2000 г. июль — август *т. 55, вып. 4(334)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 513.836

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ УМНОЖЕНИЙ В КОМПЛЕКСНЫХ КОБОРДИЗМАХ

Б. И. Ботвинник, В. М. Бухштабер, С. П. Новиков, С. А. Юзвинский

1. Введение. Комплексные кобордизмы и алгебра

Комплексные кобордизмы (бордизмы) $U^*(X)$, $U^*(X,Y)$ представляют собой общеизвестную в топологии экстраординарную теорию (ко)гомологий, где дуальные классы бордизмов $u\in U_k(X)$ представлены отображениями замкнутых U-многообразий в пространство X, $f\colon M^k\to X$ (унитарная структура задается в стабильном расслоении, нормальном к $M^k\subset\mathbb{R}^{n+k}$) [1]. Все кобордизмы $U^*(X,Y)$ – это коммутативные ассоциативные $\mathbb{Z}$-градуированные кольца с единицей $1\in U^0(X)$. Все $U^*(X,Y)$ – это модули над алгеброй кобордизмов точки $U^*(pt)=\Omega_U^*=\Lambda$. Согласно теореме Милнора–Новикова (см. [2]–[4]) это кольцо изоморфно кольцу полиномов от четномерных образующих: $\Omega_U^*=\mathbb{Z}[u_2,u_4,u_6,\dots]=\Lambda$, $\deg u_{2k}=-2k$.

Задача. Дать классификацию всех стабильных ассоциативных умножений в теории комплексных кобордизмов (для конечных комплексов X).

Поясним, что мы подразумеваем под термином “умножение в теории кобордизмов”: это – билинейная операция $u\circ v=\Phi(u\otimes v)$,

$$\Phi\colon U^*(X)\otimes U^*(X)\to U^*(X),$$

определенная для всех пространств X, всех элементов $u,v\in U^*(X)$ и коммутирующая с непрерывными отображениями $f\colon X\to Y$,

$$f^*(u)\circ f^*(v)=\Phi(f^*(u)\otimes f^*(v))=f^*\Phi(u\otimes v)=f^*(u\circ v).$$

Следует пояснить также термин “стабильное умножение” – оно должно коммутировать с изоморфизмом надстройки s. Имеется отмеченный элемент $\mu\in U^1(S^1)$ такой, что $s\colon U^*(X)\to\widetilde U^*(\Sigma X)$, $u\to\mu u=s(u)$, есть изоморфизм надстройки, где S^1 – окружность, $\Sigma X=S^1\wedge X$ – надстройка над пространством X и $\widetilde U^*(\Sigma X)=U^*(\Sigma X,pt)$. Здесь и далее $\wedge$ – символ приведенного (“тензорного”) произведения в категории пространств с отмеченными точками, $X\wedge Y=X\times Y/X\vee Y$. Мы требуем стабильности нового умножения $\Phi(u\otimes v)=u\circ v$, исходя из условия:

$$\mu(u\circ v)=(\mu u)\circ v=(-1)^{q_1}u\circ(\mu v), \tag{1}$$

где $q_1 = \deg u$, а знаком uv обозначается обычное умножение. Очевидно, оно стабильно.

Напомним, что теория комплексных кобордизмов является модулем над "алгеброй Стинрода" всех операций A^U, т.е. линейных операторов $a\colon U^*(X) \to U^*(X)$, коммутирующих с непрерывными отображениями и надстройкой (стабильных). Эта алгебра, вычисленная в [5], состоит из двух частей:

1. Кольцо $\Lambda = \Omega^U \subset A^U$, состоящее из операторов умножения на "скаляр" $u \to \lambda u$, $\lambda \in \Lambda$.

2. Алгебра Ландвебера–Новикова S [5], [6]. Это – алгебра Хопфа над $\mathbb{Z}$, которая $\mathbb{Z}^+$-градуирована, $S = \sum_{j \geqslant 0} S^j$, с базисом $s_w \in S$, где $S^0 = \mathbb{Z}$ и $w = (k_1, \ldots, k_l)$ – это либо неупорядоченный набор положительных целых чисел $k_j \in \mathbb{Z}^+$, либо символ пустого множества, $s_\varnothing = s_0 \in S^0$, $s_0 = 1$ и $\deg w = 2 \sum k_q$.

Коумножение (диагональ) имеет вид

$$\Delta s_w = \sum_{(w', w'') = w} s_{w'} \otimes s_{w''}. \tag{2}$$

При этом алгебра Хопфа S действует на всех $U^*(X)$ (в том числе на $\Lambda = U^*(pt) = \Omega^U$), превращая их в "модули Милнора",

$$s_w(uv) = \sum_{(w', w'') = w} s_{w'}(u) s_{w''}(v). \tag{3}$$

Примитивные элементы $s_{(n)}$ порождают алгебру Ли: $[s_{(n)}, s_{(m)}] = (m - n) s_{(m+n)}$.

Так называемые *геометрические кобордизмы* $x \in U^2(X)$ определяются исходя из требования

$$s_{(k)}(x) = x^{k+1}, \quad k \geqslant 0 \quad \text{и} \quad s_w(x) = 0, \quad w = (k_1, \ldots, k_l), \quad l > 1. \tag{4}$$

Представление алгебры S (и всей алгебры A^U) является *асимптотически точным* на произведении большого числа геометрических кобордизмов:

$$s \to s(x_1 x_2 \cdots x_N), \qquad s \in S,$$

т.е. для любого элемента $s \in S$ размерности $2m$ найдется такое число $N > m$, что $s(x_1 x_2 \cdots x_N) = 0$ эквивалентно $s = 0$. Действие алгебры S на кольце Λ является точным представлением. Оно впервые вычислено в [5]. В работе [7] найдена интерпретация этого действия через дифференциальные операторы на бесконечномерной группе Ли формальных диффеоморфизмов прямой. В работах [8], [9] развивалась теория операторов на квантовых группах, основанная на обобщении этого примера. Здесь $A^U = (\Lambda S)^\wedge$, т.е. пополнение рядами вида

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j s_{w_j} \in A^U, \qquad \lambda_j \in \Lambda, \quad s_{w_j} \in S,$$

где $\deg w_j \to +\infty$, когда $j \to \infty$. При этом правило коммутирования определяется представлением алгебры S на алгебре Λ. Имеет место вложение $\Lambda \subset S^*\colon \lambda(s_w) = \varepsilon s_w(\lambda)$, где $\lambda \in \Lambda$ и $\varepsilon\colon \Lambda \to \mathbb{Z}$ – аугментация, $\varepsilon(1) = 1$ и $\varepsilon(\lambda) = 0$, если $\deg \lambda < 0$. Здесь S^* – это алгебра Хопфа, двойственная к S; $\Lambda \otimes Q = S^* \otimes Q$. Очевидно, кольцо S^* – это кольцо полиномов над $\mathbb{Z}$ от образующих s_k^* таких, что (s_k^*, s_w) равно единице, если $w = (k)$, и равно нулю в противном случае. Алгебраическое описание подкольца $\Lambda \subset S^*$ мы дадим ниже.

Лемма 1. *Всякое стабильное умножение в теории комплексных кобордизмов задается формальным рядом вида*

$$\widehat{\Phi} = \sum \lambda_{ij} s_{w_i} \otimes s_{w_j}, \tag{5}$$

где $\lambda_{ij} \in \Lambda$, $\deg w_i \to \infty$, $\deg w_j \to \infty$, $i, j \to \infty$, *так что умножение определяется формулой*

$$u \circ v = \Phi(u \otimes v) = \sum \lambda_{ij} s_{w_i}(u) s_{w_j}(v), \tag{6}$$

$u, v \in U^*(X)$.

Все коэффициенты ряда $\widehat{\Phi}$ *однозначно определяются умножением* $u \circ v$ *для* $u, v \in \Lambda = U^*(pt) = \Omega^U$.

Доказательство. Пусть $x(N) \in U^{2N}(MU_N)$ – канонический класс Тома пространства Тома MU_N универсального комплексного N-мерного расслоения $\eta_N \to BU(N)$.

Известно, что $U^*(MU_N, pt)$ является одномерным A^U-модулем с образующим $x(N)$, причем элементы $s_w x(N)$, где $w = (k_1, \dots, k_l)$, $l \leqslant N$, вместе с $x(N) = s_0 x(N)$ составляют его базис над Λ.

Пусть задано некоторое стабильное умножение $\circ$ в теории комплексных кобордизмов. Тогда для любых N_1 и N_2 определено произведение $x(N_1) \circ x(N_2) \in U^*(MU_{N_1} \times MU_{N_2})$. В виду билинейности умножения $\circ$ мы имеем:

$$x(N_1) \circ x(N_2) \in \widetilde{U}^*(MU_{N_1} \wedge MU_{N_2}),$$

и, следовательно, это произведение можно однозначно записать в виде формального ряда

$$x(N_1) \circ x(N_2) = \sum \lambda_{ij} s_{w_i}(x(N_1)) s_{w_j}(x(N_2)),$$

где $w_i = (k_1', \dots, k_{l_1}')$, $l_1 \leqslant N_1$ и $w_j = (k_1'', \dots, k_{l_2}'')$, $l_2 \leqslant N_2$. Коэффициенты $\lambda_{ij} \in \Lambda$ не зависят от N_1 и N_2, так как умножение $\circ$ коммутирует с непрерывными отображениями и стабильно. Напомним, что пространства Тома MU_N для разных N связаны отображениями $e_{N_1,N_2} \colon \Sigma^{2(N_2-N_1)} MU_{N_1} \to MU_{N_2}$ такими, что $e_{N_1,N_2}^* x(N_2) = s^{2(N_2-N_1)} x(N_1)$.

Для любых элементов $u \in U^{q_1}(X, Y)$ и $v \in U^{q_2}(X, Y)$ существуют отображения

$$f_1 \colon \Sigma^{2N_1 - q_1} X/Y \to MU_{N_1} \quad \text{и} \quad f_2 \colon \Sigma^{2N_2 - q_2} X/Y \to MU_{N_2}$$

такие, что $f_1^* x(N_1) = s^{2N_1 - q_1} u$ и $f_2^* x(N_2) = s^{2N_2 - q_2} v$ для некоторых N_1 и N_2. Возьмем отображение

$$f = f_1 \wedge f_2 \colon \Sigma^{2(N_1+N_2)-(q_1+q_2)} X \xrightarrow{f_1 \wedge f_2} MU_{N_1} \wedge MU_{N_2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f^*(x(N_1) \circ x(N_2)) &= \sum \lambda_{ij} s_{w_i}(s^{2N_1-q_1} u) s_{w_j}(s^{2N_2-q_2} v) \\ &= (-1)^{q_1 q_2} s^{2(N_1+N_2)-(q_1+q_2)} \Big(\sum \lambda_{ij} s_{w_i}(u) s_{w_j}(v) \Big). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} f^*(x(N_1)\circ x(N_2)) &= (f_1^* x(N_1))\circ (f_2^* x(N_2)) = (s^{2N_1-q_1}u)\circ(s^{2N_2-q_2}v) \\ &= (-1)^{q_1q_2}s^{2(N_1+N_2)-(q_1+q_2)}u\circ v. \end{aligned}$$

Таким образом, первая часть леммы доказана.

Пусть теперь задано умножение $u\circ v$ на кольце $\Lambda = U^*(pt)$. Заметим, что если $u\in\Lambda^{-2n}$ и $v\in\Lambda^{-2m}$, то

$$u\circ v = \Phi(u\otimes v) = \sum_{\substack{\deg w_i\leqslant 2n,\\ \deg w_j\leqslant 2m}} \lambda_{ij}s_{w_i}(u)s_{w_j}(v). \tag{7}$$

При $\deg w = 2n$ мы имеем:

$$s_w(u) = \varepsilon s_w(u) = \langle u, s_w\rangle,$$

где $\varepsilon\colon \Lambda\to Z$ – аугментация.

Используя описанное выше вложение $\Lambda\subset S^*$ и то, что $\Lambda\otimes Q = S^*\otimes Q$, мы при помощи формулы (7) индукцией по $\deg w$ можем восстановить все коэффициенты λ_{ij}, зная умножения $u\circ v$ в кольце Λ, а также действие алгебры S на нем. Лемма 1 полностью доказана.

Мы принимаем формальные ряды вида (5) за определение нового стабильного умножения в теории $U^*(X)$. Свойства этих умножений мы и изучаем далее.

В рамках общей теории алгебр Хопфа ситуация такова.

Задана алгебра Хопфа S и модуль Милнора Λ над ней (т.е. S действует на алгебре Λ и $s(uv) = \sum s_i'(u)s_i''(v)$, где $\Delta(s) = \sum s_i'\otimes s_i''$). Новое умножение в алгебре Λ задается формулой (6). Задачей является классификация ассоциативных умножений такого вида.

В особо интересном случае, подсказанном теорией кобордизмов, модуль Милнора S^* над S является алгеброй Хопфа, двойственной к S в базисе s_w, где $\Lambda\subset S^*$. При этом действие алгебры S на S^* определяется как $s(u) = R_s^*(u)$, где R_s – это оператор правого умножения [7], [8]:

$$R_s(s') = s's,\quad R_s\colon S\to S,\quad R_s^*\colon S^*\to S^*,\quad (R_s^*(u), s') = (u, s's). \tag{8}$$

Тем самым, задача классификации умножений в теории кобордизмов $U^*(X)$ сводится к теории одной алгебры S, действующей как R^* в двойственной алгебре Хопфа S^* с выделенной "топологически целочисленной" частью $\Lambda\subset S^*$.

Как описать кольцо $\Lambda\subset S^*$ чисто алгебраически? Для этого мы воспользуемся геометрическими кобордизмами $x\in U^2(X)$, определенными выше. Рассмотрим модуль Милнора, представляющий собой кольцо $S^*[[x_1,x_2]]$ формальных рядов от (x_1,x_2) с коэффициентами в кольце S^*. При этом мы определяем действия алгебры Хопфа S на этом модуле алгебраически, требуя, чтобы x_1, x_2 были геометрическими элементами, т.е.:

$$\begin{gathered} s_{(k)}(x_j) = x_j^{k+1},\qquad s_w(x_j) = 0,\quad w=(k_1,\dots,k_l),\quad l>1,\\ s(\lambda) = R_s^*(\lambda),\qquad (R_s^*(\lambda), s') = (\lambda, s's),\\ s(uv) = \sum s_i'(u)s_i''(v),\qquad \Delta = \sum s_i'\otimes s_i''. \end{gathered}$$

Тем самым, действие колец S и S^* определено.

Лемма 2. *Существует единственный ряд вида*

$$x = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + \sum_{i,j\geqslant 1} \alpha_{ij} x_1^i x_2^j, \qquad \alpha_{ij} \in S^*, \tag{9}$$

такой, что для геометрических элементов x_1 и x_2 элемент $x = f(x_1, x_2)$ является также геометрическим, т.е. действие алгебры S на элемент x определяется формулой (4).

Доказательство. Введем оператор $S_t = \sum_{w\geqslant 0} s_w t^w$, $w = (k_1, \dots, k_l)$, $t^w = t_1^{k_1}\cdots t_l^{k_l}$, где t_i, $i = 1, 2, \dots,$ – алгебраически независимые переменные. Легко видеть, что

$$\Delta S_t = \sum_{w\geqslant 0} (\Delta s_w) t^w = S_t \otimes S_t \quad \text{или} \quad S_t(uv) = S_t(u) S_t(v).$$

Подсчитаем значение $S_t(x)$ для любого геометрического элемента. Из определения геометрического элемента получаем, что $S_t(x)$ представляет собой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} t_k$, где $t_0 = 1$, который далее для краткости мы будем обозначать как $\phi_t(x)$. Применим оператор S_t к обеим частям (9). Мы получим

$$S_t(x) = S_t(x_1) + S_t(x_2) + \sum_{i,j\geqslant 1} S_t(\alpha_{ij}) S_t(x_1)^i S_t(x_2)^j, \tag{10}$$

где x, x_1, x_2 – геометрические элементы, т.е. $S_t(x) = \phi_t(x)$, $S_t(x_1) = \phi_t(x_1)$, $S_t(x_2) = \phi_t(x_2)$. Применим к формуле (10) аугментацию ε,

$$\varepsilon\colon S^* \to \mathbb{Z},$$

где $\varepsilon(s_n^*) = 0$ для $n \neq 0$, $S^* = \sum_{n\leqslant 0} S_n^*$ и $\varepsilon(x_1) = x_1$, $\varepsilon(x_2) = x_2$.

Мы имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon S_t(x) &= \sum \varepsilon(x)^{k+1} t_k, \qquad \varepsilon(x) = x_1 + x_2, \\ \varepsilon S_t(x_1) &= \sum \varepsilon(x_1)^{k+1} t_k = \sum x_1^{k+1} t_k, \\ \varepsilon S_t(x_2) &= \sum \varepsilon(x_2)^{k+1} t_k = \sum x_2^{k+1} t_k. \end{aligned}$$

По определению, верна формула:

$$\varepsilon S_t(\alpha_{ij}) = \sum_w \varepsilon s_w(\alpha_{ij}) t^w = \sum_w (s_w, \alpha_{ij}) t^w.$$

Отсюда имеем

$$\varepsilon S_t(x) = \phi_t(x_1 + x_2) = \phi_t(x_1) + \phi_t(x_2) + \sum_{i,j}\sum_w (s_w, \alpha_{ij}) t^w \phi_t(x_1)^i \phi_t(x_2)^j.$$

Обозначим $\phi_t(x_j)$ через y_j. Мы получаем $x_j = \phi_t^{-1}(y_j)$ и

$$\varepsilon S_t(x) = \phi_t(\phi_t^{-1}(y_1) + \phi_t^{-1}(y_2)) = \sum_{i,j}\sum_w (s_w, \alpha_{ij}) t^w y_1^i y_2^j.$$

Сравнивая коэффициенты при $y_1^i y_2^j$ в левой и правой частях, мы видим, что все значения (s_w, α_{ij}) вычислены в левой части и полностью известны. Тем самым, все α_{ij} однозначно определены как элементы кольца S^*, т.е. как линейные формы на S. Единственность доказана.

Существование ряда (9) следует из теории комплексных кобордизмов [5]. Чисто алгебраическое доказательство этого факта является следствием приводимой ниже леммы 3.

Лемма доказана.

Непосредственно из леммы 2 получаем

Следствие 1. *Ряд* $x = f(x_1, x_2)$ *(см. (9)) задает формальную группу на множестве геометрических элементов.*

Определение 1. Подкольцо $\Lambda \subset S^*$, порожденное над $\mathbb{Z}$ коэффициентами $\alpha_{ij} \in S^*$ ряда (9), называется *кольцом комплексных кобордизмов*. (Из топологии известно, что оно изоморфно кольцу полиномов, см. выше.)

Замечание. Формальная группа в теории комплексных кобордизмов была введена в [5] геометрически. Она совпадает с формальной группой, задаваемой рядом (9), ввиду его единственности. Мы обращаем внимание на то, что в данной работе формальная группа определена чисто алгебраически, как и кольцо Λ, исходя только из алгебры S.

Над кольцом $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ формальную группу $f(x_1, x_2)$ можно представить в виде:

$$f(x_1, x_2) = g^{-1}(g(x_1) + g(x_2)),$$

где $g^{-1}(g(x)) = x$ и $g(x) = x + \sum b_i x^{i+1}$, $b_i \in \Lambda \otimes \mathbb{Q}$. Ряд $g(x) = g_f(x)$ называется *логарифмом формальной группы* $f(x_1, x_2)$. Использованный выше подход позволяет ввести этот ряд также только в терминах алгебры S.

Лемма 3. *Существует единственный ряд вида*

$$g(x) = x + \sum_{i=1}^{\infty} b_i x^{i+1}, \qquad b_i \in S^*,$$

такой, что для любого геометрического элемента x мы имеем $s_w g(x) = 0$ для всех w, $\deg w > 0$. Этот ряд задает логарифм формальной группы и определяется из условия

$$x = g(x) + \sum_{k=1}^{\infty} s_k^* g(x)^{k+1},$$

т.е. $g^{-1}(t) = t + \sum_{k=1}^{\infty} s_k^* t^{k+1}$, где s_k^* – мультипликативные образующие кольца S^*, двойственные $s_{(k)} \in S$ относительно $\mathbb{Z}$-базиса $\{s_w\}$.

Доказательство. Пусть x – геометрический элемент и $g(x) = x + \sum b_i x^{i+1}$, $b_i \in S^*$, – такой ряд, что $s_w g(x) = 0$ для всех w, где $w \neq \varnothing$. Тогда $S_t g(x) = g(x)$, где $S_t = \sum s_w t^w$. Имеем: $x = g^{-1}(g(x))$. И следовательно, $\phi_t(x) = S_t x = S_t[g^{-1}](S_t g(x)) = S_t[g^{-1}](g(x))$, где если $g^{-1}(t) = t + \sum a_i t^{i+1}$, $a_i \in S^*$, то $S_t[g^{-1}] = t + \sum S_t(a_i) t^{i+1}$. Пусть теперь x_1 и x_2 – геометрические элементы. Образуем ряд

$$F(x_1, x_2) = g^{-1}(g(x_1) + g(x_2)) = x_1 + x_2 + \sum \alpha'_{ij} x_1^i x_2^j.$$

Имеем:

$$g(x_1)+g(x_2)=g(F(x_1,x_2)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_tF(x_1,x_2) &= S_t[g^{-1}](S_tg(x_1)+S_tg(x_2)) \\ &= S_t[g^{-1}](g(x_1)+g(x_2)) = S_t[g^{-1}](g(F(x_1,x_2))). \end{aligned}$$

Используя теперь, что $S_t[g^{-1}](g(x))=\phi_t(x)$, получаем

$$S_tF(x_1,x_2)=\phi_t(F(x_1,x_2)).$$

Следовательно, ряд $F(x_1,x_2)$ является геометрическим элементом и поэтому, согласно лемме 2, совпадает с рядом (9). Таким образом, если ряд $g(x)$, удовлетворяющий условиям леммы, существует, то он единственен и задает логарифм формальной группы (9).

Дадим чисто алгебраическое доказательство существования такого ряда. Рассмотрим модуль Милнора, определяемый как кольцо $S^*[[t]]$, со следующим действием алгебры S:

$$s_0t=t,\quad s_wt=0,\quad \deg w>0 \quad \text{и} \quad s_w(\lambda)=R_s^*(\lambda),\quad \lambda\in S^*.$$

Покажем, что ряд

$$x=\gamma(t)=t+\sum s_{(n)}^*t^{n+1}\in S^*[[t]]$$

является геометрическим элементом. Для этого достаточно доказать, что

$$s_w(s_{(n)}^*)=\begin{cases} 0, & \text{если } w\neq(k), \\ \gamma_{n,k}, & \text{если } w=(k), \end{cases}$$

где $\gamma_{n,k}$ – коэффициент при t^{n+1} у ряда $\gamma(t)^{k+1}$. Требуемый результат можно теперь получить непосредственно, если воспользоваться формулой

$$\langle s_{w_2}(s_n^*),s_{w_1}\rangle=\langle s_n^*,s_{w_1}s_{w_2}\rangle$$

и тем фактом, что представление алгебры S на произведении геометрических элементов является асимптотически точным.

Возьмем теперь $g(x)\in S^*[[t]]$ такой, что $g(x)=g(\gamma(t))=t$. Имеем: x – геометрический элемент, и по построению $s_w(t)=0$, когда $\deg w>0$. Следовательно, ряд $g(x)$ удовлетворяет условиям леммы 3. Лемма доказана.

Результат леммы 3 методами теории комплексных кобордизмов впервые был получен в [10].

Определение 2. Представление алгебры Хопфа S в модуле Милнора P над ней мы назовем *одномерным*, если P есть алгебра полиномов (или формальных рядов) от одной образующей $u\in P$ над некоторым кольцом коэффициентов. Допускается нетривиальное действие алгебры S на этом кольце коэффициентов, которое в наших примерах есть $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\Lambda$ или некоторый другой подмодуль Милнора в $S^*\otimes\mathbb{Q}$.

Высотой представления мы назовем такое число k, что $u^{k+1}=0$.

Например, P может быть алгеброй полиномов от одной образующей $u\in P$ с коэффициентами в кольце $\Lambda\subset S^*$, где S действует, как указано выше.

Примеры. Для высоты $k=1$ мы полагаем $P=U^*(S^{2q})$ для любого q. Уже для $k=2$ можно построить градуированно корректные одномерные представления над $\mathbb{Z}$ лишь для случаев $\dim u = 2,4,8$. Для $k\geqslant 3$ нам известны из топологии лишь случаи $\dim u = 2$ или 4, где $P=U^*(\mathbb{C}P^k)$ или $P=U^*(HP^k)$ соответственно. Случай $k=\infty$ особенно интересен. Над полем рациональных чисел мы имеем одномерные представления алгебры S на $P=U^*(\Omega S^{2q+1})\otimes\mathbb{Q}=\Omega_U\otimes\mathbb{Q}[[u]]$, где $\dim u_q = 2q$ для всех q.

Рассмотрим более детально случай $q=1$. Отображение $\phi\colon \Omega S^3\to\mathbb{C}P^\infty$, соответствующее образующему двумерной группы когомологий $H^2(\Omega S^3,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$, задает геометрический элемент $u_1=\phi^*(u)\in U^2(\Omega S^3)$, где $u\in U^2(\mathbb{C}P^\infty)$ – канонический геометрический элемент. Имеем $U^*(\Omega S^3)\otimes\mathbb{Q}=\Omega_U\otimes\mathbb{Q}[[u_1]]$. Из гомотопической топологии хорошо известно отображение $\psi\colon \Sigma\Omega S^3\to S^3$, задающее элемент $\beta\in U^2(\Omega S^3)$ такой, что $s\beta=\psi^*\alpha$, где α – образующий группы $U^3(S^3)=\mathbb{Z}$, и s – изоморфизм надстройки. Все операции s_w стабильны, поэтому из того, что $s_w\alpha=0$, $\deg w>0$, вытекает, что $s_w\beta=0$, $\deg w>0$. В кольце $U^*(\Omega S^3)\otimes\mathbb{Q}$ элемент β описывается рядом от геометрического элемента u_1, т.е. $\beta=g(u_1)$, причем $g(u_1)=u_1+\cdots$ Таким образом, в качестве следствия леммы 3 мы получаем, что β задается рядом $g(u_1)$, представляющим собой логарифм формальной группы геометрических элементов, и $g^{-1}(\beta)=\beta+\sum_{k\geqslant 1}s_k^*\beta^{k+1}=u_1\in U^2(\Omega S^3)$. Обратим внимание, что $s_k^*\in S^*$ не принадлежат кольцу $\Lambda\subset S^*$ и только $(k+1)!\,s_k^*\in\Lambda$ (см. [10]).

При $q>1$ описание одномерных представлений алгебры S на $P=U^*(\Omega S^{2q+1})\otimes\mathbb{Q}$ получается, если использовать канонические отображения

$$\phi_q\colon \Omega S^{2q+1}\to\Omega SU(2q+1)\to BU,$$

соответствующие образующему гомотопической группы $\pi_{2q+1}(SU(2q+1))=\mathbb{Z}$, где $SU(2q+1)$ – специальная унитарная группа, и BU – бесконечномерное многообразие Грассмана. При построении отображений ϕ_q используется тот факт, что согласно периодичности Ботта $BU\approx\Omega SU(\infty)$.

Важный пример одномерного $\mathbb{Z}$-представления алгебры Хопфа S (градуированного) порождается геометрическими элементами $u=x$ (см. выше) размерности $\dim u=2$. Пример одномерного Λ-представления алгебры Хопфа S (градуированного) порождается элементами вида $u=x\bar{x}$, где $\bar{x}$ – обратный элемент в формальной группе, $\dim u=4$. Здесь $s_w(u)$ принадлежит кольцу $\Lambda[[u]]$. На подобные элементы натягивается двузначная формальная группа, впервые замеченная в [11]. Их алгебраическая теория была построена в [12]. Для случая $\dim u=8$, $k=2$ мы можем взять Λ-представление на $P=U^*(CaP^2)$, где CaP^2 – проективная плоскость Кэли. Для $k\geqslant 3$, вероятно, одномерных представлений высоты k с $\dim u>4$ на кольцах комплексных кобордизмов пространств уже нет. Было бы полезно это доказать.

Задача. Дать классификацию одномерных $\mathbb{Z}$-представлений и Λ-представлений алгебры S, градуированно корректных, относительно замен

$$u=\Psi(v)=v+\sum_{i\geqslant 1}\lambda_i v^{i+1},$$

где $\lambda_i\in\mathbb{Z}$ (или $\mathbb{Q}$), либо $\lambda_i\in\Lambda$ (или $\lambda_i\in\Lambda\otimes\mathbb{Q}=S^*\otimes\mathbb{Q}$).

Примеры таких представлений над некоторыми подкольцами в $\Lambda\otimes\mathbb{Q}$ извлекаются из [13]. Они порождаются элементами $u_n=x[x]_{\varepsilon_n}\cdots[x]_{\varepsilon_n^{n-1}}$, $\deg u_n=2n$, где ε_n

– первообразный корень n-й степени из единицы и $[x]_{\varepsilon_n} = g^{-1}(\varepsilon_n g(x))$ – геометрический элемент, получаемый возведением в степень ε_n в формальной группе $f(x_1, x_2)$ геометрического элемента x. Как показано в [13], $u_n \in \Lambda_{\{n\}}[[x]]$, где $\Lambda_{\{n\}} = \Lambda\otimes\mathbb{Z}_{\{n\}}$ и $\mathbb{Z}_{\{n\}} \subset \mathbb{Q}$ – кольцо рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты со всеми простыми p, для которых уравнение $x^n = 1$ имеет в точности n различных корней в кольце целых p-адических чисел. Например, при $n = 2$ мы имеем $\mathbb{Z}_{\{2\}} = \mathbb{Z}$ и в этом случае мы получаем Λ-представление для $u = x\bar{x}$, $\deg u = 4$ (см. выше), связанное с двузначной формальной группой. Одномерные градуированно корректные $\Lambda_{\{n\}}$-представления алгебры S на $P = \Lambda_{\{n\}}[[u_n]]$, где $\deg u_n = 2n$, связаны с n-значными формальными группами, впервые замеченными также в работе [11]. Первые результаты по алгебраической теории были получены в [14]. Современное состояние теории многозначных групп см. в [15].

Полезный пример одномерного $\mathbb{Z}$-представления алгебры Хопфа S, где $\dim u = 2$, не эквивалентного действию на геометрическом элементе, извлекается из работы [7]:

$$s_{(1)}(u) = u^2, \qquad s_{(n)}(u) = 0, \quad n \geqslant 2 \tag{11}$$

(напомним, что на геометрическом элементе представление является другим, см. (4), – таким, что $s_{(n)}(u) = u^{n+1}$). Непосредственно из (11) следует что это представление алгебры S на $P = \mathbb{Z}[u]$ определяется дифференциальными операторами

$$s_{(1)} \to u^2\frac{d}{du}, \qquad s_{(n)} \to 0, \quad n \geqslant 2.$$

Образ алгебры Хопфа S над $\mathbb{Z}$ при этом порожден операторами $\frac{1}{n!}(u^2 d/du)^n$.

Выделим особо такие представления, где P есть алгебра полиномов от образующей отрицательной размерности, $P = \mathbb{Z}[u]$ ($\mathbb{Q}[u]$) или $P = \Lambda[u]$ ($\Lambda\otimes\mathbb{Q}[u]$), $\dim u = -2q < 0$.

Пример. Пусть задан базисный элемент $u \in \Lambda = \Omega^U$ размерности (-2) или (-4). Для $u \in \Lambda^{-2}$ мы берем $u = [\mathbb{C}P^1]$. Для $u \in \Lambda^{-4}$ мы берем такое u, что $s_{(1)}(u) = 0$. Здесь $u = 3[\mathbb{C}P^1]^2 - 4[\mathbb{C}P^2]$. Действие алгебры S на элемент u сводится к числам $s_w(u) \in \mathbb{Z}$, $\deg w = 2$. Возникает одномерное $\mathbb{Z}$-представление алгебры S.

2. Операторы деления и умножения

Перейдем теперь к построению алгебраического аппарата, позволяющего получать примеры стабильных ассоциативных умножений в комплексных кобордизмах. Все вычисления мы будем проводить в категории модулей над некоторым коммутативным ассоциативным кольцом K (“числа”) с единицей $1 \in K$, причем сами модули будут также коммутативными ассоциативными кольцами R с единицей 1 и $K \subset R$. Мы предполагаем, что K и R не имеют делителей нуля. Все операторы ниже будут K-линейны.

Определение 3. Линейный оператор $\partial\colon R \to R$ называется *разностной производной*, если он не является тождественно нулевым и удовлетворяет тождеству

$$\partial(xy) = (\partial x)y + x(\partial y) - \alpha(\partial x)(\partial y), \tag{12}$$

где $\alpha \in R$ – некоторый фиксированный элемент, необратимый в R.

Непосредственно из (12) вытекает, что при наших предположениях $\partial(1) = 0$ для любого оператора разностной производной.

Оператор π называется *мультипликативным*, если $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$.

Лемма 4. *Линейный оператор ∂ является оператором разностной производной, если и только если оператор $\pi = 1 - \alpha\partial$ мультипликативен.*

Доказательство. Пусть ∂ – оператор разностной производной. Тогда по определению мы имеем

$$\begin{aligned}\pi(xy) &= xy - \alpha\partial(xy) = xy - \alpha(\partial x)y - \alpha x(\partial y) + \alpha^2(\partial x)(\partial y)\\ &= (x-\alpha\partial x)(y - \alpha\partial y) = \pi(x)\pi(y).\end{aligned}$$

Обратное утверждение также проверяется непосредственно. Тем самым, лемма 4 доказана.

Из леммы 4 вытекает мотивировка термина *оператор разностной производной.*

Лемма 5. *Если ∂ – оператор разностной производной такой, что $\partial^2 = \gamma\partial$, где $\gamma \in \mathbb{R}$, то $(1-\alpha\gamma)\partial(\alpha) = 2 - \alpha\gamma$. В частности, если $\partial^2 = 0$, то $\partial(\alpha) = 2$.*

Доказательство. По определению имеем:

$$\begin{aligned}\partial^2(xy) &= \partial\big((\partial x)y + x(\partial y) - \alpha(\partial x)(\partial y)\big)\\ &= (\partial^2 x)y + (\partial x)(\partial y) - \alpha(\partial^2 x)(\partial y) + (\partial x)(\partial y) + x(\partial^2 y) - \alpha(\partial x)(\partial^2 y)\\ &\quad - (\partial\alpha)(\partial x)(\partial y) - \alpha\partial\big((\partial x)(\partial y)\big) + \alpha(\partial\alpha)\partial\big((\partial x)(\partial y)\big).\end{aligned}$$

Из условия $\partial^2 = \gamma\partial$, получаем

$$(1-\alpha\gamma)[(1-\alpha\gamma)\partial(\alpha) - (2-\alpha\gamma)]\partial x\partial y = 0.$$

Так как ∂ не есть тождественно нулевой оператор, делителей нуля нет в кольце R и α необратимый элемент, то это тождество дает доказательство леммы.

Лемма 6. *Оператор разностной производной ∂ удовлетворяет условию $\partial^2 = \gamma\partial$, если и только если $\pi^2 = 1$ и $\pi(\alpha) = -\alpha/(1-\alpha\gamma)$, где $\pi = 1 - \alpha\partial$.*

Доказательство. Согласно лемме 4 оператор π – мультипликативен, поэтому:

$$\begin{aligned}\pi^2 x &= \pi(x - \alpha\partial x) = \pi(x) - \pi(\alpha)\pi(\partial x)\\ &= x - \alpha\partial x - \pi(\alpha)\partial x + \alpha\pi(\alpha)\partial^2 x = x - (\alpha + \pi(\alpha))\partial x + \alpha\pi(\alpha)\partial^2 x.\end{aligned} \tag{13}$$

Пусть $\partial^2 = \gamma\partial$. Тогда согласно лемме 5 мы имеем: $\partial(\alpha) = (2-\alpha\gamma)/(1-\alpha\gamma)$ и, следовательно, $\pi(\alpha) = \alpha - \alpha\partial\alpha = -\alpha/(1-\alpha\gamma)$. Таким образом, из $\partial^2 = \gamma\partial$ вытекает, что $\pi^2 x = x$ для всех x. Наоборот, если $\pi^2 = 1$ и $\pi(\alpha) = -\alpha/(1-\alpha\gamma)$, то согласно (13) получаем, что $\partial^2 = \gamma\partial$. Лемма доказана.

В рассматриваемых здесь конструкциях содержательно кольцо R моделируется как кольцо функций на каком-то пространстве, мультипликативный оператор π моделируется как оператор типа сдвига самого пространства или какого-то другого его гомеоморфизма. Правда, такая интерпретация хороша, если оператор π обратим. Этот оператор π в важных примерах оказывается проектором $\pi^2 = \pi$. Для построения мультипликативных проекторов в [5; с. 887], вводились "операторы деления на элемент α" исходя из тождества (12) и требования $\partial(\alpha) = 1$. В [16] была получена классификация всех таких операторов (см. лемму 12 ниже) и показано, что все построенные позже известные проекторы (Адамса и Квиллена) в теории комплексных кобордизмов получаются как композиции операторов Новикова деления на элемент α, для соответствующим образом выбранного множества элементов α.

Лемма 7. *Оператор разностной производной ∂ является оператором деления на α (т.е. $\partial(\alpha) = 1$), если и только если композиция операторов $\partial\alpha$ есть единичный оператор и, таким образом,*

$$\pi(x) = (\partial\alpha - \alpha\partial)(x) = [\partial, \alpha](x).$$

Доказательство. По определению мы имеем

$$\partial\alpha(x) = \partial(\alpha x) = (\partial(\alpha))x + \alpha(\partial x) - \alpha(\partial(\alpha))(\partial x).$$

Пусть $\partial(\alpha) = 1$, тогда $\partial\alpha x = x + \alpha(\partial x) - \alpha(\partial x) = x$. Обратно, пусть мы имеем условие $\partial(\alpha) = 1$ или $\partial(\alpha x) = x$. Отсюда получаем

$$\partial(\alpha x) = (\partial(\alpha))x + \alpha(\partial x) - \alpha\partial(\alpha)(\partial x) = x.$$

Следовательно,

$$(1 - \partial(\alpha))x = \alpha(\partial x)(1 - \partial(\alpha)),$$

или

$$(1 - \partial(\alpha))[x - \alpha(\partial x)] = 0. \tag{14}$$

Полагая в (14) $x = 1$ и используя равенство $\partial(1) = 0$, получаем, что $\partial(\alpha) = 1$. Лемма доказана.

Во всех важных для нас примерах колец R они удовлетворяют следующему условию: если $\alpha \in R$ – необратимый элемент, то $\bigcap_n(\alpha^n R) = 0$, где $(\alpha R) \subset R$ – идеал, порожденный элементом α. Будем предполагать, что это условие выполняется для рассматриваемых ниже колец R.

Лемма 8. *Пусть ∂ – оператор разностной производной. Тогда мультипликативный оператор $\pi = 1 - \alpha\partial$ имеет нетривиальное ядро, если и только если ∂ является оператором деления.*

Доказательство. Пусть ∂ – оператор деления, т.е. $\partial(\alpha) = 1$. Тогда $\pi(\alpha) = \alpha - \alpha\partial(\alpha) = 0$. Пусть теперь $\partial(\alpha) \neq 1$ и существует элемент $x \neq 0$ такой, что $\pi(x) = 0$. Для такого x имеем:

$$x = \alpha\partial x.$$

Применяя оператор ∂, получаем

$$\partial x = \partial(\alpha)\partial x + \alpha\partial^2 x - \alpha\partial(\alpha)\partial^2 x.$$

Следовательно,

$$(1 - \partial(\alpha))\partial x = \alpha(1 - \partial(\alpha))\partial^2 x.$$

Так как $\partial(\alpha) \neq 1$, то

$$\partial x = \alpha\partial^2 x.$$

По индукции получаем, что для любого целого $k \geqslant 0$ имеет место соотношение

$$\partial^k x = \alpha\partial^{k+1} x,$$

из которого вытекает, что

$$x = \alpha^k \partial^k x$$

для всех $k \geqslant 0$, т.е. $x \in \bigcap_k(\alpha^k R)$. Но в наших кольцах это возможно, только если $x = 0$. Лемма доказана.

Следствие 2. *Пусть ∂ – оператор разностной производной. Мультипликативный оператор $\pi = 1 - \alpha\partial$ является проектором, $\pi^2 = \pi$, если и только если ∂ – оператор деления на элемент α.*

Доказательство. Пусть ∂ – оператор деления на элемент α, тогда $\pi(\alpha) = 0$ и $\pi^2 x = \pi(x - \alpha\partial x) = \pi x$. Обратно, пусть $\pi^2 = \pi$. Тогда $\pi(\pi x - x) = 0$ для любого x, и согласно лемме 8 мы получаем, что $\pi x = x$. Но это невозможно, так как $\alpha \neq 0$. Следствие доказано.

Лемма 9. *При фиксированном $\alpha \in R$ множество мультипликативных операторов $\Pi_\alpha(R)$, состоящее из таких $\pi \in \Pi_\alpha(R)$, что $\pi = 1 - \alpha\partial$, образует подполугруппу в полугруппе $\Pi(R)$ всех мультипликативных операторов $R \to R$ относительно операции суперпозиции $(\pi_1 \circ \pi_2)(u) = \pi_1(\pi_2(u))$. Для соответствующих операторов разностной производной эта операция имеет вид*

$$\partial_1 \circ \partial_2 = \partial_1 + \partial_2 - \partial_1(\alpha\partial_2), \qquad 1 - \alpha\partial_i = \pi_i, \quad i = 1, 2. \tag{15}$$

Доказательство. По определению имеем:

$$(\pi_1 \circ \pi_2)(u) = u - \alpha\partial_1 \circ \partial_2(u).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\alpha\partial_1 \circ \partial_2(u) &= u - \pi_1 \circ \pi_2(u) = u - \pi_1(\pi_2(u)) = u - \pi_1(u - \alpha\partial_2(u)) \\ &= u - (u - \alpha\partial_2(u)) + \alpha\partial_1[u - \alpha\partial_2(u)] = \alpha[\partial_1(u) + \partial_2(u) - \partial_1(\alpha\partial_2)(u)].\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\partial_1 \circ \partial_2 = \partial_1 + \partial_2 - \partial_1(\alpha\partial_2).$$

Лемма доказана.

Приведем некоторые известные примеры операторов разностной производной.

1) Пусть R – кольцо рядов от переменной x, $R = K[[x]]$. Фиксируем $\alpha(x)$ и $\psi(x)$ из R, где $\alpha(0) = 0$.

Положим для $p \in R$

$$\partial p(x) = \frac{p(x) - p(x - \alpha(x)\psi(x))}{\alpha(x)}.$$

Этот оператор всегда обладает свойством (12), т.е. это – оператор разностной производной. Очевидно, мы получаем

$$\pi p(x) = p(x) - \alpha\,\frac{p(x) - p(x - \alpha(x)\psi(x))}{\alpha} = p(x - \alpha(x)\psi(x)).$$

Это всегда обычный сдвиг аргумента.

2) Пусть $R = K[[x, y]]$ и $\alpha = x - y$. Мы полагаем

$$\partial p(x, y) = \frac{p(x, y) - p(y, x)}{x - y}. \tag{16}$$

Здесь $\pi(p(x, y)) = p(y, x)$, т.е. $\pi^2 = 1$ и $\partial^2 = 0$.

Для $R = K[[x_1, \dots, x_n]]$ определяются операторы ∂_{ij}, где

$$\partial_{ij} p(x_1, \dots, x_n) = \frac{p(\dots x_i \dots x_j \dots) - p(\dots x_j \dots x_i \dots)}{x_i - x_j} .$$

Эти операторы нашли важное приложение в теории когомологий многообразий флагов [17]. Они часто используются и называются "divided difference operators". Их алгебра очень красива.

Пусть $f(x, y) \in K[[x, y]]$ – ряд, задающий некоторую формальную группу над K. Возьмем $\alpha = f(x, \bar{y})$, где $\bar{y}$ – обратный элемент в формальной группе $f(x, y)$. Формула

$$\partial p(x, y) = \frac{p(x, y) - p(y, x)}{f(x, \bar{y})} \tag{17}$$

задает оператор разностной производной в $R = K[[x, y]]$. Здесь $\pi(p(x, y)) = p(y, x)$, $\pi^2 = 1$ и $\partial^2 = \gamma\partial$, где $\gamma \in K[[x, y]]$. Так, при $f(x, y) = x + y - axy$, $a \in K$, мы имеем $\partial^2 = a\partial$. Операторы (17), где $f(x, y)$ – формальная группа геометрических элементов, нашли приложения в теории комплексных кобордизмов [18], [19].

Примеры 1) и 2) дают частные случаи следующей конструкции.

Пусть $R = K[[x_1, \dots, x_n]]$. Фиксируем $\alpha(x) \in R$, где $\alpha(0) = 0$, и вектор-функцию

$$\psi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)),$$

где $\psi_k(x) \in R$, $k = 1, \dots, n$. Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Положим для $p \in R$:

$$\partial p(x) = \frac{1}{\alpha(x)}\big(p(x) - p(x - \alpha(x)\psi(x))\big).$$

Получаем:

$$\pi p(x) = p(x - \alpha(x)\psi(x)).$$

Наибольшие приложения нашли случаи, когда $\alpha(x) = \langle x, \xi\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\xi^i$ и

(i) $\psi(x) = \frac{\xi}{\langle \xi, \xi\rangle}$, здесь $\pi_\xi p(x) = p\big(x - \langle x, \xi\rangle \frac{\xi}{\langle \xi, \xi\rangle}\big)$ – проектор, $\pi_\xi^2 = \pi_\xi$ и $\partial = \partial_\xi$ – оператор деления на $\langle x, \xi\rangle$,

(ii) $\psi(x) = 2\frac{\xi}{\langle \xi, \xi\rangle}$, здесь $\pi_\xi p(x) = p\big(x - 2\langle x, \xi\rangle \frac{\xi}{\langle \xi, \xi\rangle}\big)$ удовлетворяет условию $\pi_\xi^2 = 1$ и $\partial_\xi^2 = 0$.

Это операторы, определяемые отражениями относительно подпространств $V = \{x \mid \langle x, \xi\rangle = 0\}$. Они используются при определении известных операторов Данкла [20].

Выбирая соответствующие конфигурации векторов $\xi_1, \dots, \xi_k$, получают интересные алгебры операторов ∂_{ξ_l}, $l = 1, \dots, k$.

3) Пусть $\phi\colon R \to R$ – кольцевой гомоморфизм. Согласно [21] ϕ-дифференцированием алгебры R называется такой оператор $\delta\colon R \to R$, что

$$\delta(ab) = \phi(a)\delta(b) + \delta(a)b. \tag{18}$$

Определение 4. Расширением Оре кольца R называется алгебра, аддитивно изоморфная $R[t]$, такая, что $R \subset R[t]$ и

$$ta = \phi(a)t + \delta(a). \tag{19}$$

Имеет место

Лемма 10. *Оператор разностной производной ∂, удовлетворяющий тождеству* (12):

$$\partial(ab) = (\partial a)b + a(\partial b) - \alpha(\partial a)(\partial b),$$

$\alpha \in R$, *является ϕ-дифференцированием Оре, где $\phi = \pi = 1 - \alpha\partial\colon R \to R$.*

Доказательство леммы получается прямой элементарной проверкой.

Перейдем теперь к построению новых K-билинейных ассоциативных умножений в кольце R.

Теорема 1. *Операция*

$$\mu_1(x, y) = \pi_1(x)\pi_2(y) = xy - \alpha_1\partial_1(x)y - \alpha_2\partial_2(y)x + \alpha_1\alpha_2\partial_1(x)\partial_2(y), \tag{20}$$

где ∂_1, ∂_2 – операторы разностной производной, соответствующие элементам $\alpha_1, \alpha_2 \in R$, задает ассоциативное умножение, если и только если операторы ∂_1 и ∂_2 являются операторами деления, и соответствующие мультипликативные операторы π_1 и π_2 коммутируют, т.е. $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$. В частности, каждый оператор деления ∂ задает ассоциативное умножение $\mu(x, y) = \pi(x)\pi(y)$, где $\pi = 1 - \alpha\partial$. Умножение $\mu_1(x, y)$ коммутативно, если и только если $\pi_1 = \pi_2$.

Доказательство. Положим

$$x \circ y = \mu_1(x, y) = \pi_1(x)\pi_2(y).$$

Тогда

$$(x \circ y) \circ z = \pi_1(x \circ y)\pi_2(z) = \pi_1^2(x)\pi_1(\pi_2(y))\pi_2(z). \tag{21}$$

Пусть операторы разностной производной ∂_1 и ∂_2 являются операторами деления, т.е. $\partial_1(\alpha_1) = \partial_2(\alpha_2) = 1$ и, следовательно, $\pi_1^2 = \pi_1$, $\pi_2^2 = \pi_2$. В этом случае при дополнительном условии $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$ мы получаем, используя (21), что умножение μ_1 ассоциативно.

Наоборот, пусть μ_1 – ассоциативное умножение, тогда из условия

$$(x \circ 1) \circ 1 = x \circ (1 \circ 1)$$

получаем:

$$\pi_1^2(x)\pi_1(\pi_2(1))\pi_2(1) = \pi_1(x)\pi_2(\pi_1(1))\pi_2^2(1).$$

Следовательно, $\pi_1^2 = \pi_1$, так как $\pi(1) = 1$ для любого мультипликативного оператора π. Аналогично получаем, что $\pi_2^2 = \pi_2$.

Из условия: $(1 \circ y) \circ 1 = 1 \circ (y \circ 1)$ вытекает, что $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$.

Используя теперь следствие 2, получаем, что операторы ∂_1 и ∂_2, соответствующие операторам π_1 и π_2, являются операторами деления.

И наконец, если умножение $\mu_1(x, y)$ коммутативно, то из условия $x \circ 1 = 1 \circ x$ получаем, что это возможно, если и только если $\pi_1 = \pi_2$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Операция*

$$\mu_2(x,y) = xy + \beta\partial(x)\partial(y), \qquad \beta \in R, \tag{22}$$

где ∂ – оператор разностной производной, соответствующий элементу $\alpha \in R$ и β некоторый элемент из R, задает ассоциативное умножение, если и только если выполнено одно из следующих условий:

(i) *оператор ∂ является оператором деления и $\pi(\beta) = 0$, где $\pi = 1 - \alpha\partial$;*
(ii) *оператор ∂ не является оператором деления и $\partial^2 x\partial y = \partial x\partial^2 y$ для любых элементов $x, y \in R$.*

В частности, условие (ii) *выполняется, если $\partial^2 = \gamma\partial$.*

Обратим внимание, что условие ii) *не зависит от выбора β, т.е. β в этом случае представляет собой независимый параметр деформации, связывающий исходное умножение в кольце R с новым умножением.*

Доказательство. Положим

$$x \circ y = \mu_1(x,y) = xy + \beta\partial x\partial y.$$

Тогда

$$\begin{aligned}(x\circ y)\circ z &= (xy + \beta\partial x\partial y)z + \beta\partial(xy + \beta\partial x\partial y)\partial z\\ &= xyz + \beta\big((\partial x\partial y)z + (\partial x)y\partial z + x\partial y\partial z\big)\\ &\quad - \beta\alpha\partial x\partial y\partial z + \beta\big(\partial\beta\partial x\partial y\partial z + \beta\partial(\partial x\partial y)\partial z - \alpha\partial\beta\partial(\partial x\partial y)\partial z\big).\end{aligned}$$

Следовательно, умножение μ_2 ассоциативно, если и только если выполняется соотношение

$$(\beta - \alpha\partial\beta)\big(\partial(\partial x\partial y)\partial z - \partial x\partial(\partial y\partial z)\big) = 0 \tag{23}$$

для всех $x, y, z \in R$.

Пусть ∂ является оператором деления, т.е. $\partial(\alpha) = 1$. Возьмем $x = \alpha^2$, $y = z = \alpha$. Имеем: $\partial(\alpha^2) = 2\alpha\partial\alpha - \alpha(\partial\alpha)^2 = \alpha$ и, следовательно, $\partial^2(\alpha^2) = 1$. При выбранных значениях x, y, z, учитывая, что $\partial(1) = 0$, соотношение (23) переходит в соотношение $\pi(\beta) = \beta - \alpha\partial\beta = 0$. Утверждение (i) доказано.

Пусть теперь ∂ не является оператором деления. Тогда согласно лемме 8 имеем: $\pi(\beta) \neq 0$, если $\beta \neq 0$. Так как

$$\partial(\partial x\partial y) = \partial^2 x\partial y + \partial x\partial^2 y - \alpha\partial^2 x\partial y,$$

то простая выкладка показывает, что условие (23) эквивалентно условию:

$$(\partial^2 x\partial z - \partial z\partial^2 z)(\partial y - \alpha\partial^2 y) = 0 \tag{24}$$

для всех $x, y, z \in R$. Заметим, что $\partial y - \alpha\partial^2 y = \pi\partial y$. Так как, по предположению, π не является оператором деления, то условие $\pi\partial(y) = 0$ эквивалентно условию $\partial y = 0$ для всех $y \in R$, что невозможно. Следовательно, условие (24) эквивалентно условию: $\partial^2 x\partial z = \partial z\partial^2 z$. Утверждение (ii) и вместе с ним теорема доказаны.

Приведем еще одну чисто алгебраическую конструкцию нового ассоциативного умножения, подсказанную теорией комплексных кобордизмов (см. [22]).

Теорема 3. *Пусть* $\Pi\colon R \to R$ *и* $\delta\colon R \to R$ – *линейные операторы такие, что*

1) $\Pi^2 = \Pi$, $\delta\Pi = \delta$,
2) $\delta(\Pi x \Pi y) = \delta x(\Pi y) + (\Pi x)\delta y - \alpha(\delta x)(\delta y)$,
3) $\Pi((\Pi x)(\Pi y)) = (\Pi x)(\Pi y) + \beta(\delta x)(\delta y)$

для некоторых элементов α *и* β *из* R. *Тогда операция*

$$\mu(x,y) = \Pi((\Pi x)(\Pi y)) = (\Pi x)(\Pi y) + \beta(\delta x)(\delta y)$$

задает ассоциативное умножение в кольце R.

Доказательство. Положим $\mu(x,y) = x * y$. Тогда по определению имеем:

$$\begin{aligned}(x*y)*z &= \Pi(x*y)\Pi z + \beta\delta(x*y)\delta z = (\Pi(\Pi x \Pi y))\Pi z + \beta\delta(\Pi((\Pi x)(\Pi y)))\delta z\\ &= \Pi x \Pi y \Pi z + \beta(\delta x)(\delta y)\Pi z + \beta[\delta x(\Pi y)\delta z + (\Pi x)\delta y \delta z - \alpha(\delta x)(\delta y)(\delta z)]\\ &= \Pi x \Pi y \Pi z + \beta[\delta x \delta y \Pi z + \delta x \Pi y \delta z + \Pi x \delta y \delta z] - \beta\alpha\delta x \delta y \delta z = x*(y*z).\end{aligned}$$

Теорема доказана.

3. Примеры из теории кобордизмов

В этом разделе мы построим новые умножения в теории комплексных кобордизмов, опираясь на полученные выше результаты.

Напомним, что мультипликативные операторы в алгебре $A^U = (\Lambda S)^\wedge$ полностью определяются своим действием на геометрических элементах $x \in U^2(X)$, т.е. все они задаются произвольными рядами вида

$$\phi(x) = x + \sum_{i\geqslant 1}\phi_i x^{i+1}, \qquad \phi_i \in \Lambda. \tag{25}$$

Мультипликативный оператор ϕ, задаваемый рядом $\phi(x)$, действует на произвольном элементе $y \in U^*(X)$ по формуле:

$$\phi(y) = y + \sum_{\deg w > 0}\phi_w s_w(y),$$

где $\phi_w = \phi_1^{k_1}\cdots\phi_l^{k_l}$ для $w = (k_1,\dots,k_l)$.

Лемма 11. *Ряд* $\phi(x) = x + \sum_{i\geqslant 1}\phi_i x^{i+1}$ *задает мультипликативный проектор* $\phi \in A^U$, *т.е.* $\phi^2 = \phi$ *в* A^U, *если и только если* $\phi(\phi_i) = \phi_i + \sum\phi_w s_w(\phi_i) = 0$ *для всех* $i \geqslant 1$.

Доказательство. Имеем на геометрическом элементе $x \in U^2(X)$

$$\phi(\phi(x)) = \phi(x) + \sum\phi(\phi_i)\phi(x)^{i+1}.$$

Следовательно, $\phi(\phi(x)) = \phi(x)$, если и только если $\sum_{i\geqslant 1}\phi(\phi_i)t^{i+1} = 0$ в кольце $\Lambda[[t]]$, где $t = \phi(x)$. Это эквивалентно условию: $\phi(\phi_i) = 0$, $i \geqslant 1$. Лемма доказана.

Мультипликативный оператор $\phi \in A^U$ с $\phi(x) = x + \sum_{i\geqslant 1}\phi_i x^{i+1}$, $\phi_i \in \Lambda$, на геометрическом элементе $x \in U^2(X)$ называется *однородным*, если $\deg\phi_i = -2i$. Множество всех однородных мультипликативных операторов образует полугруппу, в которой лежат проекторы, важнейшие для теории кобордизмов.

Для целого числа m положим $\mathbb{Z}_{(m)} = \mathbb{Z}[m^{-1}]$. Из [16] извлекается следующий результат.

Лемма 12. *Пусть $\alpha \in \Lambda^{-2n}$ и $s_{(n)}\alpha = m \neq 0$, $m \in \mathbb{Z}$. Оператор $\partial \in A^U$ задает оператор деления на α в кольце комплексных кобордизмов $U^*(X) \otimes \mathbb{Z}_{(m)}$ такой, что мультипликативный оператор π, $\pi = 1 - \alpha\partial$, является однородным, если и только если его значение на геометрическом кобордизме имеет вид*:

$$\partial x = \frac{1}{m}x^{n+1} + \sum_{i \geqslant 1} a_i x^{n+i+1}, \qquad a_i \in \Lambda^{-2i} \otimes \mathbb{Z}_{(m)},$$

где (a_i) – свободный набор параметров оператора ∂.

Доказательство. Согласно предыдущим алгебраическим результатам достаточно проверить только, что $\pi(\alpha) = 0$. Имеем: $\pi(x) = x - \alpha x^n\left(\frac{1}{m}x + \sum_{i \geqslant 1} a_i x^{i+1}\right)$, где x – геометрический элемент. Таким образом, $\pi(y) = y - \alpha\frac{1}{m}s_{(n)}y +$ (члены, содержащие $s_w(y)$, $\deg w > 2n$). Следовательно, $\pi(\alpha) = \alpha - \alpha\frac{1}{m}s_{(n)}(\alpha) = 0$. Лемма доказана.

Используя лемму 12, можно описать все пары операторов деления ∂_1 и ∂_2 такие, что соответствующие мультипликативные проекторы π_1 и π_2 являются однородными и коммутирующими. Таким образом, согласно теореме 1 мы получаем множество ассоциативных умножений вида $\mu_1(x, y) = \pi_1(x)\pi_2(y)$ в комплексных кобордизмах.

Далее, для каждого оператора деления ∂ из леммы 12 мы можем взять любой элемент β из ядра оператора $\pi = 1 - \alpha\partial$ и получить согласно п. (i) теоремы 2 ассоциативное умножение вида $\mu_2(x, y) = xy + \beta\partial x\partial y$.

Следующий результат позволяет строить ассоциативные умножения вида $\mu_2(x, y)$ на основании п. (ii) теоремы 2.

Лемма 13. *Пусть $\alpha \in \Lambda^{-2n}$ и $s_{(n)}(\alpha) = 2n$. Мультипликативная однородная операция $\pi \in A^U \otimes \mathbb{Z}_{(n)}$, которая на геометрическом элементе $x \in U^2(X)$ действует по формуле*

$$\pi(x) = x - \alpha\partial x = \frac{x}{\sqrt[n]{1 + \alpha x^n}}\,, \tag{26}$$

задает оператор разностной производной ∂ такой, что $\partial^2 = 0$.

Доказательство. Согласно лемме 6 достаточно показать, что

$$\pi(\alpha) = -\alpha \quad \text{и} \quad \pi^2 = 1.$$

Имеем:

$$\pi(x) = x - \frac{1}{n}\alpha x^{n+1} + O(x^{2n+1}).$$

Таким образом, $\pi(y) = y - \frac{1}{n}\alpha s_{(n)}(y) +$ (члены, содержащие $s_w(y)$, $\deg w > 2n$). Следовательно, $\pi(\alpha) = \alpha - \frac{1}{n}\alpha \cdot 2n = -\alpha$. Так как π^2 – мультипликативный оператор, то он определяется своим значением на геометрическом элементе x. Имеем:

$$\pi^2(x) = \pi\left(\frac{x}{\sqrt[n]{1 + \alpha x^n}}\right) = \frac{\pi(x)}{\sqrt[n]{1 + \pi(\alpha)\pi(x)^n}} = \frac{x}{\sqrt[n]{1 + \alpha x^n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{1 - \alpha\dfrac{x^n}{1 + \alpha x^n}}} = x.$$

Итак, $\pi^2(x) = x$ и, следовательно, $\pi^2 = 1$. Лемма доказана.

Пример. Пусть $[\mathbb{C}P^m]$ – класс комплексных кобордизмов комплексного m-мерного проективного пространства. Имеем, $s_{(m)}[\mathbb{C}P^m] = -(m+1)$. Таким образом, взяв в качестве α класс кобордизмов $-[\mathbb{C}P^{2n-1}]$, мы получаем согласно лемме 13 оператор разностной производной ∂ на кольцах $U^*(X)\otimes\mathbb{Z}_{(n)}$ такой, что $\partial^2 = 0$, и, следовательно, новое ассоциативное умножение с свободным параметром β. В случае комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P^1$ мы получаем такое умножение на кольцах $U^*(X)$.

В заключение опишем пример ассоциативного умножения в кольцах $U^*(X)$, основанный на конструкции из теоремы 3.

Следуя Коннеру и Флойду, возьмем *аддитивный* проектор

$$\Pi\colon U^*(X) \to U^*(X),$$

который полностью задается следующим действием на классах кобордизмов замкнутых U-многообразий:

пусть $\xi \to \mathbb{C}P^1$ – каноническое комплексное одномерное расслоение над проективной прямой $\mathbb{C}P^1$. Рассмотрим замкнутое U-многообразие M^{2n} со стабильно комплексным касательным расслоением τ. По определению, $\Pi([M^{2n}])$ – это класс комплексных кобордизмов подмногообразия $i\colon \widehat{M}^{2n} \subset M^{2n}\times\mathbb{C}P^1$ с нормальным расслоением вложения $i^*((det\,\tau)\otimes\xi)$, где $det\,\tau$ – детерминантное расслоение комплексного расслоения τ.

Действие проектора $\Pi \in A^U$ на классе Тома x_n комплексного n-мерного расслоения $\eta \to X$ вычисляется по формуле:

$$\Pi(x_n) = x_n + \sum_{i\geqslant 2}\alpha_{i1}\partial_i x_n,$$

где $\alpha_{i1} \in \Lambda^{-2i}$ – коэффициент при $x^i y$ в формальной группе $f(x,y)$ геометрических элементов x, y и $\partial_i \in A^U$ – операторы, которые на классе Тома x_n действуют по формуле:

$$\partial_i x_n = x_n c_1(\overline{det\,\eta}),$$

где c_1 – первый класс Чженя в комплексных кобордизмах, и $\overline{}$ – знак комплексного сопряжения.

Взяв в качестве δ оператор $\partial_1 \in A^U$, можно проверить, что пара Π, δ удовлетворяет всем соотношениям из теоремы 3 (детали вычислений см. в [22], [23]). Следовательно, согласно этой теореме в $U^*(X)$ определено ассоциативное умножение, задаваемое формулой:

$$x * y = \Pi(\Pi x \Pi y).$$

Это умножение играет ключевую роль в описании мультипликативной структуры кольца кобордизмов SU-многообразий, или, как сейчас стали говорить, многообразий Калаби–Яо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Novikov S. P. (Ed.). Topology I. Berlin: Springer-Verlag, 1996. (Encyclopaedia of Math. Sci. V. 12.)

[2] Milnor J. W. On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue. Part I // Amer. J. Math. 1960. V. 82. P. 505–521.

[3] Новиков С. П. О некоторых задачах топологии многообразий, связанных с теорией пространств Тома // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132. № 5. С. 1031–1034.
[4] Новиков С. П. Гомотопические свойства комплексов Тома // Матем. сб. 1962. Т. 57 (99). С. 406–442.
[5] Новиков С. П. Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. С. 855–951.
[6] Landweber P. S. Cobordism operations and Hopf algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 129. № 1. P. 94–110.
[7] Бухштабер В. М., Шокуров А. В. Алгебра Ландвебера–Новикова и формальные векторные поля на прямой // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12. № 3. С. 1–11.
[8] Новиков С. П. Различные удвоения алгебр Хопфа. Алгебры операторов на квантовых группах, комплексные кобордизмы // УМН. 1992. Т. 47. № 5. С. 189–190.
[9] Buchstaber V. M. Semigroups of maps into groups, operator doubles, and complex cobordisms // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1995. V. 170. P. 9–31.
[10] Бухштабер В. М. Характер Чженя–Дольда в кобордизмах // Матем. сб. 1970. Т. 83 (125). С. 576–595.
[11] Бухштабер В. М., Новиков С. П. Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса // Матем. сб. 1971. Т. 84 (126). С. 116–153.
[12] Бухштабер В. М. Характеристические классы в кобордизмах и топологические приложения теорий однозначных и двузначных формальных групп // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Т. 10. М.: ВИНИТИ, 1978. С. 5–178.
[13] Бухштабер В. М., Холодов А. Н. Топологические конструкции, связанные с многозначными формальными группами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 1. С. 3–26.
[14] Холодов А. Н. Алгебраическая теория многозначных формальных групп // Матем. сб. 1981. Т. 114. № 2. С. 299–321.
[15] Buchstaber V. M., Rees E. G. Multivalued groups, their representations and Hopf algebras // Transform. Groups. 1997. V. 2. № 4. P. 325–349.
[16] Бухштабер В. М. Когомологические операции и формальная группа в кобордизмах. Характеристические классы в кобордизмах // В. Снэйт. Алгебраический кобордизм и K-теория. Приложение 4. М.: Мир, 1983. С. 227–248.
[17] Берштейн И. Н., Гельфанд И. М., Гельфанд С. И. Клетки Шуберта и когомологии пространства G/P // УМН. 1973. Т. 28. № 3. С. 3–26.
[18] Bressler P., Evens S. The Schubert calculus, braid relation, and generalized cohomology // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. V. 317. № 2. P. 799–811.
[19] Фельдман К. Э. Эквивариантный аналог теоремы Пуанкаре–Хопфа // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2000. Т. 267. С. 160–174.
[20] Dunkl C. F. Differential-difference operators associated to reflection groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 311. № 1. P. 167–183.
[21] Ore O. Theory of non-commutative polynomials // Ann. of Math. (2). 1933. V. 34. P. 480–508.
[22] Бухштабер В. М. Проекторы в унитарных кобордизмах, связанные с SU-теорией // УМН. 1972. Т. 27. № 6. С. 231–232.
[23] Стонг Р. Заметки по теории кобордизмов. М.: Мир, 1973.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова;
University of Maryland at College Park;
Department of Mathematics the University of Oregon
E-mail: buchstab@ftri.extech.msk.su; novikov@ipst.umd.edu,
novikov@landau.ac.ru; botvinn@darkwing.uoregon.edu; yuz@darkwing.uoregon.edu

Поступила в редакцию
01.06.2000