Олимпиада по геометрии

Кафедра высшей геометрии и топологии и лаборатория геометрических методов в математической физике.

25 ноября 2013г.

Задача 1. Докажите, что вокруг любого выпуклого центрально-симметричного шестиугольника можно описать ровно один эллипс.

Задача 2. Можно ли трехмерный куб покрыть четыремя кубами меньшего размера?

Задача 3. Выпуклый многогранник M с треугольными гранями разрезан на тетраэдры; все вершины тетраэдров являются вершинами многогранника, и любые два тетраэдра либо не пересекаются, либо пересекаются по одной общей вершине, либо пересекаются по одному целому общему ребру, либо пересекаются по одной целой общей грани. Может ли оказаться так, что у каждого тетраэдра ровно одна грань лежит на поверхности M?

Задача 4. В угол α с вершиной A вписаны две параболы Γ_1 и Γ_2 (то есть каждая парабола касается каждой стороны угла). Каждый луч β с началом в точке A, лежащий внутри угла α, пересекают каждую из этих парабол в одной или двух точках; пусть $F_1(\beta)$ и $F_2(\beta)$ обозначают первые точки пересечения с параболами Γ_1 и Γ_2 соответственно, считая от точки A. Для каждой пары таких лучей β и γ построим точку $M(\beta, \gamma)$ пересечения прямых $F_1(\beta)F_1(\gamma)$ и $F_2(\beta)F_2(\gamma)$. Докажите, что все точки $M(\beta, \gamma)$ лежат на одной прямой.

Задача 5. Точки $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ расположены на единичной сфере $\{\|\mathbf{x}\| = 1\}$ и содержат в своей выпуклой оболочке начало координат. Докажите, что при условии $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_1$ выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{k} |\mathbf{x}_i \mathbf{x}_{i+1}| \geq 4.$$

($\| \cdot \|$ обозначает расстояние от точки до начала координат, а $| \cdot |$ расстояние между двумя точками.)