot^k V$. Из формулы копроизведения $\mathfrak{l}$ видно, что

$$\operatorname{im}\left(\mathfrak{l}|_{V^{\odot n}}\right) \subseteq \overline{S}(V)_{\leq n-1} \otimes \overline{S}(V)_{\leq n-1} \subseteq \overline{S}(V)_{\leq n} \otimes \overline{S}(V)_{\leq n}.$$

Таким образом, $(\overline{S}(V)_{\leq n}, \mathfrak{l}|_{\overline{S}(V)_{\leq n}})$ — подкоалгебра в $(\overline{S}(V), \mathfrak{l})$.

Обозначим через $i_k : V^{\odot k} \to \overline{S}(V)$ вложения слагаемых.

Введем вспомогательную конструкцию.

Определение 7.1. Пусть (C, Δ) — коалгебра. Введем итерированные копроизведения $\Delta^n : C \to C^{\otimes n+1}$, определенные рекурсивно:

$$\Delta^0 = \mathrm{Id}_C, \quad \Delta^n : C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{\mathrm{Id}_C \otimes \Delta^{n-1}} C \otimes C^{\otimes n} = C^{\otimes n+1}$$

Определение 7.2. Пусть (C, Δ) — коалгебра, V — векторное пространство. Морфизм векторных пространств $p : C \to V$ называется когенератором для C, если для каждого $c \in C$ существует $n \geq 0$, такое что $\left(\otimes^{n+1} p\right) \Delta^n(c) \neq 0$ в $\otimes^{n+1} V$.

Предложение 7.3. *Пусть (C, Δ) — коалгебра, d есть кодифференцирование на C. Если $p : C \to V$ — когенератор, тогда d однозначно определен с помощью композиции $pd : C \to V$.*

Иными словами, если имеется два кодифференцирования d_1 и d_2, причем $pd_1 = pd_2$, тогда $d_1 = d_2$.

Предложение 7.4. *Пусть $p : B \to V$ — когенератор для коалгебры (B, Γ). Тогда каждый морфизм градуированных коалгебр $\phi : (C, \Delta) \to (B, \Gamma)$ однозначно определен с помощью композиции $p\phi : C \to V$.*

Из определения коумножения видно, что отображение проекции на элементы единичной длины $p : \overline{S}(V) \to V$ есть когенератор для коалгебры $\overline{S}(V)$. Аналогично, $p : \overline{S}(V)_{\leq n} \to V$ есть когенератор для коалгебры $\overline{S}(V)_{\leq n}$.

Предложение 7.5. *Пусть V — градуированное векторное пространство.*

Тогда каждое кодифференцирование b, $b \in \mathrm{Coder}^{-1}(\overline{S}(V)_{\leq n}, \overline{S}(V)_{\leq n})$, биективно соответствует совокупности отображений $\{b_k\}_{k=1}^n$, $b_k \in \mathrm{Hom}^{-1}(V^{\odot k}, V)$ и определяется следующей формулой:

$$b\left(v_1 \odot \cdots \odot v_k\right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\sigma \in S(i,k-i)} \varepsilon(\sigma) b_i\left(v_{\sigma(1)} \odot \cdots \odot v_{\sigma(i)}\right) \odot v_{\sigma(i+1)} \odot \cdots \odot v_{\sigma(k)} \tag{7.1}$$

Обратное выражение для b_k:

$$b_k = p \circ b \circ i_k : V^{\odot k} \to V.$$

Доказательство. Из утверждения (5.9) следует, что кодифференцирования на $\overline{S}(V)$ такой же вид, как и в формуле (5.3). Из определения кодифференцирования $b \in \mathrm{Coder}^{-1}(\overline{S}(V))$ имеем $\mathfrak{l} \circ b = (1 \otimes b + b \otimes 1) \circ \mathfrak{l}$. Так как кодифференцирование b на $\overline{S}(V)$ не увеличивает длины элементов, $b|_{\overline{S}(V)_{\leq n}}$ есть кодифференцирование на $(\overline{S}(V)_{\leq n}, \mathfrak{l}|_{\overline{S}(V)_{\leq n}})$. Таким образом, доказана формула (7.1) и сюрьективность отображения из множества кодифференцирований в множество совокупностей $\{b_k\}_{k=1}^n$.

Остается инъективность, которая следует из утв. (7.3) про когенератор. □

Предложение 7.6. *Пусть V', V — градуированные векторные пространства.*

Тогда каждый морфизм коалгебр F, $F \in \mathrm{Morf}(\overline{S}(V')_{\leq n}, \overline{S}(V)_{\leq n})$, биективно соответствует совокупности отображений $\{F_k\}_{k=1}^n$, $F_k \in \mathrm{Hom}^0(V'^{\odot k}, V)$, и определяется следующей формулой:

$$F\left(v_1 \odot \cdots \odot v_t\right) = \tag{7.2}$$

$$\sum_{n=1}^{t} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=t,\\ \text{все } k_s \geq 1}} \sum_{\sigma \in S(k_1,\cdots,k_n)} \frac{1}{n!} \varepsilon(\sigma) F_{k_1}\left(v_{\sigma(1)} \odot \cdots \odot v_{\sigma(k_1)}\right) \odot \cdots \odot F_{k_n}\left(v_{\sigma(t-k_n+1)} \odot \cdots \odot v_{\sigma(t)}\right).$$

Обратное выражение для F_k:

$$F_k = p \circ F \circ i'_k : V'^{\odot k} \to V.$$

Доказательство. Из утверждения (5.11) следует, что морфизм F из $\overline{S}(V')$ в $\overline{S}(V)$ имеет такой же вид, как и в формуле (5.5). Так как такой морфизм F не увеличивает длины элементов, $F|_{\overline{S}(V')_{\leq n}}$ есть элемент из $\mathrm{Morf}(\overline{S}(V')_{\leq n}, \overline{S}(V)_{\leq n})$. Таким образом, доказана формула (7.2) и сюрьективность отображения из множества морфизмов в множество совокупностей $\{F_k\}_{k=1}^n$.

Остается инъективность, которая следует из утв. (7.4) про когенератор. $\square$

Следствие 7.7. *Пусть* $b \in \mathrm{Coder}^{-1}(\overline{S}(V)_{\leq n}, \overline{S}(V)_{\leq n})$, $F \in \mathrm{Morf}(\overline{S}(V')_{\leq n}, \overline{S}(V)_{\leq n})$. *Тогда для* $k = 1 \dots n$ *выполнено:*

$$b(\overline{S}(V)_{\leq k}) \subseteq \overline{S}(V)_{\leq k}, F(\overline{S}(V')_{\leq k}) \subseteq \overline{S}(V)_{\leq k}.$$

Предложение 7.8. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$. *Пусть* $0 \leq k \leq n-1$.

(i) Пусть $b : \overline{S}V_{\leq n} \to \overline{S}V_{\leq n}$ *есть кодифференцирование степени* -1.

Тогда условие $b^2|_{\overline{S}V_{\leq k}} = 0$ *влечет* $\mathrm{im}\left(b^2 \circ \iota_{k+1}\right) \subseteq V$.

(ii) Пусть V', V *— векторные пространства, отображения* $b : \overline{S}V_{\leq n} \to \overline{S}V_{\leq n}, b' : \overline{S}V'_{\leq n} \to \overline{S}V'_{\leq n}$ *есть градуированные кодифференцирования степени* -1. *Пусть* $F : \overline{S}V'_{\leq n} \to \overline{S}V_{\leq n}$ *есть морфизм коалгебр.*

Тогда условие $(b \circ F - F \circ b')|_{\overline{S}V'_{\leq k}} = 0$ *влечет* $\mathrm{im}\left((b \circ F - F \circ b') \circ \iota'_{k+1}\right) \subseteq V$

Доказательство. (i) Выкладки повторяются, они в точности такие, как в [**4**].

$$\begin{aligned} \mathfrak{l} \circ b^2 \circ \iota_{k+1} &= (1 \otimes b + b \otimes 1) \circ (1 \otimes b + b \otimes 1) \circ \mathfrak{l} \circ \iota_{k+1} \\ &= \left(1 \otimes b^2 - b \otimes b + b \otimes b + b^2 \otimes 1\right) \circ \mathfrak{l} \circ \iota_{k+1} \\ &= \left(1 \otimes b^2 + b^2 \otimes 1\right) \circ \mathfrak{l} \circ \iota_{k+1} = 0 \end{aligned}$$

Последнее равенство верно, так как $\mathrm{im}\left(\mathfrak{l}|_{V^{\odot k+1}}\right) \subseteq \overline{S}(V)_{\leq k} \otimes \overline{S}(V)_{\leq k}$. Остается только заметить, что $\ker(\mathfrak{l}) = V$.

(ii) Доказывается аналогично.

$$\begin{aligned} \mathfrak{l} \circ (F \circ b' - b \circ F) \circ \iota'_{k+1} &= [(F \otimes F) \circ \mathfrak{l}' \circ b' - (1 \otimes b + b \otimes 1) \circ \mathfrak{l} \circ F] \circ \iota'_{k+1} \\ = [(F \otimes F) \circ (1 \otimes b' + b' \otimes 1) &- (1 \otimes b + b \otimes 1) \circ (F \otimes F)] \circ \mathfrak{l}' \circ \iota'_{k+1} \\ = [F \otimes (F \circ b' - b \circ F) &+ (F \circ b' - b \circ F) \otimes F] \circ \mathfrak{l}' \circ \iota'_{k+1} = 0 \end{aligned}$$

Остается воспользоваться тем же соображениями, что и в конце (i). $\square$

Напомним, что в определении L_∞ структуры скобки ℓ_k удовлетворяли следующему условию "кососимметричности". Для каждой перестановки σ на k элементах

$$\ell_k\left(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(k)}\right) = sgn(\sigma)\varepsilon(\sigma)\ell_k\left(x_1 \dots x_k\right), \tag{7.3}$$

где $sgn(\sigma)$ есть знак перестановки, $\varepsilon(\sigma)$ — Кошулев знак для элементов $x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}$.

Для индуктивного доказательства теоремы Кадеишвили понадобятся дополнительные определения.

Определение 7.9. (i) Пред-L_n структура на L есть семейство градуированных отображений $\left(\ell_k : L^{\otimes k} \to L\right)_{k=1}^n$, удовлетворяющих условию "кососимметричности"(7.3), причем $deg(\ell_k) = k-2$ для $k = 1, \dots, n$. Набор $(L, (\ell_k)_{k=1}^n)$ называется пред-L_n алгеброй.

(ii) Пусть L, L' — векторные пространства. Пред-L_n — морфизм из L' в L есть семейство линейных отображений $\left(f_k : L'^{\otimes k} \to L\right)_{k=1}^n$, удовлетворяющих условию "кососимметричности"(7.3), для которых $deg(f_k) = k-1$ при $k = 1, \dots, n$.

Определение 7.10. (i) Пусть $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

L_n алгебра — это пред-L_n алгебра $(L, (\ell_k)_{k=1}^n)$, такая что для $k = 1, \dots n$ выполнено обобщенное тождество Якоби:

$$\sum_{i+j=k+1} \sum_{\sigma \in S(i,k-i)} sgn(\sigma)\varepsilon(\sigma)(-1)^{i(j-1)}\ell_j\left(\ell_i\left(x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(i)}\right) x_{\sigma(i+1)} \dots x_{\sigma(k)}\right) = \tag{7.4}$$

$$\sum_{i+j=k+1}\sum_{\sigma\in S(i,k-i)} sgn(\sigma)(-1)^{i(j-1)}\ell_j\circ(\ell_i\otimes 1^{\otimes(j-1)})\circ\sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}(x_1\otimes\cdots\otimes x_k)=0$$

(ii) Пусть даны две L_n алгебры $\left(L',(\ell'_k)_{k=1}^n\right)$ и $(L,(\ell_k)_{k=1}^n)$.

L_n — морфизм (или морфизм L_n алгебр) из $\left(L',(\ell'_k)_{k=1}^n\right)$ в $(L,(\ell_k)_{k=1}^n)$ — это пред-L_n — морфизм $(f_k)_{k=1}^n$, такой что для $k=1,\dots,n$ выполнено:

$$\sum_{\substack{p+t=k\\ p\geq 1,t\geq 0}}\sum_{\sigma\in S(p,t)} \mathrm{sgn}(\sigma)(-1)^{tp}f_{t+1}\circ\left(\ell'_p\otimes\mathbf{1}^{\otimes t}\right)\circ\sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}(x_1\otimes\cdots\otimes x_k)= \tag{7.5}$$

$$\sum_{\substack{p+t=k\\ p\geq 1,t\geq 0}}\sum_{\sigma\in S(p,t)} \varepsilon(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma)(-1)^{tp}f_{t+1}\left(\ell'_p\left(x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(p)}\right)x_{\sigma(p+1)}\dots x_{\sigma(k)}\right)=$$

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{\substack{i_1,\dots i_r\\ i_s\geq 1,i_1+\dots+i_r=k}}\sum_{\tau\in S(i_1,\dots,i_r)}\frac{1}{r!}\,\mathrm{sgn}(\tau)\widetilde{\varepsilon_{r,i_1,\cdots i_r}}\ell_r\circ(f_{i_1}\otimes\cdots\otimes f_{i_r})\circ\tau_{\mathrm{tw}}^{-1}=$$

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{\substack{i_1,\dots i_r\\ i_s\geq 1,i_1+\dots+i_r=k}}\sum_{\tau\in S(i_1,\dots,i_r)}\frac{1}{r!}\varepsilon(\tau)\,\mathrm{sgn}(\tau)\widetilde{\varepsilon_{r,i_1,\cdots i_r}}\varepsilon_{\tau,x_i}\ell_r\left(f_{i_1}(x_{\tau(1)}\cdots x_{\tau(i_1)})\otimes\cdots\otimes f_{i_r}(x_{\tau(k-i_r+1)}\cdots x_{\tau(k)})\right),$$

где ε_{τ,x_i} — знак, возникающий при подстановке элементов $\{x_\tau\}$:

$$\varepsilon_{\tau,x_i}=(-1)\hat{}\{\sum_{l=1}^{r-1}(|x_{\tau(1+i_1+\dots+i_{l-1})}|+\dots+|x_{\tau(i_1+\dots+i_l)}|)\cdot(\sum_{s=l+1}^{r}(1-i_s))\},$$

$\widetilde{\varepsilon_{r,i_1,\cdots i_r}}$ — следующий знак:

$$\widetilde{\varepsilon_{r,i_1,\cdots i_r}}=(-1)\hat{}\{\frac{k(k-1)}{2}+\frac{r(r-1)}{2}+\frac{i_1(i_1-1)}{2}+\dots+\frac{i_r(i_r-1)}{2}\}\cdot(-1)\hat{}\{\sum_{1\leq t<s\leq r}(1-i_s)i_t\}.$$

Далее, для доказательства теоремы Кадеишвили нам понадобится работать с дифференциалом $b_k:(sL)^{\odot k}\to sL$, ассоциированным с L_∞ структурой $\{\ell_k\}$.

Пусть дана пред-L_n алгебра $(L,(\ell_k)_{k=1}^n)$. Напомним, что отображения g_k, $deg(g_k)=-1$, ассоциированные с ℓ_k, задаются следующим образом:

$$g_k=(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}s\circ\ell_k\circ\left(s^{-1}\right)^{\otimes k}:(sL)^{\otimes k}\to sL.$$

Тогда ℓ_k будут выражаться следующим образом:

$$\ell_k=s^{-1}\circ g_k\circ s^{\otimes k}:L^{\otimes k}\to L.$$

Определим отображения $b_k:(sL)^{\odot k}\to sL$ через g_k:

$$b_k\circ\pi=g_k.$$

Предложение 7.11. *Отображения $b_k:(sL)^{\odot k}\to sL$ определены корректно в точности тогда, когда отображения ℓ_k удовлетворяют условию кососимметричности* (7.3).

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$g_k(sx_1\otimes\cdots\otimes sx_k)=\varepsilon(\sigma,sx_1,\cdots,sx_k)g_k(sx_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes sx_{\sigma(k)}),$$

где $\varepsilon(\sigma,sx_1,\cdots,sx_k)$ — Кошулев знак.

$$(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}g_k(sx_1\otimes\cdots\otimes sx_k)=s\circ\ell_k\circ\left(s^{-1}\right)^{\otimes k}(sx_1\otimes\cdots\otimes sx_k)=$$
$$(-1)^{|x_1|(k-1)+\dots+|x_{k-1}|}s\circ\ell_k(x_1\otimes\cdots\otimes x_k).$$

С другой стороны,

$$(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\varepsilon(\sigma,sx_i)g_k(sx_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes sx_{\sigma(k)})=\varepsilon(\sigma,sx_i)s\circ\ell_k\circ\left(s^{-1}\right)^{\otimes k}(sx_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes sx_{\sigma(k)})=$$

$$\varepsilon(\sigma, sx_i)(-1)^{|x_{\sigma(1)}|(k-1)+\dots+|x_{\sigma(k-1)}|} s\circ \ell_k(x_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes x_{\sigma(k)}) =$$

$$\varepsilon(\sigma, sx_i)(-1)^{|x_{\sigma(1)}|(k-1)+\dots+|x_{\sigma(k-1)}|}\varepsilon(\sigma, x_i) sgn(\sigma) s\circ \ell_k(x_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes x_{\sigma(k)}).$$

Остается только воспользоваться следующей леммой о знаке. □

Предложение 7.12. *(Лемма о знаке). Пусть σ — произвольная перестановка. Тогда*

$$\varepsilon(\sigma, sx_i)(-1)^{|x_1|(k-1)+\dots+|x_{k-1}|} = sgn(\sigma)\varepsilon(\sigma, x_i)(-1)^{|x_{\sigma(1)}|(k-1)+\dots+|x_{\sigma(k-1)}|}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$(-1)^{|x_1|(k-1)+\dots+|x_{k-1}|} = (-1)^{|x_{k-1}|+|x_{k-3}|+\cdots}.$$

Для тождественной перестановки утверждение верно, так как кошулевы знаки равны единице. Утверждение достаточно доказать индуктивно, применяя транспозиции элементов.

Пусть $\tau : (1,\dots,n) \mapsto (\tau(1),\dots,\tau(n))$, а перестановка σ меняет местами $\tau(j)$ и $\tau(j+1)$. Пусть утверждение верно для перестановки τ. Проверим, как меняются знаки для $\sigma\tau$.

$$\varepsilon(\sigma\tau, x_i) = \varepsilon(\tau, x_i)\dot{(}-1)^{|x_{\tau(j)}||x_{\tau(j+1)}|}, sgn(\sigma\tau) = (-1)sgn(\tau),$$

$$(-1)^{|x_{\sigma\tau(k-1)}|+|x_{\sigma\tau(k-3)}|+\cdots} = (-1)^{|x_{\tau(k-1)}|+|x_{\tau(k-3)}|+\cdots}(-1)^{|x_{\tau(j)}|+|x_{\tau(j+1)}|},$$

$$\varepsilon(\sigma\tau, sx_i) = \varepsilon(\tau, sx_i)\dot{(}-1)^{(|x_{\tau(j)}|+1)(|x_{\tau(j+1)}|+1)},$$

таким образом, все доказано. □

Заметим, что задание кососимметричных отображений $\ell_k : L^{\otimes k} \to L, deg(\ell_k) = k-2$, эквивалентно заданию симметричных отображений $g_k : (sL)^{\otimes k} \to sL, deg(g_k) = -1$, которое эквивалентно, в свою очередь, заданию отображений $b_k : (sL)^{\odot k} \to sL, deg(b_k) = -1$.

Определение 7.13. Пусть $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\cup\{\infty\}$.

Пред-L_n система на L определена как совокупность $((\ell_k)_{k=1}^n, (g_k)_{k=1}^n, (b_k)_{k=1}^n, b)$, состоящая из

(1) Пред-L_n алгебры $(L, (\ell_k)_{k=1}^n)$. В частности, отображения ℓ_k удовлетворяют условию кососимметричности (7.3).

(2) Семейства отображений $g_k : (sL)^{\otimes k} \to sL, deg(g_k) = -1$, удовлетворяющих условию симметричности, как в утв. (7.11);

(3) Семейства отображений $b_k : (sL)^{\odot k} \to sL, deg(b_k) = -1$;

(4) Кодифференцирования $b : \overline{S}(sL)_{\leq n} \to \overline{S}(sL)_{\leq n}, deg(b) = -1$.

Каждое из условий (1)-(4) эквивалентно любому другому. Эквивалентность (3)=(4) следует из утв. (7.5) о виде кодифференциала на $\overline{S}(sL)_{\leq n}$. Остальные эквивалентности были уже описаны.

Для отображений L_n-морфизма $\{f_k\}$ аналогично вводятся ассоциированные с ними отображения H_k, $deg(H_k) = 0$:

$$H_k = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} s\circ f_k \circ \left(s'^{-1}\right)^{\otimes k} : (sL')^{\otimes k} \to sL.$$

Обратное выражение для f_k:

$$f_k = s^{-1}\circ H_k \circ s'^{\otimes k} : L'^{\otimes k} \to L.$$

Так как отображения $\{f_k\}$ кососимметричны, отображения H_k будут симметричны (лемма о знаке), и поэтому корректно будут определены $F_k : (sL')^{\odot k} \to sL$ с помощью H_k:

$$F_k \circ \pi = H_k.$$

Определение 7.14. Пусть $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$. Набором данных пред-$L_n$ морфизма из L' в L называется система $((f_k)_{k=1}^n, (H_k)_{k=1}^n, (F_k)_{k=1}^n, F)$, состоящая из

(1) Пред-L_n морфизма $(f_k)_{k=1}^n$; В частности, отображения f_k удовлетворяют условию кососимметричности (?).

(2) Семейства отображений $H_k : (sL')^{\otimes k} \to sL, deg(H_k) = 0$, удовлетворяющих условию симметричности;

(3) Семейства отображений $F_k : (sL')^{\odot k} \to sL, deg(F_k) = 0$;

(4) Морфизма $F : \overline{S}(sL')_{\leq n} \to \overline{S}(sL)_{\leq n}, deg(F) = 0$.

Как и для кодифференцирования, каждое из условий (1)-(4) эквивалентно любому другому.

Теорема 7.15. *Пусть $\tilde{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$. Пусть $\left((\ell_k)_{k=1}^{\tilde{n}}, (g_k)_{k=1}^{\tilde{n}}, (b_k)_{k=1}^{\tilde{n}}, b\right)$ - некоторая пред-$L_{\tilde{n}}$ система. Пусть $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}, n \leq \tilde{n}$.*

Тогда следующие условия эквивалентны:

(a) Тождество (7.4) выполняется для $k = 1, \dots, n$, то есть $(\ell_k)_{k=1}^n$ является L_n структурой на L.

(b) Для $k = 1, \dots, n$ и для любых элементов $x_1, \dots, x_k \in L$ выполнено

$$\sum_{\substack{i+j=k+1,\\ i,j\geq 1}} \sum_{\sigma \in S(i,k-i)} g_j \circ (g_i \otimes 1^{\otimes k-i}) \circ \sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}(sx_1 \otimes \dots \otimes sx_k) =$$

$$\sum_{\substack{i+j=k+1,\\ i,j\geq 1}} \sum_{\sigma \in S(i,k-i)} \varepsilon(\sigma, sx_i) g_j(g_i(sx_{\sigma(1)} \cdots sx_{\sigma(i)}) sx_{\sigma(i+1)} \dots sx_{\sigma(k)}) = 0$$

(c) Для $k = 1, \dots, n$ и для любых элементов $x_1, \dots, x_k \in L$ выполнено

$$\sum_{\substack{i+j=k+1,\\ i,j\geq 1}} \sum_{\sigma \in S(i,k-i)} \varepsilon(\sigma, sx_i) b_j(b_i\left(sx_{\sigma(1)} \odot \dots \odot sx_{\sigma(i)}\right) \odot sx_{\sigma(i+1)} \odot \dots \odot sx_{\sigma(k)}) = \tag{7.6}$$

$$\sum_{\substack{i+j=k+1,\\ i,j\geq 1}} \sum_{\sigma \in S(i,k-i)} b_j \circ (b_i \odot \mathbf{1}^{\odot j-1}) \circ \sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}(sx_1 \odot \dots \odot sx_k) = 0$$

(d) $b^2|_{S(sL)_{\leq n}} = 0$, то есть $b|_{S(sL)_{\leq n}}$ есть дифференциал на коалгебре $S(sL)_{\leq n}$.

Доказательство. Рассмотрим эквивалентность (c) и (d). Докажем по индукции по n. При $n = 1$ это очевидно, так как условие (7.6) превращается в $(b_1)^2 = 0$. При этом $b|_{S(sL)_{\leq 1}} = b|_{sL} = b_1$.

Докажем для $n+1$. Необходимо доказать: $b^2|_{S(sL)_{\leq n+1}} = 0 \Leftrightarrow$ условие (7.6) для $k = 1, \dots, n+1$. Достаточно доказать, что при предположении $b^2|_{S(sL)_{\leq n}} = 0$ верна эквивалентность $b^2|_{(sL)^{\odot n+1}} = 0 \Leftrightarrow$ (7.6) для $k = n+1$.

Предположим, что $b^2|_{S(sL)_{\leq n}} = 0$. Тогда по Предложению (7.8,i) имеем $b^2 \circ \iota_{n+1} = \iota_1 \circ \pi_1 \circ b^2 \circ \iota_{n+1}$, тогда

$$b^2(sx_1 \odot \dots \odot sx_{n+1}) = \pi_1 \circ b^2(sx_1 \odot \dots \odot sx_{n+1}) =$$

$$\pi_1 \circ b \circ (\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\sigma \in S(i,n+1-i)} \varepsilon(\sigma) b_i\left(sx_{\sigma(1)} \odot \dots \odot sx_{\sigma(i)}\right) \odot sx_{\sigma(i+1)} \odot \dots \odot sx_{\sigma(n+1)}) =$$

$$\sum_{\substack{i+j=n+2,\\ i,j\geq 1}} \sum_{\sigma \in S(i,n+1-i)} \varepsilon(\sigma, sx_i) b_j(b_i\left(sx_{\sigma(1)} \odot \dots \odot sx_{\sigma(i)}\right) \odot sx_{\sigma(i+1)} \odot \dots \odot sx_{\sigma(n+1)}),$$

что и требовалось.

Докажем эквивалентность (a) и (b).

Заметим, что $\sigma_{\mathrm{tw}}^{-1} \circ (s^{-1})^{\otimes k} = sgn(\sigma)(s^{-1})^{\otimes k} \circ \sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}$:

$$\sigma_{\mathrm{tw}}^{-1} \circ (s^{-1})^{\otimes k}(sx_1 \otimes \dots \otimes sx_k) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}(-1)^{|x_1|(k-1)+\dots+|x_{k-1}|}\sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) =$$

$$\varepsilon(\sigma, x_i)(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}(-1)^{|x_1|(k-1)+\dots+|x_{k-1}|}x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(k)};$$
$$(s^{-1})^{\otimes k} \circ \sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}(sx_1 \otimes \dots \otimes sx_k) = \varepsilon(\sigma, sx_i)(s^{-1})^{\otimes k} sx_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes sx_{\sigma(k)} =$$
$$\varepsilon(\sigma, sx_i)(-1)^{|x_{\sigma(1)}|(k-1)+\dots+|x_{\sigma(k-1)}|}(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(k)}.$$

Остается применить лемму о знаке.

Рассмотрим выражение из формулы (7.4):

$$J = \sum_{i+j=k+1} \sum_{\sigma \in S(i,k-i)} sgn(\sigma)(-1)^{i(j-1)}\ell_j \circ (\ell_i \otimes 1^{\otimes(j-1)}) \circ \sigma_{\mathrm{tw}}^{-1} : (sL)^{\otimes k} \to sL.$$

Мы хотим применить $(s^{-1})^{\otimes k}$ и s, чтобы перейти от ℓ_k к g_k. Имеем:

$$\ell_j \circ (\ell_i \otimes 1^{\otimes j-1}) \circ (s^{-1})^{\otimes k} = \ell_j \circ (\ell_i \otimes 1^{\otimes k-i}) \circ ((s^{-1})^{\otimes i} \otimes (s^{-1})^{\otimes k-i}) =$$
$$\ell_j \circ (\ell_i \circ (s^{-1})^{\otimes i} \otimes (s^{-1})^{\otimes k-i}) = (-1)^{\frac{i(i-1)}{2}}\ell_j \circ ((s^{-1} \circ g_i) \otimes (s^{-1})^{\otimes k-i}) =$$
$$(-1)^{\frac{i(i-1)}{2}}\ell_j \circ ((s^{-1} \circ g_i) \otimes ((s^{-1})^{\otimes k-i} \circ 1^{\otimes k-i})) = (-1)^{\frac{i(i-1)}{2}+k-i}\ell_j \circ (s^{-1} \otimes (s^{-1})^{\otimes k-i}) \circ (g_i \otimes 1^{\otimes k-i}) =$$
$$(-1)^{\frac{i(i-1)}{2}+k-i}\ell_j \circ (s^{-1})^{\otimes k-i+1} \circ (g_i \otimes 1^{\otimes k-i}) = (-1)^{\frac{i(i-1)}{2}+k-i}\ell_j \circ (s^{-1})^{\otimes j} \circ (g_i \otimes 1^{\otimes k-i}) =$$
$$(-1)^{\frac{i(i-1)}{2}+\frac{j(j-1)}{2}+k-i}(s^{-1}) \circ g_j \circ (g_i \otimes 1^{\otimes k-i}).$$

Тогда

$$s \circ J \circ (s^{-1})^{\otimes k} = \sum_{i,j,\sigma} sgn(\sigma)(-1)^{i(j-1)} s \circ \ell_j \circ (\ell_i \otimes 1^{\otimes k-i}) \circ \sigma_{\mathrm{tw}}^{-1} \circ (s^{-1})^{\otimes k} =$$
$$\sum_{i,j,\sigma}(-1)^{i(j-1)} s \circ \ell_j \circ (\ell_i \otimes 1^{\otimes k-i}) \circ (s^{-1})^{\otimes k} \circ \sigma_{\mathrm{tw}}^{-1} =$$
$$\sum_{i,j,\sigma}(-1)^{i(j-1)+\frac{i(i-1)}{2}+\frac{j(j-1)}{2}+k-i} g_j \circ (g_i \otimes 1^{\otimes k-i}) \circ \sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}.$$

Разберемся со знаком:

$$(-1)^{i(j-1)+\frac{i(i-1)}{2}+\frac{j(j-1)}{2}+k-i} = (-1)^{(i+1)(j-1)+\frac{i(i-1)}{2}+\frac{j(j-1)}{2}} = (-1)^{(k-j)(j-1)+\frac{i(i-1)}{2}+\frac{j(j-1)}{2}} =$$
$$(-1)^{k(j-1)+\frac{i(i-1)}{2}+\frac{j(j-1)}{2}} = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}.$$

Таким образом,

$$s \circ J \circ (s^{-1})^{\otimes k}(sx_1 \otimes \dots \otimes sx_k) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \sum_{i,j,\sigma} g_j \circ (g_i \otimes 1^{\otimes k-i}) \circ \sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}(sx_1 \otimes \dots \otimes sx_k),$$

эквивалентность (a) и (b) доказана.

Докажем эквивалентность (b) и (c). Посмотрим на то, как устроена левая часть выражения (7.6). Эта формула есть применение отображения к классу $sx_1 \odot \dots \odot sx_k$, имеющему представителя $sx_1 \otimes \dots \otimes sx_k$. Воспользуемся тем, что $b_k \circ \pi = g_k$. $\square$

Следствие 7.16. *Пусть* $\tilde{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$. *Пусть* $\left((\ell_k)_{k=1}^{\tilde{n}}, (g_k)_{k=1}^{\tilde{n}}, (b_k)_{k=1}^{\tilde{n}}, b\right)$ *- некоторая пред-*$L_{\tilde{n}}$ *система. Пусть* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}, n \leq \tilde{n}$. *Пусть* $x_1, \dots, x_n \in L$ *— некоторые элементы.*

Тогда следующие условия эквивалентны:

(a) Выполнено тождество Якоби на элементе $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$, *то есть*

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{\sigma \in S(i,n-i)} sgn(\sigma)(-1)^{i(j-1)}\ell_j \circ (\ell_i \otimes 1^{\otimes(j-1)}) \circ \sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = 0;$$

(b) Выполнено тождество на элементе $sx_1 \otimes \dots \otimes sx_n$, *то есть*

$$\sum_{\substack{i+j=n+1,\\ i,j \geq 1}} \sum_{\sigma \in S(i,n-i)} g_j \circ (g_i \otimes 1^{\otimes n-i}) \circ \sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}(sx_1 \otimes \dots \otimes sx_n) =$$

$$\sum_{\substack{i+j=n+1,\\ i,j\geq 1}} \sum_{\sigma\in S(i,n-i)} \varepsilon(\sigma, sx_i) g_j(g_i(sx_{\sigma(1)}\cdots sx_{\sigma(i)})sx_{\sigma(i+1)}\dots sx_{\sigma(n)})=0;$$

(c) Выполнено тождество на элементе $sx_1\odot\cdots\odot sx_n$, то есть

$$\sum_{\substack{i+j=n+1,\\ i,j\geq 1}} \sum_{\sigma\in S(i,n-i)} \varepsilon(\sigma, sx_i) b_j(b_i\left(sx_{\sigma(1)}\odot\cdots\odot sx_{\sigma(i)}\right)\odot sx_{\sigma(i+1)}\odot\cdots\odot sx_{\sigma(n)})=0;$$

Если, к тому же, выполнено тождество (7.6) *для* $k=1,\dots,n-1$ *(*$\Leftrightarrow b^2|_{S(sL)_{\leq n-1}}=0,$*) тогда условия (a) и (b) эквивалентны условию*

(d) $b^2(sx_1\odot\cdots\odot sx_n)=0$.

Теорема 7.17. *Пусть* $\tilde n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\cup\{\infty\}$. *Пусть* $\left((\ell_k)_{k=1}^{\tilde n},(g_k)_{k=1}^{\tilde n},(b_k)_{k=1}^{\tilde n},b\right)$ *и* $\left((\ell'_k)_{k=1}^{\tilde n},(g'_k)_{k=1}^{\tilde n},(b'_k)_{k=1}^{\tilde n},b'\right)$ *есть две пред-*$L_{\tilde n}$ *системы на* L *и* L' *соответственно. Пусть* $\left((f_k)_{k=1}^{\tilde n},(H_k)_{k=1}^{\tilde n},(F_k)_{k=1}^{\tilde n},F\right)$ *есть набор данных пред-*$L_{\tilde n}$ *морфизма из* L' *в* L. *Пусть* $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\cup\{\infty\}$, $n\leq\tilde n$.

Тогда следующие условия эквивалентны:

(a) Выполнены тождества (7.5) *для* $k=1,\dots,n$;

(b) Для $k=1,\dots,n$ *выполнено тождество*

$$\sum_{\substack{p+t=k\\ p\geq 1,t\geq 0}}\sum_{\sigma\in S(p,t)} H_{t+1}\circ\left(g'_p\otimes\mathbf{1}^{\otimes t}\right)\circ\sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}=\sum_{r=1}^{k}\sum_{\substack{i_1,\dots i_r\\ i_s\geq 1, i_1+\dots+i_r=k}}\sum_{\tau\in S(i_1,\dots,i_r)}\frac{1}{r!}g_r\circ(H_{i_1}\otimes\cdots\otimes H_{i_r})\circ\tau_{\mathrm{tw}}^{-1}$$

(c) Для $k=1,\dots,n$ *и для любых элементов* $x_1,\dots,x_k\in L'$ *выполнено тождество*

(7.7)
$$\sum_{\substack{p+t=k\\ p\geq 1,t\geq 0}}\sum_{\sigma\in S(p,t)} F_{t+1}\circ\left(b'_p\odot\mathbf{1}^{\otimes t}\right)\circ\sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}(sx_1\odot\cdots\odot sx_k)=$$

$$\sum_{\substack{p+t=k\\ p\geq 1,t\geq 0}}\sum_{\sigma\in S(p,t)} \varepsilon(\sigma,sx_i)F_{t+1}\left(b'_p\left(sx_{\sigma(1)}\cdots sx_{\sigma(p)}\right)sx_{\sigma(p+1)}\dots sx_{\sigma(k)}\right)=$$

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{\substack{i_1,\dots i_r\\ i_s\geq 1, i_1+\dots+i_r=k}}\sum_{\tau\in S(i_1,\dots,i_r)}\frac{1}{r!}b_r\circ(F_{i_1}\odot\cdots\odot F_{i_r})\circ\tau_{\mathrm{tw}}^{-1}(sx_1\odot\cdots\odot sx_k)=$$

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{\substack{i_1,\dots i_r\\ i_s\geq 1, i_1+\dots+i_r=k}}\sum_{\tau\in S(i_1,\dots,i_r)}\frac{1}{r!}\varepsilon(\tau,sx_i)b_r\left(F_{i_1}(sx_{\tau(1)}\cdots sx_{\tau(i_1)})\odot\cdots\odot F_{i_r}(sx_{\tau(k-i_r+1)}\cdots sx_{\tau(k)})\right);$$

(d) $F\circ b'|_{S(sL')_{\leq n}}=b\circ F|_{S(sL')_{\leq n}}$.

Замечание. Такие выражения, как

$$\sum_{\substack{p+t=k\\ p\geq 1,t\geq 0}}\sum_{\sigma\in S(p,t)} F_{t+1}\circ\left(b'_p\odot\mathbf{1}^{\otimes t}\right)\circ\sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}(sx_1\odot\cdots\odot sx_k)$$

определены некорректно на $S(sL')$, их стоит понимать как обозначения для выражения

$$\sum_{\substack{p+t=k\\ p\geq 1,t\geq 0}}\sum_{\sigma\in S(p,t)} \varepsilon(\sigma,sx_i)F_{t+1}\left(b'_p\left(sx_{\sigma(1)}\cdots sx_{\sigma(p)}\right)sx_{\sigma(p+1)}\dots sx_{\sigma(k)}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим эквивалентность (c) и (d). Докажем по индукции по n. При $n=1$ это очевидно, так как условие (7.7) превращается в $F_1\circ b_1'=b_1\circ F_1$. При этом $(F\circ b'-b\circ F)|_{S(sL')_{\le 1}}=F_1\circ b_1'-b_1\circ F_1$.

Докажем для $n+1$. Необходимо доказать: $(F\circ b'-b\circ F)|_{S(sL')_{\le n+1}}=0\Leftrightarrow$ условие (7.7) для $k=1,\dots,n+1$. Достаточно доказать, что при предположении $(F\circ\ b'-\ b\circ\ F)|_{S(sL')_{\le n}}=0$ верна эквивалентность $(F\circ\ b'-\ b\circ\ F)|_{(sL')^{\odot n+1}}=0\Leftrightarrow$ (7.7) для $k=n+1$.

Предположим, что $(F\circ\ b'-\ b\circ\ F)|_{S(sL')_{\le n}}=0$. Тогда по Предложению (7.8,ii) имеем $(F\circ\ b'-\ b\circ\ F)\circ\iota_{n+1}'=\iota_1\circ\pi_1\circ(F\circ\ b'-\ b\circ\ F)\circ\iota_{n+1}'$.

Остается только заметить, что разность левой и правой частей в выражении (7.7) есть в точности $\pi_1\circ(F\circ\ b'-\ b\circ\ F)\circ\iota_{n+1}'$.

Докажем эквивалентность (a) и (b).

Рассмотрим левую часть выражения (b):

$$\sum_{\substack{p+t=k\\ p\ge 1,t\ge 0}}\ \sum_{\sigma\in S(p,t)} H_{t+1}\circ\left(g_p'\otimes\mathbf{1}^{\otimes t}\right)\circ\sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}.$$

Имеем:

$$\begin{gathered}
H_{t+1}\circ(g_p'\otimes\mathbf{1}^{\otimes t})=(-1)^{\frac{t(t+1)}{2}}s\circ f_{t+1}\circ(s^{-1})^{\otimes t+1}\circ(g_p'\otimes\mathbf{1}^{\otimes t})=\\
(-1)^{\frac{t(t+1)}{2}}s\circ f_{t+1}\circ(s^{-1}\otimes(s^{-1})^{\otimes t})\circ(g_p'\otimes\mathbf{1}^{\otimes t})=\\
(-1)^{\frac{t(t+1)}{2}+t}s\circ f_{t+1}\circ((s^{-1}\circ g_p')\otimes((s^{-1})^{\otimes t}\circ\mathbf{1}^{\otimes t}))=\\
(-1)^{\frac{t(t+1)}{2}+t+\frac{p(p-1)}{2}}s\circ f_{t+1}\circ((\ell_p'\circ(s^{-1})^{\otimes p})\otimes(s^{-1})^{\otimes t})=\\
(-1)^{\frac{t(t+1)}{2}+t+\frac{p(p-1)}{2}}s\circ f_{t+1}\circ((\ell_p'\circ(s^{-1})^{\otimes p})\otimes(\mathbf{1}^{\otimes t}\circ(s^{-1})^{\otimes t}))=\\
(-1)^{\frac{t(t+1)}{2}+t+\frac{p(p-1)}{2}}s\circ f_{t+1}\circ((\ell_p'\otimes\mathbf{1}^{\otimes t})\circ((s^{-1})^{\otimes p}\otimes(s^{-1})^{\otimes t}))=\\
(-1)^{\frac{t(t+1)}{2}+t+\frac{p(p-1)}{2}}s\circ f_{t+1}\circ(\ell_p'\otimes\mathbf{1}^{\otimes t})\circ(s^{-1})^{\otimes k}.
\end{gathered}$$

Тогда

$$\begin{gathered}
\sum_{p,t,\sigma}H_{t+1}\circ\left(g_p'\otimes\mathbf{1}^{\otimes t}\right)\circ\sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}=\sum_{p,t,\sigma}(-1)^{\frac{t(t+1)}{2}+t+\frac{p(p-1)}{2}}s\circ f_{t+1}\circ(\ell_p'\otimes\mathbf{1}^{\otimes t})\circ(s^{-1})^{\otimes k}\circ\sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}=\\
\sum_{p,t,\sigma}(-1)^{\frac{t(t+1)}{2}+t+\frac{p(p-1)}{2}}sgn(\sigma)s\circ f_{t+1}\circ(\ell_p'\otimes\mathbf{1}^{\otimes t})\circ\sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}\circ(s^{-1})^{\otimes k}=\\
\sum_{p,t,\sigma}(-1)^{t+kt+\frac{k(k-1)}{2}}sgn(\sigma)s\circ f_{t+1}\circ(\ell_p'\otimes\mathbf{1}^{\otimes t})\circ\sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}\circ(s^{-1})^{\otimes k}=\\
\sum_{p,t,\sigma}(-1)^{tp+\frac{k(k-1)}{2}}sgn(\sigma)s\circ f_{t+1}\circ(\ell_p'\otimes\mathbf{1}^{\otimes t})\circ\sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}\circ(s^{-1})^{\otimes k}.
\end{gathered}$$

Рассмотрим правую часть выражения (b):

$$\sum_{r=1}^{k}\ \sum_{\substack{i_1,\dots i_r\\ i_s\ge 1,i_1+\dots+i_r=k}}\ \sum_{\tau\in S(i_1,\dots,i_r)}\frac{1}{r!}g_r\circ(H_{i_1}\otimes\dots\otimes H_{i_r})\circ\tau_{\mathrm{tw}}^{-1}.$$

Имеем:

$$\begin{gathered}
g_r\circ(H_{i_1}\otimes\dots\otimes H_{i_r})=(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}s\circ\ell_r\circ(s^{-1})^{\otimes r}\circ(H_{i_1}\otimes\dots\otimes H_{i_r})=\\
(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}s\circ\ell_r\circ(s^{-1}\otimes\dots\otimes s^{-1})\circ(H_{i_1}\otimes\dots\otimes H_{i_r})=\\
(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}s\circ\ell_r\circ(s^{-1}H_{i_1}\otimes\dots\otimes s^{-1}H_{i_r})=\\
(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}+\frac{i_1(i_1-1)}{2}+\dots+\frac{i_r(i_r-1)}{2}}s\circ\ell_r\circ((f_{i_1}\circ(s^{-1})^{\otimes i_1})\otimes\dots\otimes(f_{i_r}\circ(s^{-1})^{\otimes i_r}))=
\end{gathered}$$

$$(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}+\frac{i_1(i_1-1)}{2}+\dots+\frac{i_r(i_r-1)}{2}}(-1)^v s\circ\ell_r\circ(f_{i_1}\otimes\dots\otimes f_{i_r})\circ((s^{-1})^{\otimes i_1}\otimes\dots\otimes(s^{-1})^{\otimes i_r})=$$
$$(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}+\frac{i_1(i_1-1)}{2}+\dots+\frac{i_r(i_r-1)}{2}}(-1)^v s\circ\ell_r\circ(f_{i_1}\otimes\dots\otimes f_{i_r})\circ(s^{-1})^{\otimes k}=$$
$$\widetilde{\varepsilon_{r,i_1,\cdots i_r}}(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} s\circ\ell_r\circ(f_{i_1}\otimes\dots\otimes f_{i_r})\circ(s^{-1})^{\otimes k},$$

где $v=\sum_{1\le t\ <s\le r}(1-i_s)i_t$ — знак, появляющийся при перемене местами отображений $f_{i_j}, deg(f_{i_j})=i_j-1$ и $s^{-1}, deg(s^{-1})=-1$. Знак $\widetilde{\varepsilon_{r,i_1,\cdots i_r}}$ определен в выражении (7.5).

Тогда

$$\sum_{r,i_s,\tau}\frac{1}{r!}g_r\circ(H_{i_1}\otimes\dots\otimes H_{i_r})\circ\tau_{\rm tw}^{-1}=$$
$$\sum_{r,i_s,\tau}\frac{1}{r!}\widetilde{\varepsilon_{r,i_1,\cdots i_r}}(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} s\circ\ell_r\circ(f_{i_1}\otimes\dots\otimes f_{i_r})\circ(s^{-1})^{\otimes k}\circ\tau_{\rm tw}^{-1}=$$
$$\sum_{r,i_s,\tau}\frac{1}{r!}sgn(\tau)\widetilde{\varepsilon_{r,i_1,\cdots i_r}}(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} s\circ\ell_r\circ(f_{i_1}\otimes\dots\otimes f_{i_r})\circ\tau_{\rm tw}^{-1}\circ(s^{-1})^{\otimes k}=$$

Сравнивая левую и правую части в выражении (b), а также левую и правую части в выражении (7.5), получаем эквивалентность (a) и (b).

Воспользовавшись равенствами $b_k\circ\pi=g_k$ и $F_k\circ\pi=H_k$, получаем эквивалентность (b) и (c). $\square$

Следствие 7.18. *Пусть* $\tilde n\in\mathbb{Z}_{\ge0}\cup\{\infty\}$. *Пусть* $\Big((\ell_k)_{k=1}^{\tilde n},(g_k)_{k=1}^{\tilde n},(b_k)_{k=1}^{\tilde n},b\Big)$ *и* $\Big((\ell'_k)_{k=1}^{\tilde n},(g'_k)_{k=1}^{\tilde n},(b'_k)_{k=1}^{\tilde n},b'\Big)$ *есть две пред-*$L_{\tilde n}$ *системы на* L *и* L' *соответственно. Пусть* $\Big((f_k)_{k=1}^{\tilde n},(H_k)_{k=1}^{\tilde n},(F_k)_{k=1}^{\tilde n},F\Big)$ *есть набор данных пред-*$L_{\tilde n}$ *морфизма из* L' *в* L. *Пусть* $n\in\mathbb{Z}_{\ge0}\cup\{\infty\}, n\le\tilde n$. *Пусть* $x_1,\dots,x_n\in L'$ *— некоторые элементы.*

Тогда следующие условия эквивалентны:

(a) Выполнено тождество на элементе $x_1\otimes\dots\otimes x_n$, *то есть*

$$\sum_{\substack{p+t=n\\p\ge1,t\ge0}}\sum_{\sigma\in S(p,t)}\mathrm{sgn}(\sigma)(-1)^{tp}f_{t+1}\circ\left(\ell'_p\otimes\mathbf{1}^{\otimes t}\right)\circ\sigma_{\rm tw}^{-1}(x_1\otimes\dots\otimes x_n)=$$
$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{\substack{i_1,\dots i_r\\i_s\ge1,i_1+\dots+i_r=n}}\sum_{\tau\in S(i_1,\dots,i_r)}\frac{1}{r!}\mathrm{sgn}(\tau)\widetilde{\varepsilon_{r,i_1,\cdots i_r}}\ell_r\circ(f_{i_1}\otimes\dots\otimes f_{i_r})\circ\tau_{\rm tw}^{-1}(x_1\otimes\dots\otimes x_n).$$

(b) Выполнено тождество на элементе $sx_1\otimes\dots\otimes sx_n$, *то есть*

$$\sum_{\substack{p+t=n\\p\ge1,t\ge0}}\sum_{\sigma\in S(p,t)}H_{t+1}\circ\left(g'_p\otimes\mathbf{1}^{\otimes t}\right)\circ\sigma_{\rm tw}^{-1}(sx_1\otimes\dots\otimes sx_n)=$$
$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{\substack{i_1,\dots i_r\\i_s\ge1,i_1+\dots+i_r=n}}\sum_{\tau\in S(i_1,\dots,i_r)}\frac{1}{r!}g_r\circ(H_{i_1}\otimes\dots\otimes H_{i_r})\circ\tau_{\rm tw}^{-1}(sx_1\otimes\dots\otimes sx_n)$$

(c) Выполнено тождество на элементе $sx_1\odot\dots\odot sx_n$, *то есть*

$$\sum_{\substack{p+t=k\\p\ge1,t\ge0}}\sum_{\sigma\in S(p,t)}F_{t+1}\circ\left(b'_p\odot\mathbf{1}^{\odot t}\right)\circ\sigma_{\rm tw}^{-1}(sx_1\odot\dots\odot sx_k);=$$
$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{\substack{i_1,\dots i_r\\i_s\ge1,i_1+\dots+i_r=k}}\sum_{\tau\in S(i_1,\dots,i_r)}\frac{1}{r!}b_r\circ(F_{i_1}\odot\dots\odot F_{i_r})\circ\tau_{\rm tw}^{-1}(sx_1\odot\dots\odot sx_k).$$

Если, к тому же, выполнено тождество (7.7) для $k=1,\dots,n-1$, *то есть* $\Leftrightarrow(F\circ b'-b\circ F)|_{S(sL')_{\le n-1}}=0$, *тогда условия (a) и (b) эквивалентны условию* *(d)* $(F\circ b'-b\circ F)(sx_1\odot\cdots\odot sx_n)=0.$

Теорема 7.19. *Пусть* $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}\cup\{\infty\}$.
Пусть $(L,(\ell_k)_{k=1}^n,(g_k)_{k=1}^n,(b_k)_{k=1}^n,b)$ *есть* L_n *алгебра.*
Пусть $\left((\ell'_k)_{k=1}^n,(g'_k)_{k=1}^n,(b'_k)_{k=1}^n,b'\right)$ *есть пред-*L_n *система на* L'.
Пусть $((f_k)_{k=1}^n,(H_k)_{k=1}^n,(F_k)_{k=1}^n,F)$ *есть набор данных пред-*L_n *морфизма из* L' *в* L, *удовлетворяющий тождествам* (7.5) *для* $k=1,\ldots,n$.
Пусть отображение f_1 *инъективно.*
Тогда $\left(L'(\ell'_k)_{k=1}^n,(g'_k)_{k=1}^n,(b'_k)_{k=1}^n,b'\right)$ *есть* L_n *алгебра, и* $((f_k)_{k=1}^n,(H_k)_{k=1}^n,(F_k)_{k=1}^n,F)$ *есть морфизм* L_n *алгебр из* $\left(L',(\ell'_k)_{k=1}^n\right)$ *в* $(L,(\ell_k)_{k=1}^n)$.

Доказательство. У нас есть пред-L_n система $\left(L',(\ell'_k)_{k=1}^n,(g'_k)_{k=1}^n,(b'_k)_{k=1}^n,b'\right)$.
По теореме (7.15) достаточно доказать, что $(b')^2|_{S(sL')_{\leq n}}=0$. Докажем по индукции, что $(b')^2|_{S(sL')_{\leq k}}=0$ для $k=0,\ldots,n$.

Для $k=0$ нечего доказывать. Предположим, что $(b')^2|_{S(sL')_{\leq k}}=0$ для некоторого k, $0\leq k\leq n-1$. Докажем для $k+1$. Тогда по Предложению (7.8, i) имеем

$$\operatorname{im}\left((b')^2\circ\iota'_{k+1}\right)\subseteq sL'. \tag{7.8}$$

Тогда

$$0=b^2\circ F\circ\iota'_{k+1}=F\circ(b')^2\circ\iota'_{k+1}=F\circ\iota'_1\circ\pi'_1\circ(b')^2\circ\iota'_{k+1}=\iota_1\circ F_1\circ\pi'_1\circ b'^2\circ\iota'_{k+1}.$$

Первое равенство следует того, что b есть дифференциал по условию, $b^2=0$. Второе равенство следует из тождеств (7.5). Третье следует из (7.8). Четвертое следует из того, что F не увеличивает длину. Так как F_1 инъективно, имеем

$$0=\iota_1\circ\pi'_1\circ b'^2\circ\iota'_{k+1}=b'^2\circ\iota'_{k+1}.$$

Таким образом, $(b')^2|_{S(sL')_{\leq k+1}}=0$, что и требовалось. □

Под квази-мономорфизмом комлексов будем понимать морфизм комплексов, индуцирующий мономорфизм в гомологиях.

Теорема 7.20. *Пусть* $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$.
Пусть $\left((\ell'_k)_{k=1}^{n+1},(g'_k)_{k=1}^{n+1},(b'_k)_{k=1}^{n+1},b'\right)$ *есть пред-*L_{n+1} *система на* L'.
Пусть $\left((\ell_k)_{k\geq 1},(g_k)_{k\geq 1},(b_k)_{k\geq 1},b\right)$ *есть пред-*L_∞ *система на* L.
Пусть $\left((f_k)_{k=1}^{n+1},(H_k)_{k=1}^{n+1},(F_k)_{k=1}^{n+1},F\right)$ *есть набор данных пред-*L_{n+1} *морфизма из* L' *в* L.
Предположим, выполнены следующие условия:
(i) Имеем $(b')^2|_{S(sL')_{\leq n}}=0$, $b^2=0$, $(F\circ b'-b\circ F)|_{S(sL')_{\leq n}}=0$.
(ii) Имеем $b'_1=0$ *и* F_1 *есть квази-мономорфизм из комплекса* (sL',b'_1) *в комплекс* (sL,b_1).
Обозначим через $h_{n+1}:(sL')^{\odot n+1}\to sL$ *следующее отображение (часть выражения в формуле* (7.7) *для* $k=n+1$*):*

$$h_{n+1}:=\sum_{\substack{p+t=n+1\\2\leq p\leq n,t\geq 0}}\sum_{\sigma\in S(p,t)}F_{t+1}\circ\left(b'_p\odot\mathbf{1}^{\otimes t}\right)\circ\sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}-\sum_{r=2}^{n+1}\sum_{\substack{i_1,\ldots i_r,i_s\geq 1\\i_1+\ldots+i_r=n+1}}\sum_{\tau\in S(i_1,\ldots,i_r)}\frac{1}{r!}b_r\circ(F_{i_1}\odot\cdots\odot F_{i_r})\circ\tau_{\mathrm{tw}}^{-1}$$

Обозначим через $q_{n+1}:(L')^{\otimes n+1}\to L$ *следующее отображение:*

$$q_{n+1}:=\sum_{\substack{p+t=n+1\\2\leq p\leq n,t\geq 0}}\sum_{\sigma\in S(p,t)}\operatorname{sgn}(\sigma)(-1)^{tp}f_{t+1}\circ\left(\ell'_p\otimes\mathbf{1}^{\otimes t}\right)\circ\sigma_{\mathrm{tw}}^{-1}-$$

$$-\sum_{r=2}^{n+1} \sum_{\substack{i_1,\dots i_r \\ i_s\geq 1, i_1+\ldots+i_r=n+1}} \sum_{\tau\in S(i_1,\dots,i_r)} \frac{1}{r!}\operatorname{sgn}(\tau)\widetilde{\varepsilon_{r,i_1,\cdots i_r}}\ell_r \circ (f_{i_1}\otimes\cdots\otimes f_{i_r})\circ\tau_{\text{tw}}^{-1}.$$

Тогда:
(a) $(b')^2 = 0$, *то есть* $\left(L', (\ell'_k)_{k=1}^{n+1}, (g'_k)_{k=1}^{n+1}, (b'_k)_{k=1}^{n+1}, b'\right)$. *есть* L_{n+1} *алгебра.*
(b) $b_1 \circ h_{n+1} = 0$.
(c) $F\circ b' = b\circ F \Leftrightarrow F_1\circ b'_{n+1} - b_1\circ F_{n+1} + h_{n+1} = 0$.
(d) $F\circ b' = b\circ F \Leftrightarrow f_1\circ \ell'_{n+1} - \ell_1\circ f_{n+1} + q_{n+1} = 0$.

Доказательство. По теореме (7.17) имеем эквивалентность $F\circ b' = b\circ F \Leftrightarrow$ (7.7) для $k = n+1$. Разница левой и правой части в (7.7) задана следующим образом:

$$G_{n+1} := \sum_{\substack{p+t=n+1\\ p\geq 1, t\geq 0}} \sum_{\sigma\in S(p,t)} F_{t+1}\circ\left(b'_p\odot \mathbf{1}^{\odot t}\right)\circ\sigma_{\text{tw}}^{-1} -$$

$$-\sum_{r=1}^{n+1} \sum_{\substack{i_1,\dots i_r\\ i_s\geq 1, i_1+\ldots+i_r=n+1}} \sum_{\tau\in S(i_1,\dots,i_r)} \frac{1}{r!} b_r\circ (F_{i_1}\odot\cdots\odot F_{i_r})\circ\tau_{\text{tw}}^{-1} =$$

$$\overset{b'_1=0}{=} F_1\circ b'_{n+1} - b_1\circ F_{n+1} + h_{n+1}.$$

Таким образом, $F\circ b' = b\circ F \Leftrightarrow G_{n+1} = 0 \Leftrightarrow F_1\circ b'_{n+1} - b_1\circ F_{n+1} + h_{n+1} = 0$, что доказывает (c).

Заметим, что $\pi_1\circ(F\circ b' - b\circ F)\circ\iota'_{n+1} = G_{n+1} = F_1\circ b'_{n+1} - b_1\circ F_{n+1} + h_{n+1}$.
Тогда мы имеем:

$$b_1\circ h_{n+1} = b_1\circ\pi_1\circ\left(F\circ b' - b\circ F\right)\circ\iota'_{n+1} - b_1\circ F_1\circ b'_{n+1} + (b_1)^2\circ F_{n+1} =$$

$$\overset{(i),(7.7)\text{ при }k=1}{=} b_1\circ\pi_1\circ\left(F\circ b' - b\circ F\right)\circ\iota'_{n+1} - F_1\circ b'_1\circ b'_{n+1} =$$

$$\overset{b'_1=0}{=} b_1\circ\pi_1\circ\left(F\circ b' - b\circ F\right)\circ\iota'_{n+1} =$$

$$\overset{\text{опред.}b_1}{=} \pi_1\circ b\circ\iota_1\circ\pi_1\circ\left(F\circ b' - b\circ F\right)\circ\iota'_{n+1} =$$

$$\overset{(7.8,\text{ ii})}{=} \pi_1\circ b\circ\left(F\circ b' - b\circ F\right)\circ\iota'_{n+1} =$$

$$\overset{b^2=0}{=} \pi_1\circ b\circ F\circ b'\circ\iota'_{n+1}.$$

Так как $b'_1 = 0$, имеем $\operatorname{im}\left(b'\circ\iota'_{n+1}\right)\subseteq S(sL')_{\leq n}$. Тогда

$$b_1\circ h_{n+1} = \pi_1\circ F\circ b'^2\circ\iota'_{n+1} \overset{(7.8,\text{i})}{=} \pi_1\circ F\circ\iota'_1\circ\pi'_1\circ b'^2\circ\iota'_{n+1} \overset{\text{опред.}F_1}{=} F_1\circ\pi'_1\circ b'^2\circ\iota'_{n+1}.$$

Пусть $x\in(sL')^{\odot n+1}$, тогда элемент $y := \left(\pi'_1\circ b'^2\circ\iota'_{n+1}\right)(x)$ является циклом, так как $b'_1 = 0$. Тогда $F_1(y) = \left(F_1\circ\pi'_1\circ b'^2\circ\iota'_{n+1}\right)(x) = (b_1\circ h_{n+1})(x)$ есть граница. Так как F_1 квази-мономорфизм, элемент y тоже граница. Так как $b'_1 = 0$, получаем $y = 0$, то есть $\pi'_1\circ b'^2\circ\iota'_{n+1}$. Тогда получаем

$$b'^2\circ\iota'_{n+1} = 0, b_1\circ h_{n+1} = 0,$$

что и требовалось.

Докажем (d). Имеем

$$F\circ b' = b\circ F \Leftrightarrow F_1\circ b'_{n+1} - b_1\circ F_{n+1} + h_{n+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_1\circ\ell'_{n+1} - \ell_1\circ f_{n+1} + q_{n+1} = 0,$$

что следует из (7.17). □

Теорема 7.21. *Для данной DGL L можно ввести структуру L_∞ алгебры на гомологиях $H(L)$, для которой $H(L)$ и L являются квазиизоморфными L_∞ алгебрами. При этом для построенных скобок верно: $\ell_1 = 0, \ell_2$ индуцировано из скобки на L.*

Замечание. Доказательство этой теоремы есть повторение процедуры из теоремы (3.3) для A_∞ алгебры.

Доказательство. Необходимо построить два набора отображений

$$\{f_k : H(L)^{\otimes k} \to L\} \text{ и } \{\ell_k : H(L)^{\otimes k} \to H(L)\},$$

которые должны удовлетворять условиям (7.4) и (7.5).

На L введена структура L_∞ алгебры, так как L является DGL. Определим $f\colon (H(L), 0) \overset{\simeq}{\to} (L, d)$ как линейное отображение выбора циклов, которое по построению будет квазиизоморфизмом. Здесь пользуемся свободностью $H(L)$, так как все над $\mathbb{Q}$. Положим $f_1 = f$, $\ell_1 = 0$.

Определим $c\colon Ker(d) \to H(L)$ — линейное отображение взятия когомологического класса.

Предположим, что f_k и m_k уже построены для $k \le n$ и удовлетворяют условиям (7.4) и (7.5) для $k \le n$, то есть $(H(L), (\ell_k)_{k=1}^n)$ является L_n алгеброй и $(f_k)_{k=1}^n$ является L_n морфизмом. Рассмотрим соответствующую L_n систему $(H(L), (\ell_k)_{k=1}^n, (g_k)_{k=1}^n, (b_k)_{k=1}^n, b)$ и набор L_n морфизма $((f_k)_{k=1}^n, (H_k)_{k=1}^n, (F_k)_{k=1}^n, F)$.

Далее, для $k = n+1$ заметим, что выражение $q_{n+1} : (H(L))^{\otimes n+1} \to L$ не зависит от ℓ_{n+1} и f_{n+1} и выражается только через $(\ell_k)_{k \le n}$ и $(f_k)_{k \le n}$.

Допустим, что у нас есть какие-то кососимметричные отображения ℓ_{n+1} и f_{n+1}, то есть у нас есть пред-L_{n+1} система и пред-L_{n+1} морфизм. Из теоремы (7.20, (d)) следует, что $((f_k)_{k=1}^{n+1}$ есть L_{n+1} морфизм тогда и только тогда, когда

$$q_{n+1} = d \circ f_{n+1} - f_1 \circ \ell_{n+1}. \tag{7.9}$$

Дифференциал d выполняет функцию $\tilde{\ell}_1$ скобки на L.

Определим f_{n+1} и ℓ_{n+1} из условия (7.9). Из теоремы (7.20, (a)) следует, что

$$d \circ q_{n+1} = 0.$$

Отсюда следует, что к q_{n+1} применимо отображение c. Положим $\ell_{n+1} = -c \circ q_{n+1}$, композиция со взятием когомологического класса.

Теперь определим f_{n+1}, исходя из условия (7.9). Выражение

$$(f_1 \circ \ell_{n+1} + q_{n+1})\,(a_1 \otimes \ldots \otimes a_p) = (-f_1 \circ c \circ q_{n+1} + q_{n+1})\,(a_1 \otimes \ldots \otimes a_p) = d(c)$$

гомологично нулю, так как это взятие класса, а потом вложение в циклы.

Заметим, что отображение q_{n+1} кососимметрично, то есть удовлетворяет условию (7.3), так как корректно определено отображение h_{n+1} на $(sH(L))^{\odot n}$. Тогда выражение $f_1 \circ \ell_{n+1} + q_{n+1}$ кососимметрично, так как ℓ_{n+1} тоже кососимметрично. Тогда для базисных элементов $a_i \in H(L)$ определим

$$f_{n+1}\,(a_1 \otimes \ldots \otimes a_p) = c$$

с условием кососимметричности на базисных элементах и продолжим линейно.

Таким образом, построены отображения $(f_k)_{k=1}^{n+1}$ и $(\ell_k)_{k=1}^{n+1}$, удовлетворяющие условиям (7.5) для $k = 1, \ldots, n+1$. Остается воспользоваться теоремой (7.19), получаем, что $H(L)$ есть L_{n+1} алгебра. $\square$

8. Восстановление произведения Уайтхеда и обобщенные тождества Якоби для момент-угол комплекса

Предложение 8.1. *Пусть L — DGL с индуцированной L_∞ структурой. Тогда вспомогательная функция $q_k : (H(L))^{\odot k} \to L$ из теоремы (7.20) для $H(L)$ и L будет иметь следующий вид:*

$$q_k(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = \sum_{p=2}^{k-1} \sum_{\sigma \in S(p,k-p)} \varepsilon(\sigma, x_i) sgn(\sigma)(-1)^{p(k-p)} f_{k+1-p}(\ell_p(x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(p)}) x_{\sigma(p+1)} x_{\sigma(k)}) +$$

$$(8.1) \qquad +\sum_{s=1}^{k-1}\sum_{\substack{\tau\in S(s,k-s)\\ \tau(1)=1}} \varepsilon(\tau,x_i)sgn(\tau)(-1)^{s+1}(-1)^{(|x_{\tau(1)}|+\cdots+|x_{\tau(s)}|)(k-s-1)}$$
$$[f_s(x_{\tau(1)}\cdots x_{\tau(s)}), f_{k-s}(x_{\tau(s+1)}\cdots x_{\tau(k)})].$$

Доказательство. В выражении выше скобка $[x,y]$ есть скобка Ли на L.

Если учесть, что скобки $\ell_i=0$ для $i\geq 3$ для L, получаем $r=2$, и тогда

$$q_k(x_1\otimes\cdots\otimes x_k)=\sum_{p=2}^{k-1}\sum_{\sigma\in S(p,k-p)}\varepsilon(\sigma,x_i)sgn(\sigma)(-1)^{p(k-p)}f_{k+1-p}(\ell_p(x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(p)})x_{\sigma(p+1)}\cdots x_{\sigma(k)})-$$

$$-\sum_{s=1}^{k-1}\sum_{\tau\in S(s,k-s)}\frac{1}{2}\varepsilon(\tau,x_i)sgn(\tau)\widetilde{\varepsilon_{2,s,n-s}}\varepsilon_{\tau,x_i}[f_s(x_{\tau(1)}\cdots x_{\tau(s)}),f_{k-s}(x_{\tau(s+1)}\cdots x_{\tau(k)})].$$

При этом ε_{τ,x_i}, знак, возникающий при подстановке элементов $\{x_\tau\}$ равен в точности $(-1)^{(|x_{\tau(1)}|+\cdots+|x_{\tau(s)}|)(k-s-1)}$.

Посчитаем $\widetilde{\varepsilon_{2,s,n-s}}$. В общем случае:

$$\widetilde{\varepsilon_{r,i_1,\cdots i_r}}=(-1)^\wedge\{\frac{k(k-1)}{2}+\frac{r(r-1)}{2}+\frac{i_1(i_1-1)}{2}+\cdots+\frac{i_r(i_r-1)}{2}\}\cdot(-1)^\wedge\{\sum_{1\leq t\ <s\leq r}(1-i_s)i_t\}.$$

В нашем случае вторая часть выражения имеет вид:

$$(-1)^{\sum_{1\leq t\ <s\leq r}(1-i_s)i_t}=(-1)^{s(1-k+s)}=(-1)^{ks}.$$

Первая часть выражения: $(-1)^\wedge\{\frac{k(k-1)}{2}+\frac{s(s-1)}{2}+\frac{(k-s)(k-s-1)}{2}\}=(-1)^s$.

Для доказательства утверждения остается проверить, как $\frac{1}{2}$ трансформируется в условие $\tau(1)=1$. Так как перестановка τ перемешивающая, то либо $\tau(1)=1$, либо $\tau(s+1)=1$. Мы воспользуемся тем, что скобка $[x,y]$ антисимметричная, и в случае $\tau(s+1)=1$ перейдем к перестановке η, заданной как

$$(\eta(1)\cdots\eta(k))=(\tau(s+1)\cdots\tau(k)\tau(1)\cdots\tau(s)).$$

При этом $\tau\in S(s,k-s)$, тогда $\eta\in S(k-s,s),\eta(1)=1$. Для доказательства остается только проверить, что знак такой, какой надо.

$$[f_s(x_{\tau(1)}\cdots x_{\tau(s)}),f_{k-s}(x_{\tau(s+1)}\cdots x_{\tau(k)})]=$$
$$[f_{k-s}(x_{\tau(s+1)}x_{\tau(k)}),f_s(x_{\tau(1)}x_{\tau(s)})](-1)^{1+(s+1+|x_{\tau(1)}|+\cdots+|x_{\tau(s)}|)(k-s+1+|x_{\tau(s+1)}|+\cdots+|x_{\tau(k)}|)}.$$

При этом $\varepsilon(\eta)=\varepsilon(\tau)(-1)^{(|x_{\tau(1)}|+\cdots+|x_{\tau(s)}|)(|x_{\tau(s+1)}|+\cdots+|x_{\tau(k)}|)}$, $sgn(\eta)=sgn(\tau)(-1)^{s(k-s)}$, $(-1)^{(s+1)(k-s+1)=(-1)^{s(k-s)}(-1)^{k+1}}$. □

Теорема 8.2. *Пусть X - топологическое пространство, L — модель Квиллена для X. Пусть $x\in[x_1,\ldots,x_k]_W$, $k\geq 3$ — элемент из высшего произведения Уайтхеда.*

Тогда существует L_∞ структура на $H(L)=\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}$, такая что

$$x=\varepsilon\ell_k\left(x_1\otimes\ldots\otimes x_k\right),$$

где $\varepsilon=(-1)^{1+|x_{k-1}|+|x_{k-3}|+\cdots}$.

Замечание. Доказательство будет, по сути, повторять доказательство теоремы (4.2,(i)) для A_∞ алгебр из **[3]**.

Доказательство. Будем обозначать через $\tilde{x}:=(-1)^{|x|}x$.

При доказательстве будем пользоваться индуктивной процедурой из теоремы Кадеишвили для L_∞.

Рассмотрим отображение вложения в циклы $j_1: H(L)\to L$. Кроме того, что это отображение в циклы, мы от него ничего не требуем, и поэтому мы можем выбирать образ. Определим $j_1(x_i) := \phi(u_i)$. Напомним, что $\ell_1 = 0$ на $H(L)$. Напомним, что $\partial(\phi u_{ij}) = [\widetilde{\phi u_i}, \phi u_j]$.

Посчитаем $q_2(x_i, x_j)$, для этого рассмотрим формулу (8.1). Первая сумма будет равна нулю. Тогда

$$q_2(x_i, x_j) = [\phi u_i, \phi u_j] = (-1)^{|u_i|}\partial(\phi u_{ij}).$$

Отсюда получаем:

$$\ell_2 = -c \circ q_2, \ell_2(x_i, x_j) = 0, \text{ поэтому определим } j_2(x_i, x_j) := (-1)^{|u_i|}\phi u_{ij}.$$

Посчитаем q_3 на $(1, 2, 3)$. Первая сумма будет равна нулю, так как $\ell_2(x_i, x_j) = 0$. Тогда

$$q_3(x_1, x_2, x_3) = (-1)^{|x_1|}[j_1(x_1), j_2(x_2, x_3)] - [j_2(x_1, x_2), j_1(x_3)]+$$
$$+(-1)^{|x_2||x_3|}[j_2(x_2, x_3), j_1(x_2)] =$$
$$(-1)^{|x_2|}[\widetilde{\phi u_1}, \phi u_{23}] + (-1)^{|x_2|}[\widetilde{\phi u_{12}}, \phi u_3] + (-1)^{|x_2||x_3|+|x_3|+1}[\widetilde{\phi u_{13}}, \phi u_2] =$$
$$(-1)^{|x_2|}\left([\widetilde{\phi u_1}, \phi u_{23}] + [\widetilde{\phi u_{12}}, \phi u_3] + (-1)^{|x_2||x_3|+|x_3|+|x_2|+1}[\widetilde{\phi u_{13}}, \phi u_2]\right) = (-1)^{|x_2|}\partial\phi u_{123}.$$

Таким образом, мы восстановили 3-местное произведение Уайтхеда. При этом

$$j_3(x_1, x_2, x_3) := (-1)^{|x_2|}\phi u_{123}, \ell_3(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

На остальных элементах определяем j_2 так же, как в теореме Кадеишвили.

Пусть по индукции построены $(\ell_t)_{t\leq k-1}$ и $(j_t)_{t\leq k-1}$, такие что

$$\ell_t(x_{i_1}, \cdots, x_{i_t}) = 0, 1 \leq t \leq k-1,$$
$$j_t(x_{i_1}, \cdots, x_{i_t}) = (-1)^{|x_{i_{t-1}}|+|x_{i_{t-3}}|+\cdots}\phi u_{i_1\cdots i_t}, 1 \leq t \leq k-1.$$

Тогда первая сумма в выражении q_k равна нулю, так как $\ell_k = 0$. Имеем

$$q_k(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{\substack{\tau \in S(s,k-s) \\ \tau(1)=1}} \varepsilon(\tau, x_i) sgn(\tau)(-1)^{s+1}(-1)^{(|x_{\tau(1)}|+\cdots+|x_{\tau(s)}|)(k-s-1)}$$
$$[j_s(x_{\tau(1)}\cdots x_{\tau(s)}), j_{k-s}(x_{\tau(s+1)}\cdots x_{\tau(k)})].$$

Можно проверить следующее тождество о знаках:

$$(-1)\hat{}\{s + (|x_1| + \cdots + |x_s|)(k-s-1)\}(-1)\hat{}\{\sum_{i=1}^{s}(s-i)|x_i|\}(-1)\hat{}\{\sum_{i=s+1}^{k}(k-i)|x_i|\} =$$

$$(-1)\hat{}\{\sum_{i=1}^{k}(k-i)|x_i|\}(-1)\hat{}\{s + |x_1| + \cdots + |x_s|\} = (-1)^{s+|x_1|+\cdots+|x_s|}(-1)^{|x_{k-1}|+|x_{k-3}|+\cdots}.$$

Тогда

$$q_k(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{\substack{\tau \in S(s,k-s) \\ \tau(1)=1}} \varepsilon(\tau, x_i) sgn(\tau)(-1)^{s+1+|x_{\tau(1)}|+\cdots+|x_{\tau(s)}|}(-1)^{|x_{\tau(k-1)}|+|x_{\tau(k-3)}|+\cdots}$$
$$[\phi(u_{\tau(1)\cdots\tau(s)}), \phi(u_{\tau(s+1)\cdots\tau(k)})] =$$
$$\sum_{s=1}^{k-1} \sum_{\substack{\tau \in S(s,k-s) \\ \tau(1)=1}} \varepsilon(\tau, x_i) sgn(\tau)(-1)^{|u_{\tau(1)\cdots\tau(s)}|}(-1)^{|x_{\tau(k-1)}|+|x_{\tau(k-3)}|+\cdots}$$
$$[\phi(u_{\tau(1)\cdots\tau(s)}), \phi(u_{\tau(s+1)\cdots\tau(k)})] =$$
$$\sum_{s=1}^{k-1} \sum_{\substack{\tau \in S(s,k-s) \\ \tau(1)=1}} \varepsilon(\tau, x_i) sgn(\tau)(-1)^{|x_{\tau(k-1)}|+|x_{\tau(k-3)}|+\cdots}[\widetilde{\phi(u_{\tau(1)\cdots\tau(s)})}, \phi(u_{\tau(s+1)\cdots\tau(k)})].$$

Применим лемму о знаке (предлож. (7.12)).

$$q_k(x_1\otimes\cdots\otimes x_k) = \sum_{s=1}^{k-1}\sum_{\substack{\tau\in S(s,k-s)\\ \tau(1)=1}} \varepsilon(\tau, sx_i)(-1)^{|x_{k-1}|+|x_{k-3}|+\cdots}[\phi(\widetilde{u_{\tau(1)\cdots\tau(s)}}), \phi(u_{\tau(s+1)\cdots\tau(k)})] =$$

$$(-1)^{|x_{k-1}|+|x_{k-3}|+\cdots}\sum_{s=1}^{k-1}\sum_{\substack{\tau\in S(s,k-s)\\ \tau(1)=1}} \varepsilon(\tau, sx_i)[\phi(\widetilde{u_{\tau(1)\cdots\tau(s)}}), \phi(u_{\tau(s+1)\cdots\tau(k)})] =$$

$$(-1)^{|x_{k-1}|+|x_{k-3}|+\cdots}\partial\phi(u_{1\cdots k}) = (-1)^{|x_{k-1}|+|x_{k-3}|+\cdots}\phi\partial u_{1\cdots k} = (-1)^{|x_{k-1}|+|x_{k-3}|+\cdots}\phi\omega_{1\cdots k}.$$

Таким образом,

$$j_k(x_1\otimes\cdots\otimes x_k) = (-1)^{|x_{k-1}|+|x_{k-3}|+\cdots}\phi u_{1\cdots k},$$

$$\ell_k(x_1\otimes\cdots\otimes x_k) = (-1)^{1+|x_{k-1}|+|x_{k-3}|+\cdots}\overline{\phi(\omega_{1\cdots k})} = (-1)^{1+|x_{k-1}|+|x_{k-3}|+\cdots}x.$$

□

В случае пространства $(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}$ у нас есть канонические элементы $[\mu_{i_1},\ldots,\mu_{i_k}]_W$. Далее в качестве произведений Уайтхеда будут рассматриваться только такие элементы. Для них прододжения на толстые букеты определены согласованно. А именно, если, например, определены $[\mu_1,\mu_2,\mu_3]_W$ и $[\mu_2,\mu_3,\mu_4]_W$, мы имеем коммутативность следующей диаграммы:

(8.2)
$$\begin{array}{ccc} {S^2\times S^2}_{2,3} & \longrightarrow & T(S^2,S^2,S^2)_{1,2,3} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow\rho \\ T(S^2,S^2,S^2)_{2,3,4} & \longrightarrow & (\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K} \end{array},$$

где индексы обозначают номера вершин, которым соответствуют сферы в $(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}$.

Напомним, что модель Квиллена для толстого букета T имеет вид $(\mathbb{L}(U),\partial)$, где $U=\langle u_{i_1\ldots i_s}\rangle$, каждая образующая из U соответствует клетке в T. Для толстого букета на трех сферах $T(S^2,3)$ обозначим эту модель через $(\mathbb{L}_{T(S^2,3)},\partial)$. Тогда по клеточным причинам получаем следующую коммутативную диаграмму DGL:

(8.3)
$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{L}_{S^2\times S^2},,\partial)_{2,3} & \xrightarrow[i_{2,3}]{} & (\mathbb{L}_{T(S^2,3)},\partial)_{1,2,3} \\ \big\downarrow i_{1,2} & & \big\downarrow \phi_{1,2,3} \\ (\mathbb{L}_{T(S^2,3)},\partial)_{2,3,4} & \xrightarrow[\phi_{2,3,4}]{} & L \end{array},$$

где $i_{1,2}$ и $i_{2,3}$ есть DGL-вложения, $\phi_{1,2,3}$ и $\phi_{2,3,4}$ есть отображения, моделирующие произведения Уайтхеда $[\mu_1,\mu_2,\mu_3]_W$ и $[\mu_2,\mu_3,\mu_4]_W$. Имеем

$$(\mathbb{L}_{S^2\times S^2})_{2,3} = \mathbb{L}\langle u_2,u_3,u_{23}\rangle,$$

$$\phi_{1,2,3}\circ i_{2,3}(u_{23}) = \phi_{1,2,3}(u_{23}) = \phi_{2,3,4}\circ i_{1,2}(u_{23}) = \phi_{2,3,4}(u_{23}),$$

и поэтому по теореме (8.2) можно строить L_∞ структуру, восстанавливающую одновременно $[\mu_1,\mu_2,\mu_3]_W$ и $[\mu_2,\mu_3,\mu_4]_W$. Подобные рассуждения верны и для k-местных произведений Уайтхеда большего количества.

Таким образом, верна

Теорема 8.3. *Существует L_∞ структура на $H(L)=\pi_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K})\otimes\mathbb{Q}$, такая что для любого определенного канонического произведения Уайтхеда канонических элементов $[\mu_{i_1},\ldots,\mu_{i_k}]_W$, $k\geq 3$ выполнено*

$$\ell_k(\mu_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mu_{i_k}) = (-1)^{[\frac{k}{2}]+1}[\mu_{i_1},\ldots,\mu_{i_k}]_W.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой (8.2) и вышеописанными соображениями.

Заметим, что $|\mu_i| = 1$. При построении функций j_k мы требовали выполнение равенств типа

$$j_k(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_k) = (-1)^{|\mu_{k-1}|+|\mu_{k-3}|+\cdots} \phi u_{1\ldots k} = (-1)^{[\frac{k}{2}]} \phi u_{1\ldots k}.$$

Из согласованности мы получаем, что элемент $\phi u_{1\ldots k}$ не зависит от ϕ. Для корректного определения остается заметить, что μ_i являются базисом в $\pi_1(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q}$, поэтому требования на j_k выполняются одновременно. $\square$

Следствие 8.4. *Пусть есть канонические классы*

$$\mu_{i_1}, \ldots \mu_{i_k} \in \pi_1(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q}, i_1 < \cdots < i_k.$$

Пусть канонические произведения Уайтхеда

$$\left[\mu_{i_1}, \ldots, \widehat{\mu_{i_j}}, \ldots \mu_{i_k}\right]_W, j = 1, \ldots k,$$

определены.

Тогда имеет место обобщенное тождество Якоби следующего вида:

$$\sum_{j=1}^{k} \left[\left[\mu_{i_1}, \ldots, \widehat{\mu_{i_j}}, \ldots \mu_{i_k}\right]_{k-1}, \mu_j\right]_2 = 0.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой (8.3) и рассмотрим L_∞ структуру, для которой

$$\ell_s(\mu_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{j_s}) = (-1)^{[\frac{k}{2}]+1} \left[\mu_{j_1}, \ldots, \mu_{j_k}\right]_W,$$
$$s \leq k-1, j_1 < \cdots < j_s, \{j_1, \ldots, j_s\} \subseteq \{i_1, \ldots, i_k\}.$$

Так как $(k-1)$-местные произведения Уайтхеда определены, $\ell_s(\mu_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{j_s}) = 0$. для $s \leq k-2$. Применим тождество Якоби для k:

$$\sum_{i+j=k+1} \sum_{\sigma \in S(i,k-i)} sgn(\sigma)\varepsilon(\sigma)(-1)^{i(j-1)} \ell_j \left(\ell_i \left(\mu_{\sigma(1)} \cdots \mu_{\sigma(i)}\right) \mu_{\sigma(i+1)} \ldots \mu_{\sigma(k)}\right) = 0.$$

Для $i = 1, \ldots, k-2$ имеем $\ell_i \left(\mu_{\sigma(1)} \cdots \mu_{\sigma(i)}\right) = 0$. Скобка $\ell_1 = 0$. Тогда

$$\sum_{\sigma \in S(i,k-i)} sgn(\sigma)\varepsilon(\sigma)(-1)^{k-1} \ell_2 \left(\ell_{k-1} \left(\mu_{\sigma(1)} \cdots \mu_{\sigma(k-1)}\right) \mu_{\sigma(k)}\right) = 0.$$

Заметим, что $\ell_2(x \otimes y) = [x, y]$. Воспользуемся тем, что перестановка σ перемешивающая, а также тем, что $|\mu_i| = 1$, получаем требуемое.

$\square$

Список литературы

[1] V. Buchstaber, T. Panov. *Toric topology.* Math. Surv. and Monogr., 204. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[2] F. Belchi, U. Buijs, J. M. Moreno-Fernandez, A. Murillo. *Higher order Whitehead products and L-infinity structures on the homology of a DGL.* Linear Algebra and Its Applications, 520, 16-31.

[3] U. Buijs, J. M. Moreno-Fernandez, A. Murillo. *A-infinity structures and Massey products.* arxiv: 1801.03408

[4] S. Schmid. *On A-infinity categories. Extended Kadeishvili minimal models and Keller and Lefèvre-Hasegawa's filt construction over arbitrary ground rings.* Master thesis.

[5] D. Quillen. *Rational homotopy theory.* Ann. of Math. (2) 90 (1969), 205–295.

[6] D. Tanre. *Homotopie Rationnelle: Modeles de Chen, Quillen, Sullivan.* Lecture Notes in Mathematics 1025, Springer (1983).

[7] T. V. Kadeishvili. *On the homology theory of fibre spaces.* Russian Math. Surveys, 35(3):231–238, 1980.

[8] J.-L. Loday, B. Vallette. *Algebraic Operads.* Grundlehren Math. Wiss. 346, Springer (2012).

[9] T. Lada, M. Markl. *Strongly homotopy Lie algebras.*

[10] J. M. Moreno-Fernandez. *The Milnor-Moore theorem for L-infinity algebras in rational homotopy theory.* arXiv:1904.12530