УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

σ-ФУНКЦИИ (n,s)-КРИВЫХ

В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, В. З. Энольский

Пусть $\mathbf{u}\in\mathbb{C}^g$, $\gamma\in\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ и $m=\begin{pmatrix}\omega & \omega'\\ \eta & \eta'\end{pmatrix})$, где ω, ω', η и η' такие $g\times g$-матрицы, что $\det\omega\neq 0$, $\omega^{-1}\omega'$ – симметрична, $\mathrm{Re}(\omega^{-1}\omega')$ – положительно определена и $m\begin{pmatrix}0 & -1_g\\ 1_g & 0\end{pmatrix}m^T=\frac{\imath\pi}{2}\begin{pmatrix}0 & -1_g\\ 1_g & 0\end{pmatrix}$. Рассмотрим систему функциональных уравнений относительно функции ϕ:

$$\begin{gathered}\phi(\mathbf{u}+2\omega\mathbf{k}+2\omega'\mathbf{k}';m)=\exp\{2(\eta\mathbf{k}+\eta'\mathbf{k}')(\mathbf{u}+\omega\mathbf{k}+\omega'\mathbf{k}')\}\phi(\mathbf{u};m),\\ \phi(\mathbf{u};\gamma m)=\phi(\mathbf{u};m),\end{gathered}\tag{1}$$

где $\mathbf{k},\mathbf{k}'\in\mathbb{Z}^g$. Целые по $\mathbf{u}$ решения (1) называются σ-функциями. Как функции от $\mathbf{u}$ они образуют одномерное линейное пространство [1], [2]. Такие функции имеют прямую реализацию с помощью тета-функций [3].

В настоящей заметке мы покажем, что в случае, когда матрицы (ω,ω') и (η,η') возникают как матрицы периодов канонических голоморфных и мероморфных дифференциалов на римановой поверхности алгебраической кривой, σ-функция допускает представление в окрестности $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ в виде ряда по $\mathbf{u}$, коэффициенты которого являются полиномами от констант определяющих кривую.

Пусть n и s – пара взаимнопростых целых чисел, таких что $s>n\geq 2$. Натуральные числа $\{w_1,w_2,\dots\}$ не представимые в виде $an+bs$, где a и b – неотрицательные целые числа, образуют *последовательность Вейерштрасса* длины $g=\dfrac{(n-1)(s-1)}{2}$. Рассмотрим класс плоских невырожденных кривых рода g вида

$$f(x,y;\boldsymbol{\lambda})=y^n-x^s-\sum_{\alpha,\beta}\lambda_{\alpha n+\beta s}x^\alpha y^\beta=0,$$

где $0\leq\alpha<s-1$, $0\leq\beta<n-1$ и $\alpha n+\beta s<ns$. Размерность пространства модулей такого класса равна $d_{n,s}=\dfrac{(n+1)(s+1)}{2}-\left[\dfrac{s}{n}\right]-3$. Кривые $V(\boldsymbol{\lambda})$ такого

Работа выполнена при частичной поддержке грантов INTAS 96-770, CRDF UM1-325 и РФФИ 99-01-00090.

вида называются (n,s)-кривыми. Зададим отображение Абеля $A_r\colon (V(\boldsymbol\lambda))^r\to\mathbb{C}^g$ при помощи голоморфных интегралов

$$(2)\qquad u_i=\sum_{k=1}^{r}\int_{(x_k,y_k)}^{(\infty,\infty)}\mathrm{d}\,u_i(x,y),\qquad \mathrm{d}\,u_i(x,y)=x^{\alpha_i-1}y^{n-\beta_i-1}\frac{\mathrm{d}\,x}{f_y},\quad i=1,\dots,g;$$

где $f_y=\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y;\boldsymbol\lambda)$ и пара целых чисел α_i и β_i представляет i-й элемент последовательности Вейерштрасса $-\alpha_i n+\beta_i s=w_i$. Определим мероморфные дифференциалы $\{\mathrm{d}\,r_1(x,y),\dots,\mathrm{d}\,r_g(x,y)\}$ с помощью соотношения [4]:

$$\frac{\mathrm{d}\,\Omega\Big((z,w),(x,y)\Big)}{\mathrm{d}\,x}-\frac{\mathrm{d}\,\Omega\Big((x,y),(z,w)\Big)}{\mathrm{d}\,z}=\sum_{k=1}^{g}\frac{\mathrm{d}\,u_i(x,y)}{\mathrm{d}\,x}\frac{\mathrm{d}\,r_i(z,w)}{\mathrm{d}\,z}-\frac{\mathrm{d}\,u_i(z,w)}{\mathrm{d}\,z}\frac{\mathrm{d}\,r_i(x,y)}{\mathrm{d}\,x},$$

$\Omega\Big(l(x,y),(z,w)\Big)=1/((x-z)f_y)\cdot\sum_{k=1}^{n}y^{n-k}(f(z,w;\boldsymbol\lambda)/w^{n-k+1})_+$, где $(\,\cdot\,)_+$ обозначает, что мы учитываем только слагаемые с неотрицательными степенями w. Положим

$$(3)\qquad \begin{aligned}(\omega,\omega')&=\frac12\left(\oint_{\mathfrak{a}_i}\mathrm{d}\,u_j(x,y),\oint_{\mathfrak{b}_i}\mathrm{d}\,u_j(x,y)\right)_{i,j=1,\dots,g},\\ (\eta,\eta')&=-\frac12\left(\oint_{\mathfrak{a}_i}\mathrm{d}\,r_j(x,y),\oint_{\mathfrak{b}_i}\mathrm{d}\,r_j(x,y)\right)_{i,j=1,\dots,g},\end{aligned}$$

где $\{\mathfrak{a}_i,\mathfrak{b}_i\}_{i=1,\dots,g}$ – базис $H_1(V(\boldsymbol\lambda),\mathbb{Z})$ с пересечениями $\mathfrak{a}_i\circ\mathfrak{b}_j=\delta_{i,j}$ и $\mathfrak{a}_i\circ\mathfrak{a}_j=\mathfrak{b}_i\circ\mathfrak{b}_j=0$. Пусть $\{(x_i,y_i)\}_{i=1,\dots,g}$ – неспециальный дивизор. Рассмотрим функцию заданную формулой

$$(4)\qquad \sigma(\mathbf{u},\boldsymbol\lambda)=\exp\Big\{\varphi\Big((x_1,y_1),\dots,(x_g,y_g)\Big)\Big\}\frac{\det\left(\dfrac{\mathrm{d}\,u_j(x_i,y_i)}{\mathrm{d}\,x_i}\right)_{i,j=1,\dots,g}}{\det(x_i^{j-1})_{i,j=1,\dots,g}}\prod_{i=1}^{g}x_i,$$

где

$$\varphi\Big((x_1,y_1),\dots,(x_g,y_g)\Big)=\frac12\sum_{i\neq j}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{(x_i,y_i)}^{(\infty,\infty)}\Omega\Big((z,w),(x_j,y_j^{(k)})\Big)\,\mathrm{d}\,z,$$

где для каждой пары (x_j,y_j) набор $\{y_j^{(1)},\dots,y_j^{(n-1)},y_j^{(n)}=y_j\}$ представляет собой множество корней $\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ уравнения $f(\xi,x_j,\boldsymbol\lambda)=0$.

Теорема 1. *Функция $\sigma(\mathbf{u},\boldsymbol\lambda)$ является решением системы* (1) *с матрицами ω, ω', η и η' заданными формулами* (3).

Действительно, правая часть (4) представляет собой симметрическую функцию переменных $(x_1,\dots,x_g)$ и, согласно теореме обращения Якоби, является однозначной функцией вектора $\mathbf{u}=A_g\Big((x_1,y_1),\dots,(x_g,y_g)\Big)$; требуемое утверждение следует из свойств периодичности дифференциала $\Omega\Big((x,y),(z,w)\Big)\,\mathrm{d}\,x$ и теоремы Абеля.

Следствие 1. *В окрестности точки* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ *функция* $\sigma(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ *обладает разложением по степеням* $u_1, \dots, u_g$ *с коэффициентами, представляющими собой полиномы по* $\boldsymbol{\lambda}$.

Окрестность точки $\mathbf{0}$ согласно (2) соответствует окрестности точки $g \cdot (\infty, \infty) \in (V(\boldsymbol{\lambda}))^g$. Вводя параметризацию $(x_j, y_j) = (t_j^{-n}, t_j^{-s}(1 + \sum_{k>0} q_k(\boldsymbol{\lambda}) t_j^k))$, где $q_k(\boldsymbol{\lambda})$ – полиномы, находим из (4), что $\sigma(\mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda}) = 0$. Требуемое разложение представляет собой композицию разложения правой части (4) и рядов обратных (2), и как легко проверить, содержит $\boldsymbol{\lambda}$ только в целых неотрицательных степенях. Введем градуировку $\deg t = 1$, где t – локальный параметр в окрестности (∞, ∞); тогда $\deg x = -n$, $\deg y = -s$ и $\deg \lambda_k = -k$. В этой градуировке, согласно (2), $\deg u_k = w_k$, где w_k – соответствующий элемент последовательности Вейерштрасса; в то время как из (4) следует однородность правой части в такой градуировке, причем $\deg \sigma(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \dfrac{(n^2-1)(s^2-1)}{24}$, что доказывает следствие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Conforto F. Abelsche Functionen und algebraische Geometrie. Berlin: Springer-Verlag, 1956. [**2**] Маркушевич А. И. Ввведение в классическую теорию абелевых функций. М.: Наука, 1979. [**3**] Buchstaber V. M., Enolskii V. Z., Leykin D. V. // Rev. Math. Math. Phys. 1997. V. 10. № 2. P. 1–125. [**4**] Baker H. F. Abelian functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.