Олимпиада по геометрии

Кафедра высшей геометрии и топологии и лаборатория геометрических методов в математической физике.
28 ноября 2012г.

Задача 1. На плоскости дана прямая ℓ и точка A. Найдите множество точек, которые могут быть фокусами парабол с вершиной A и касательной ℓ.

Задача 2. Дана окружность C и гипербола Γ, фокусы которой лежат вне C. Докажите, что фокусы Γ при инверсии относительно C переходят в точки, лежащие на директрисах Γ, тогда и только тогда, когда C касается обеих ветвей Γ.

Задача 3. На плоскости дана следующая механическая система (см. Рис. 1). Шарниры в точках A, B, C жестко закреплены в вершинах правильного треугольника со стороной 3, а шарниры в точках a, b, c, d свободно двигаются на плоскости. Длины всех звеньев равны 1 и остаются постоянными. Докажите, что каждому положению такой системы можно так сопоставить точку на сфере, что данное сопоставление будет взаимно-однозначным и непрерывным причем в обе стороны. (То есть, другими словами, конфигурационное пространство такой системы гомеоморфно сфере.)

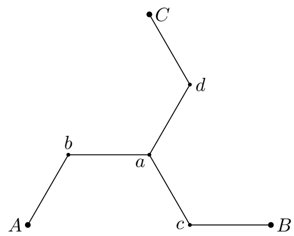

Рис. 1: Механическая система

Задача 4. Докажите, что если единичный куб в $\mathbb{R}^3$ содержится в тетраэдре S, то в S полностью содержится отрезок длины 3, параллельный одной из сторон куба.

Задача 5. Для векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ в четырехмерном пространстве обозначим через $S(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ площадь параллелограмма, натянутого на $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Докажите, что для любых четырех векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ выполнено неравенство

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b})S(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \leq S(\mathbf{a}, \mathbf{c})S(\mathbf{b}, \mathbf{d}) + S(\mathbf{a}, \mathbf{d})S(\mathbf{b}, \mathbf{c}).$$