Олимпиада по геометрии
мехмат, кафедра ВГТ, 1 апреля 2019 г.

1. На плоскости даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. В момент времени t точки D, E и F делят соответственно отрезки AB, BC и DE в отношении t. Докажите, что точка F движется по параболе, касающейся прямых AB и BC в точках A и C соответственно.

2. В небе завис космический корабль в форме бесконечного параболоида вращения. Вася, смотря на корабль через окно, обвёл фломастером силуэт корабля на стекле, не двигая при этом головой. У него получилась замкнутая линия. Какая линия могла получиться?

3. Шесть различных точек A, B, C, D, E, F лежат на гиперболе. Каждая из четвёрок A, B, C, D и A, B, E, F лежит на одной окружности. Докажите, что CD параллельно EF.

4. Найти матрицу хотя бы одного такого линейного отображения $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, которое переводит стандартный единичный (4-мерный) куб в правильный восьмиугольник.
(Куб задан неравенствами $|x_i| \leqslant 1$ при $i = 1, 2, 3, 4$, где (x_1, x_2, x_3, x_4) — координаты в $\mathbb{R}^4$.)

5. Эллипс касается всех сторон выпуклого шестиугольника, причём касается некоторых трёх попарно несоседних сторон в их серединах. Докажите, что вокруг шестиугольника можно описать кривую второго порядка.

Решения

1. *На плоскости даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. В момент времени t точки D, E и F делят соответственно отрезки AB, BC и DE в отношении t. Докажите, что точка F движется по параболе, касающейся прямых AB и BC в точках A и C соответственно.*

Выберем аффинную систему координат (x, y) с началом в точке B и базисными векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$. Обозначим $\mu := \frac{t}{t+1}$. Тогда

$$A(1,0), B(0,0), C(0,1), D(\mu, 0), E(0, 1-\mu), F(\mu^2, (1-\mu)^2).$$

Очевидно, что точка F лежит на параболе $(x-y+1)^2 = 4x$. Уравнение касательной к параболе в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$2(x_0 - y_0 - 1)(x - x_0) - 2(x_0 - y_0 + 1)(y - y_0) = 0.$$

Легко видеть, что на параболе лежат точки A и C и касательная к параболе в этих точках совпадает с одной из осей координат.
Замечание. Эта задача в точности означает, что парабола является кривой Безье второго порядка.

2. *В небе завис космический корабль в форме бесконечного параболоида вращения. Вася, смотря на корабль через окно, обвёл фломастером силуэт корабля на стекле, не двигая при этом головой. У него получилась замкнутая линия. Какая линия могла получиться?*

Ответ: эллипс.

Пусть глаза Васи находятся в точке O и пусть A — произвольная точка окна.

Тогда точка A попадёт на силуэт ровно тогда, когда луч OA касается параболоида вращения в некоторой точке B и точка B не загорожена от Васи самим параболоидом, то есть если отрезок OB пересекает параболоид в единственной точке B. Но последнее условие лишнее, так как параболоид вращения — поверхность второго порядка, а значит, любая касательная прямая к нему пересекает его в единственной точке.

Выберем аффинную систему координат, в которой параболоид задан уравнением $x^2 + y^2 - 2z = 0$. Пусть $O(x_0, y_0, z_0)$.

Точка $B = (x_b, y_b, z_b)$ на параболоиде является точкой касания с некоторым лучом OA, если и только если касательная плоскость в точке B содержит O, то есть

$$\begin{cases} (2x_b)(x_b - x_0) + (2y_b)(y_b - y_0) + (-2)(z_b - z_0) = 0 \\ x_b^2 + y_b^2 - 2z_b = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} -2x_b x_0 - 2y_b y_0 + 2(z_b + z_0) = 0 \\ x_b^2 + y_b^2 - 2z_b = 0. \end{cases}$$

Здесь мы из первого уравнения вычли второе, домноженное на 2. Первое уравнение получилось линейным по B.

Поэтому решение этой системы — это сечение параболоида некоторой плоскостью, то есть всевозможные точки B лежат на кривой второго порядка. Всевозможные точки A — это пересечение плоскости окна с частью конуса, образованной лучами OB. Значит, всевозможные точки A тоже лежат на некоторой кривой второго порядка. Если кривая, образованная точками A, замкнута, то эта кривая — эллипс.

3. *Шесть различных точек A, B, C, D, E, F лежат на гиперболе. Каждая из четвёрок A, B, C, D и A, B, E, F лежит на одной окружности. Докажите, что CD параллельно EF.*

Пусть в некоторой прямоугольной системе координат гипербола задана уравнением $F(x, y) = 0$, окружность, на которой лежат точки A, B, C, D, — уравнением $G(x, y) = x^2 + y^2 + \dots = 0$, окружность, на которой лежат точки A, B, E, F, — уравнением $H(x, y) = x^2 + y^2 + \dots = 0$, а прямые AB, CD и EF заданы уравнениями $\ell_{AB}(x, y) = 0, \ell_{CD}(x, y) = 0, \ell_{EF}(x, y) = 0$.

Так как окружности $G = 0$ и $H = 0$ имеют общую хорду, лежащую на прямой AB, то

$$G - H = \lambda \ell_{AB} \tag{1}$$

для некоторого числа λ.

Так как кривые второго порядка $F = 0$, $G = 0$ и $\ell_{AB}\ell_{CD} = 0$ проходят через общие 4 точки, не лежащие на одной прямой, то

$$\alpha_1 F + \beta_1 G = \ell_{AB}\ell_{CD} \tag{2}$$

для некоторых чисел α_1 и β_1.

Аналогично

$$\alpha_2 F + \beta_2 H = \ell_{AB}\ell_{EF}. \tag{3}$$

Домножим уравнение 1 на $\beta_1\beta_2$, уравнение 2 — на $-\beta_2$, уравнение 3 — на β_1 и сложим:

$$(-\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)F = \ell_{AB}(-\beta_2\ell_{CD} + \beta_1\ell_{EF} + \lambda\beta_1\beta_2). \tag{4}$$

Если обе части уравнения 4 не равны тождественно 0, то в левой стоит уравнение гиперболы, а в правой — уравнение пары прямых, противоречие. Значит,

$$-\beta_2\ell_{CD} + \beta_1\ell_{EF} + \lambda\beta_1\beta_2 = 0,$$

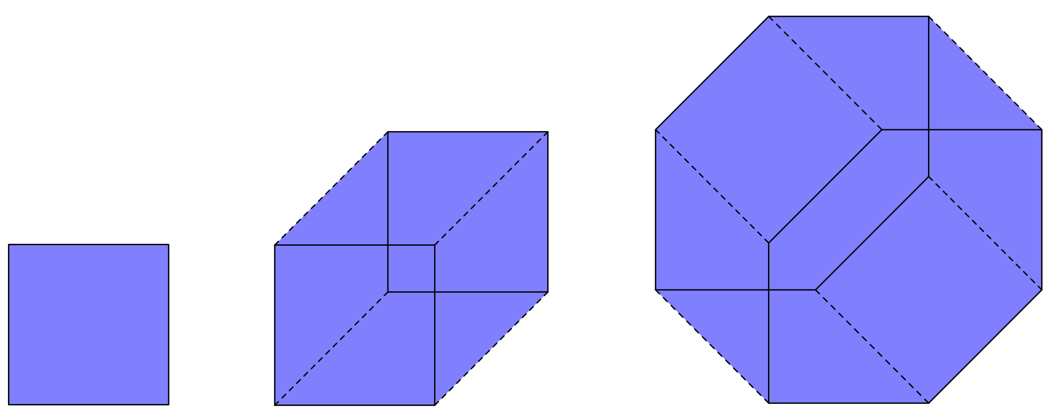
то есть $\ell_{CD} = \frac{\beta_1}{\beta_2}\ell_{EF} + \lambda\beta_1$ и прямые $\ell_{CD} = 0$ и $\ell_{EF} = 0$ параллельны.

4. *Найти матрицу хотя бы одного такого линейного отображения $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, которое переводит стандартный единичный (4-мерный) куб в правильный восьмиугольник.*
(Куб задан неравенствами $|x_i| \leqslant 1$ при $i = 1, 2, 3, 4$, где (x_1, x_2, x_3, x_4) — координаты в $\mathbb{R}^4$.)

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

Пусть r — поворот плоскости на угол $\frac{\pi}{4}$. Пусть $v = (1, 0)$ и отображение f переводит стандартные базисные вектора $\mathbb{R}^4$ в вектора v, rv, r^2v, r^3v. Тогда

$$f : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 v + x_2 rv + x_3 r^2 v + x_4 r^3 v.$$

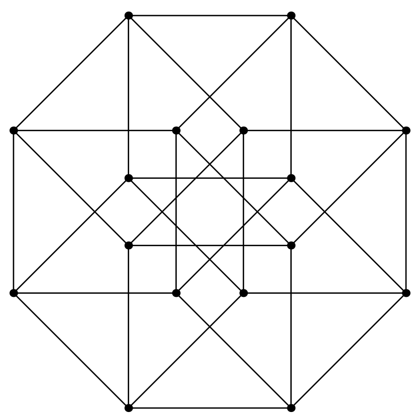


Образ множества $\{-1 \le x_1 \le 1,\ x_2 = -1,\ -1 \le x_3 \le 1,\ x_4 = -1\}$ при отображении f — это, очевидно, квадрат со сторонами $2v$ и $2r^2v$. Обозначим его за S.

Тогда образ множества $\{-1 \le x_1 \le 1,\ -1 \le x_2 \le 1,\ -1 \le x_3 \le 1,\ x_4 = -1\}$ — это область, которую заметает квадрат S, если его протащить вдоль направления $2rv$. Это шестиугольник. Обозначим его за H.

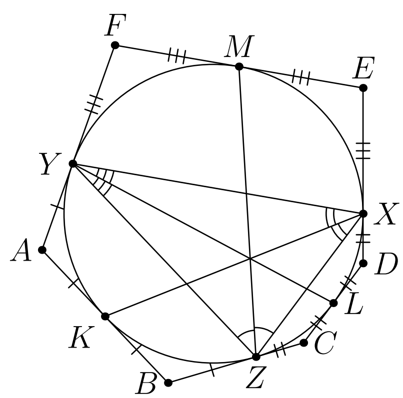
Наконец, искомый образ куба – это область, которую заметает шестиугольник H, если его протащить вдоль направления $2r^3v$. Легко видеть, что получился правильный восьмиугольник.

На этом рисунке изображён образ каркаса 4-куба.



5. *Эллипс касается всех сторон выпуклого шестиугольника, причём касается некоторых трёх попарно несоседних сторон в их серединах. Докажите, что вокруг шестиугольника можно описать кривую второго порядка.*

М. Корнев, студент 3 курса



Аффинным преобразованием переведём эллипс в окружность. Пусть дан шестиугольник $ABCDEF$, причём окружность касается в серединах K, L, M соответственно сторон AB, CD и EF, а в точках X, Y, Z — соответственно сторон DE, AF и BC.

Заметим, что $EX = EM = MF = FY$, поэтому M — середина дуги XY. Поэтому ZM — биссектриса треугольника XYZ. Аналогично XK и YL — биссектрисы треугольника XYZ. Поэтому отрезки XK, YL и ZM пересекаются в одной точке.

При полярном соответствии относительно окружности точки X, Y, Z, K, L, M переходят в касательные в этих точках. Значит, точки пересечения прямых AB, ED; BC, EF и CD, AF лежат на одной прямой, т. е. точки пересечения пар противоположных сторон шестиугольника $ABCDEF$ лежат на одной прямой. В силу теоремы Паскаля, около данного шестиугольника действительно можно описать конику.