Олимпиада по геометрии для студентов 1-2 курсов.

Уважаемые студенты 1-2 курсов!

Кафедра высшей геометрии и топологии приглашает вас принять участие в олимпиаде по геометрии. Чтобы сделать это, оформите решения всех или некоторых приведенных ниже задач и принесите на кафедру (комната 16-20 ГЗ) до 23 ноября включительно.

Также мы приглашаем принять участие в олимпиаде студентов 1-2 курсов других ВУЗов России и СНГ. Студенты других ВУЗов могут оформить свои решения и отправить их отсканированный вариант в формате pdf на электронную почту `garber@higeom.math.msu.su` с темой “Решения задач олимпиады” и указанием своих имени, фамилии, курса и ВУЗа.

Студенты старших курсов могут принять участие в олимпиаде вне конкурса.

Условия задач также доступны на сайте кафедры в разделе “Олимпиады”: http://higeom.mech.math.msu.su

Победителей ждут призы!

1. Назовем *эллипсоидом вращения* поверхность, получающуюся вращением эллипса относительно его большой оси. *Фокусами* эллипсоида вращения называются фокусы исходного эллипса. Докажите, что пересечение двух эллипсоидов вращения с общим фокусом лежит в одной плоскости.

2. Дана замкнутая кривая Γ на плоскости. Известно, что для любых 7 точек этой кривой существует центрально-симметричный выпуклый многоугольник, на границе которого лежат эти 7 точек. Докажите, что кривая Γ имеет центр симметрии.

3. Дано конечное множество точек $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ на плоскости и положительное число $\rho > 0$. Для произвольной точки X плоскости построим последовательность точек $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ по следующему правилу: $X_1 = X$, X_{k+1} это центр тяжести точек из $\mathcal{A}$, содержащихся в круге радиуса ρ с центром в точке X_k, если такие точки существуют, и $X_{k+1} = X_k$ иначе. Докажите, что данная последовательность является постоянной, начиная с некоторого места, при любой начальной точке X.

4. Выпуклый трехмерный многогранник P называется *двойственным* выпуклому трехмерному многограннику Q если существует такая биекция между множеством вершин P и множествам граней Q, что две вершины P соединены ребром если и только если соответствующие им грани Q имеют общее ребро и набор вершин P лежит в одной грани P в том и только том случае, когда соответствующие грани Q имеют общую вершину многогранника Q. Например, куб и октаэдр являются двойственными друг другу.

   Назовем выпуклый многогранник P *самодвойственным* если он является двойственным к самому себе. Например, любая n-угольная пирамида является самодвойственной.

   a) Докажите, что существует самодвойственный трехмерный многогранник, не являющийся пирамидой.

   b) Докажите, что существует бесконечное множество отличных от пирамиды самодвойственных трехмерных многогранников с попарно различным количество вершин.

5. В координатной кубической решетке рассмотрим куб составленный из 27 точек с целыми координатами вида $\{(i,j,k), 0 \le i,j,k \le 2\}$. В 14 целых точках куба с координатами $(i,0,0),(i,0,1),(0,j,0),(0,j,1),(0,0,2),(1,0,2),(1,1,0),(1,1,1)$ при $0 \le i,j \le 2$, заданы произвольные действительные числа — начальные данные; известно, что если во всех вершинах единичного квадрата стоят числа начальных данных, то соответствующий определитель 2×2 не равен нулю. Можно ли для любых начальных данных расставить числа в остальных 13 узлах решетки так, чтобы определитель любой 3×3-матрицы из чисел на гранях, на срединных сечениях куба и определитель любой 3×3-матрицы, изогнутой под прямым углом по средней строке или среднему столбцу, был равен нулю?

Вопросы по условиям задач можно задавать А.И.Гарберу по электронной почте `garber@higeom.math.msu.su`