

Олимпиада по геометрии

Кафедра высшей геометрии и топологии и лаборатория геометрических методов в математической физике.

1 декабря 2014г.

Задача 1. Точка C лежит на параболы с вершиной A . H — проекция C на ось параболы. Докажите, что касательная к параболы в точке C параллельна медиане AM треугольника ACH .

Задача 2. Матрица P называется *матрицей перестановки* если в каждой ее строке и в каждом столбце есть ровно один ненулевой элемент, причем он равен 1. Две матрицы A и A' называются *перестановочно сопряженными*, если существует такая матрица перестановки P , что $A' = PAP^{-1}$. Докажите, что любая матрица, все главные (то есть симметричные относительно главной диагонали) миноры которой равны 1, перестановочно сопряжена либо верхнетрехугольной матрице с единицами на главной диагонали, либо матрице вида

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n-1} \\ b_n & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. В каждой точке плоскости с целыми координатами стоит по флагу. Можно ли сдвинуть каждый из флагов на расстояние не большее $1/100$ так, чтобы точная нижняя грань расстояний между парами флагов стало бы строго больше 1?

Задача 4. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке P , BC и AD — в точке Q и некоторая кривая третьего порядка Γ проходит через эти 6 точек. Докажите, что касательные к Γ в точках P и Q пересекаются в точке, лежащей на Γ , или параллельны.

Задача 5. Две вершины жесткого треугольника двигаются по паре фиксированных пересекающихся прямых. Докажите, что третья вершина треугольника двигается по некоторому эллипсу или отрезку прямой.