Алгебра и анализ
Том 12 (2000), вып. 5

АСИМПТОТИЧЕСКИ РАСЩЕПЛЯЮЩИЕСЯ РАСШИРЕНИЯ И E-ТЕОРИЯ

© В. М. Мануйлов, К. Томсен

Показано, что E-теория Конна–Хигсона может быть определена в терминах расширений C^*-алгебр аналогично тому, как определяется KK-теория Каспарова. Отличие заключается в том, что вместо расщепимых расширений следует рассматривать асимптотически расщепимые. Расширение C^*-алгебры A стабильной C^*-алгеброй B называется асимптотически расщепимым, если существует асимптотический гомоморфизм, состоящий из правых обратных к гомоморфизму факторизации. Расширение называется полуобратимым, если оно может стать асимптотически расщепимым после прибавления к нему некоторого другого расширения. Основной результат статьи — доказательство существования взаимно-однозначного соответствия между асимптотическими гомоморфизмами из SA в B и гомотопическими классами полуобратимых расширений S^2A алгеброй B.

§1. Введение

В статье [4] Конн и Хигсон описали конструкцию, позволяющую получить асимптотические гомоморфизмы из расширений C^*-алгебр. Эта конструкция лежит в основе E-теории и позволяет изучать расширения C^*-алгебр через асимптотические гомоморфизмы, что является довольно мощным средством в KK-теории, где расширения C^*-алгебр полурасщепимы, т.е. допускают вполне положительное отображение в качестве правого обратного для гомоморфизма факторизации. В этом случае известно, что конструкция Конна–Хигсона осуществляет биекцию между гомотопическими классами полурасщепимых расширений и вполне положительных асимптотических гомоморфизмов. Эта биекция особенно полезна, так как с вполне положительными асимптотическими гомоморфизмами удобнее работать, чем с общими, и так как мощные результаты

Ключевые слова: расширение, C^*-алгебра, асимптотический гомоморфизм, гомотопия.
Работа первого из авторов частично поддержана РФФИ, грант №99-01-01201.

Каспарова о гомотопической инвариантности позволяют использовать гомотопические свойства для получения более алгебраической информации о расширениях C^*-алгебр. Это естественное соответствие между полурасщепимыми расширениями C^*-алгебр и гомотопическими классами вполне положительных асимптотических гомоморфизмов было использовано в [11] для описания слабо квазидиагональных расширений.

Побудительным мотивом настоящей статьи было желание расширить удобную и красивую связь между расширениями C^*-алгебр и асимптотическими гомоморфизмами за рамки полурасщепимых расширений. Основной проблемой здесь является выяснение того, является ли конструкция Конна–Хигсона инъективной в общем случае. Другими словами, следует определить, будут ли гомотопны два расширения C^*-алгебр со стабильными идеалами, которые задают гомотопные асимптотические гомоморфизмы. В общем случае ответ нам пока не известен. В настоящей статье мы показываем, что ответ положителен в случае, когда оба расширения являются тем, что мы называем полуобратимыми, а фактор-алгебра является двойной надстройкой. Мы также показываем, что E-теория Конна–Хигсона может быть сформулирована в терминах расширений C^*-алгебр (без использования бесконечнократных надстроек, как в [7], и длинных точных последовательностей, как в [5]) по аналогии с тем, как определена KK-теория Каспарова. Отличие такого описания E-теории заключается в том лишь, что вместо расщепимых расширений (как в определении KK-теории) следует рассматривать асимптотически расщепимые.

§2. Асимптотически расщепимые расширения и $\mathrm{Ext}^{-1/2}$

Всюду в статье A и B — сепарабельные C^*-алгебры, и алгебра B стабильна, т.е. $B = B \otimes \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — C^*-алгебра компактных операторов. Через $C_0(X)$ мы обозначаем коммутативную C^*-алгебру непрерывных функций на X, обращающихся в нуль в бесконечности, а через $SA = C_0(0,1) \otimes A$ — надстройку над алгеброй A. Пусть $M(B)$ обозначает C^*-алгебру мультипликаторов [12] алгебры B, $Q(B) = M(B)/B$ — соответствующую фактор-алгебру (корону), а $q_B : M(B) \longrightarrow Q(B)$ — гомоморфизм факторизации. Мы отождествляем стандартным способом множество расширений алгебры A алгеброй B с $\mathrm{Hom}(A, Q(B))$ [3]. Два расширения $\varphi,\ \psi : A \longrightarrow Q(B)$ *унитарно эквивалентны*, если существует такой унитарный элемент $w \in M(B)$, что $\mathrm{Ad}\, q_B(w) \circ \varphi = \psi$. Как известно, множество классов унитарной эквивалентности расширений алгебры A алгеброй B образует полугруппу, которая обозначается $\mathrm{Ext}(A, B)$.

Напомним, что асимптотический гомоморфизм из A в B — это семейство $\varphi = \{\varphi_t\}_{t\in[1,\infty)} : A \longrightarrow B$ таких отображений, что $\varphi_t(a)$ непрерывно для каждого $a \in A$ и ведет себя, как гомоморфизм, асимптотически при $t \to \infty$ [4]. Именно для любых $a, b \in A$, $\lambda \in \mathbf{C}$ имеем

$$\lim_{t\to\infty} \|\varphi_t(a^*) - \varphi_t(a)^*\| = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \|\varphi_t(\lambda a + b) - \lambda\varphi_t(a) - \varphi_t(b)\| = 0,$$
$$\lim_{t\to\infty} \|\varphi_t(ab) - \varphi_t(a)\varphi_t(b)\| = 0.$$

Два асимптотических гомоморфизма φ и ψ эквивалентны, если $\lim_{t\to\infty} \|\varphi_t(a) - \psi_t(a)\| = 0$ для каждого $a \in A$, и гомотопны, если существует такой асимптотический гомоморфизм $\phi = \{\phi_t\}_{t\in[1,\infty)} : C[0,1] \otimes A \longrightarrow B$, что его ограничения на концы отрезка $[0,1]$ совпадают с φ и ψ. Полугруппу гомотопических классов асимптотических гомоморфизмов мы обозначаем $[[A, B]]$.

Определение 2.1. Расширение $\varphi : A \longrightarrow Q(B)$ называется *асимптотически расщепимым*, если существует такой асимптотический гомоморфизм $\pi = \{\pi_t\}_{t\in[1,\infty)} : A \longrightarrow M(B)$, что $q_B \circ \pi_t = \varphi$ для всех t. Расширение $\varphi : A \longrightarrow Q(B)$ называется *полуобратимым*, если найдется такое расширение ψ, что сумма $\varphi \oplus \psi : A \longrightarrow Q(B)$ асимптотически расщепима. Два полуобратимых расширения называются *стабильно эквивалентными*, если они становятся унитарно эквивалентными после прибавления к ним асимптотически расщепимых расширений.

Стабильная эквивалентность является отношением эквивалентности на подмножестве полуобратимых расширений в $\mathrm{Hom}(A, Q(B))$, и соответствующие классы эквивалентности образуют абелеву группу, которую мы обозначаем $\mathrm{Ext}^{-1/2}(A, B)$. $\mathrm{Ext}^{-1/2}$ является бифунктором, контравариантным по первому аргументу и ковариантным (по отношению к квазиунитальным $*$-гомоморфизмам) по второму. Легко видеть, что конструкция Конна–Хигсона [4] тривиальна на асимптотически расщепимых расширениях, поэтому она определяет групповой гомоморфизм

$$CH : \mathrm{Ext}^{-1/2}(A, B) \longrightarrow [[SA, B]].$$

Два полуобратимых расширения

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow E_1 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

и

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow E_2 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

называются *гомотопными*, если существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & E_1 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & C[0,1] \otimes B \arrow[r] \arrow[u, "\pi_0"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

полуобратимых расширений, где гомоморфизмы $\pi_0,\ \pi_1 : C[0,1]\otimes B \longrightarrow B$ суть эпиморфизмы „вычисления“ в концах отрезка $[0,1]$.

Основным инструментом в настоящей статье является отображение E, введенное в [11], ср. [10]. Напомним его конструкцию. Пусть $\varphi = \{\varphi_t\}_{t\in[1,\infty)} : A \longrightarrow B$ — асимптотический гомоморфизм. Выберем такую последовательность $1 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le \cdots$, что

$$\lim_{i\to\infty} t_i = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{i\to\infty} \sup_{t\in[t_i,t_{i+1}]} \|\varphi_t(a) - \varphi_{t_i}(a)\| = 0$$

для всех $a\in A$. Пусть, как обычно, $e_{ij},\ i,j\in \mathbf{Z}$, обозначают матричные единицы, которые очевидным образом действуют в стандартном гильбертовом B-модуле $l_2(\mathbf{Z})\otimes B$. Тогда формула

$$\Phi(a) = \sum_{i\ge 1} \varphi_{t_i}(a) e_{ii}$$

определяет отображение $\Phi : A \longrightarrow \mathcal{L}_B(l_2(\mathbf{Z})\otimes B)$, где $\mathcal{L}_B(l_2(\mathbf{Z})\otimes B)$ — C^*-алгебра ограниченных операторов, допускающих сопряженный, гильбертова C^*-модуля $l_2(\mathbf{Z})\otimes B$. Мы отождествляем $\mathcal{K}\otimes B$ с идеалом B-компактных операторов в $\mathcal{L}_B(l_2(\mathbf{Z})\otimes B)$ и замечаем, что Φ — $*$-гомоморфизм по модулю $\mathcal{K}\otimes B$. Более того, $\Phi(a)$ коммутирует по модулю $\mathcal{K}\otimes B$ с двухсторонним сдвигом $T = \sum_{j\in\mathbf{Z}} e_{j,j+1}$. Таким образом, мы получаем $*$-гомоморфизм

$$E(\varphi) : A \longrightarrow Q(\mathcal{K}\otimes B) = \mathcal{L}_B(l_2(\mathbf{Z})\otimes B)/\mathcal{K}\otimes B,$$

действующий по формуле

$$E(\varphi)(f\otimes a) = f(\underline{T})\underline{\Phi(a)}, \quad f\in C(\mathbf{T}),\ a\in A.$$

Здесь и далее мы обозначаем через $\underline{S}$ образ в $Q(\mathcal{K}\otimes B) = \mathcal{L}_B(l_2(\mathbf{Z})\otimes B)/\mathcal{K}\otimes B$ элемента $S\in \mathcal{L}_B(l_2(\mathbf{Z})\otimes B)$. Корректность определения отображения E и независимость от выбора дискретизации проверяются непосредственно.

Лемма 2.2. $E(\varphi) \in \mathrm{Ext}^{-1/2}(C(\mathbf{T})\otimes A, \mathcal{K}\otimes B)$.

Доказательство. Пусть $-E(\varphi) : C(\mathbf{T})\otimes A \longrightarrow Q(\mathcal{K}\otimes B)$ — расширение, которое получается, если в определении $E(\varphi)$ использовать

$$\Psi(a) = \sum_{i\le 0} \varphi_{t_{-i+1}}(a) e_{ii}$$

вместо Φ. Тогда $-E(\varphi)\oplus E(\varphi)$ унитарно эквивалентно расширению $\psi : C(\mathbf{T})\otimes A \longrightarrow Q(\mathcal{K}\otimes B)$, определенному формулой $\psi(f\otimes a) = \underline{\pi_t(f\otimes a)}$ для всех $t\in[1,\infty)$, $f\in C(\mathbf{T})$, $a\in A$, где

$$\pi = \{\pi_t\}_{t\in[1,\infty)} : C(\mathbf{T})\otimes A \longrightarrow \mathcal{L}_B(l_2(\mathbf{Z})\otimes B)$$

— асимптотический гомоморфизм, полученный линейной интерполяцией отображений $\pi_n,\ n \in \mathbf{N}$, удовлетворяющих условиям

$$\pi_n(f \otimes a) - f(T)\Big(\sum_{|i|\leq n} \varphi_{t_n}(a)e_{ii} + \sum_{i>n} \varphi_{t_i}(a)e_{ii} + \sum_{i<-n} \varphi_{t_{-i+1}}(a)e_{ii}\Big) \in \mathcal{K} \otimes B$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n(f \otimes a) - f(T)\Big(\sum_{|i|\leq n} \varphi_{t_n}(a)e_{ii} + \sum_{i>n} \varphi_{t_i}(a)e_{ii} + \sum_{i<-n} \varphi_{t_{-i+1}}(a)e_{ii}\Big) = 0$$

для всех $f \in C(\mathbf{T}),\ a \in A$. Но расширение ψ, очевидно, асимптотически расщепимо. $\bullet$

Обозначим через $\mathrm{Ext}^{-1/2}(A,B)_h$ абелеву группу гомотопических классов полуобратимых расширений алгебры A алгеброй B. Тогда $\mathrm{Ext}^{-1/2}(A,B)_h$ — фактор-группа группы $\mathrm{Ext}^{-1/2}(A,B)$. Гомотопическая инвариантность конструкции Конна–Хигсона дает отображение

$$CH : \mathrm{Ext}^{-1/2}(A,B)_h \longrightarrow [[SA,B]].$$

Согласно лемме 2.2, мы имеем также корректно определенное отображение

$$E : [[A,B]] \longrightarrow \mathrm{Ext}^{-1/2}(C(\mathbf{T}) \otimes A, B)_h$$

(ср. [11]). Так как имеется каноническое вложение $SA \subseteq C(\mathbf{T}) \otimes A$, мы можем также рассматривать E как отображение

$$E : [[A,B]] \longrightarrow \mathrm{Ext}^{-1/2}(SA,B)_h.$$

Наш основной результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2.3. а) *Отображение* $CH : \mathrm{Ext}^{-1/2}(SA,B) \longrightarrow [[S^2A,B]]$ *сюръективно.*
 б) *Отображение* $E : [[SA,B]] \longrightarrow \mathrm{Ext}^{-1/2}(S^2A,B)_h$ *является изоморфизмом.*

Пусть χ — отображение, индуцированное композицией с асимптотическим гомоморфизмом $S^3A \longrightarrow SA \otimes \mathcal{K}$, который является надстройкой над асимптотическим гомоморфизмом $S^2 \longrightarrow \mathcal{K}$, полученным применением конструкции Конна–Хигсона к расширению Тёплица, тензорно умноженной на A. Для доказательства п. а) мы используем следующее утверждение (ср. [11, 10]).

Лемма 2.4. *Диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ext}^{-1/2}(S^2A,B)_h \arrow[dr, "CH"] & \\ {[[SA,B]]} \arrow[u, "E"] \arrow[r, "\chi"] & {[[S^3A,B]],} \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

коммутативна.

Доказательство. Мы будем доказывать коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ext}^{-1/2}(C(\mathbf{T})\otimes A,B)_h \arrow[dr, "CH"] & \\ {[[A,B]]} \arrow[u, "E"] \arrow[r, "\chi"] & {[[SC(\mathbf{T})\otimes A,B]],} \end{tikzcd}$$

из которой сразу вытекает коммутативность диаграммы (2.1).

Для описания χ выберем последовательность непрерывных функций $\kappa_n : [1,\infty) \to [0,1]$, $n \in \mathbf{N}$, таких что

$$\kappa_n(1) = 1, \ \lim_{t\to\infty} \kappa_n(t) = 0, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{2.2}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[1,\infty)} \|\kappa_{n+1}(t) - \kappa_n(t)\| = 0. \tag{2.3}$$

Одним из способов выбора таких функций является следующий: положим $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ и определим κ_n формулой

$$\kappa_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [1, a_n], \\ a_n + 1 - t, & t \in [a_n, a_n + 1], \\ 0, & t \in [a_n + 1, \infty). \end{cases}$$

Конкретный выбор таких функций несуществен, если выполнены свойства (2.2) и (2.3). Положим $K(t) = \operatorname{diag}\{\kappa_1(t), \kappa_2(t), \dots\}$. Обозначим через P проектор $\sum_{i\in\mathbf{N}} e_{ii}$ в $l_2(\mathbf{Z})$. Тогда PTP — оператор одностороннего сдвига и индекса один, и асимптотический гомоморфизм χ определяется условием

$$\lim_{t\to\infty} \|\chi_t(f \otimes e^{2\pi i x}) - f(K(t))PTP\| = 0,$$

где $f \in C_0(0,1)$, а $e^{2\pi i x}$ — образующая в $C(\mathbf{T})$.

Пусть $\varphi = \{\varphi_t\}_{t\in[1,\infty)} : A \longrightarrow B$ — асимптотический гомоморфизм. Тогда асимптотический гомоморфизм $CH \circ E[\varphi]$ эквивалентен асимптотическому гомоморфизму $\psi = \{\psi_t\}_{t\in[1,\infty)} : SC(\mathbf{T}) \otimes A \longrightarrow B$, определенному формулой

$$\psi_t(f \otimes e^{2\pi ix} \otimes a) = T \sum_{i\in\mathbf{N}} f(\kappa_i(t))\varphi_{t_i}(a)e_{ii}.$$

Определим также асимптотический гомоморфизм $\psi' = \{\psi'_t\}_{t\in[1,\infty)} : SC(\mathbf{T}) \otimes A \longrightarrow B$ формулой

$$\psi'_t(f \otimes e^{2\pi ix} \otimes a) = PTP \sum_{i\in\mathbf{N}} f(\kappa_i(t))\varphi_{t_i}(a)e_{ii}.$$

Поскольку

$$\lim_{t\to\infty} \|\psi_t(f \otimes e^{2\pi ix} \otimes a) - \psi'_t(f \otimes e^{2\pi ix} \otimes a)\| = 0$$

для всех $f \in C_0(0,1)$, $a \in A$, асимптотические гомоморфизмы ψ и ψ' эквивалентны. Используя свободу в выборе функций κ_i, можно добиться того, чтобы существовала последовательность натуральных чисел $0 < m_1 < m_2 < \dots$, для которой

$$\kappa_i(t) = 0 \quad \text{для всех } t \in [t_j, t_{j+1}],\ i = 1, 2, \dots, m_j,$$

и

$$\kappa_i(t) = 1 \quad \text{для всех } t \in [t_j, t_{j+1}],\ i \geq m_{j+1}.$$

Определим новую последовательность $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots$ в $[1,\infty)$ следующим образом:

$$s_i = 0, \quad 0 \leq i < m,$$
$$s_{m_1} = s_{m_1+1} = \dots = s_{m_2-1} = t_1,$$
$$s_{m_2} = s_{m_2+1} = \dots = s_{m_3-1} = t_2$$

и так далее. Тогда $\{\varphi_{s_n}\}$ — еще одна дискретизация для φ, значит, ψ' гомотопен ψ'', где

$$\psi''_t(f \otimes e^{2\pi ix} \otimes a) = PTP \sum_{i\in\mathbf{N}} f(\kappa_i(t))\varphi_{s_i}(a)e_{ii}$$

асимптотически при $t \to \infty$. Поскольку

$$[\chi \otimes \varphi]_t(f \otimes e^{2\pi ix} \otimes a) = PTP \sum_{i\in\mathbf{N}} f(\kappa_i(t))\varphi_t(a)e_{ii}$$

асимптотически при $t \to \infty$, получаем

$$\lim_{t\to\infty} \sup_i \|\psi''_t(f \otimes e^{2\pi ix} \otimes a) - [\chi \otimes \varphi]_t(f \otimes e^{2\pi ix} \otimes a)\|$$
$$\leq \lim_{t\to\infty} \|f(\kappa_i(t))\varphi_{s_i}(a) - f(\kappa_i(t))\varphi_t(a)\| = 0$$

для всех $f \in C_0(0,1)$, $a \in A$. Поскольку элементы вида $f \otimes e^{2\pi i x} \otimes a$ порождают всю $SC(\mathbf{T}) \otimes A$ как C^*-алгебру, заключаем, что $\lim_{t\to\infty} \|\psi_t''(z) - [\chi \otimes \varphi]_t(z)\| = 0$ для всех $z \in SC(\mathbf{T}) \otimes A$. Следовательно, асимптотические гомоморфизмы $CH \circ E[\varphi]$ и $\chi \otimes \varphi$ гомотопны. •

Поскольку χ — изоморфизм, отображение $CH : \mathrm{Ext}^{-1/2}(S^2A, B) \longrightarrow [[S^3A, B]]$ сюръективно. Однако в E-теории обратным элементом к асимптотическому гомоморфизму χ является настоящий $*$-гомоморфизм $\mu : SA \longrightarrow S^3A \otimes M_2$, и естественность конструкции Конна–Хигсона дает коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^{-1/2}(SA, B) \arrow[d, "CH"'] & \mathrm{Ext}^{-1/2}(S^3A \otimes M_2, B) \arrow[l, "\mu^*"'] \arrow[d, "CH"] \\
{[[S^2A, B]]} & {[[S^4A \otimes M_2, B]],} \arrow[l, "\mu^*"]
\end{tikzcd}$$

которая и доказывает п. а) теоремы 2.3.

Для завершения доказательства теоремы 2.3 теперь достаточно показать, что отображение CH диаграммы (2.1) инъективно. Этому посвящена оставшаяся часть статьи.

§3. Доказательство п. б) теоремы 2.3

Пусть S, T — два коммутирующих оператора в C^*-алгебре. Определим проектор $P(S,T)$ в алгебре 2×2-матриц над C^*-алгеброй, порожденной элементами S и T, следующим образом. Рассмотрим функции $s, c_0, c_1 : [0,1] \to \mathbf{R}$

$$c_0(t) = |\cos(\pi t)| 1_{[0,\frac{1}{2}]}(t), \quad c_1(t) = |\cos(\pi t)| 1_{(\frac{1}{2},1]}(t), \quad s(t) = \sin(\pi t),$$

где $1_{[0,\frac{1}{2}]}$, $1_{(\frac{1}{2},1]}$ — характеристические функции соответствующих интервалов. Положим $\widetilde{g} = sc_0$, $\widetilde{h} = sc_1$ и $\widetilde{f} = s^2$. Так как функции $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$ и $\widetilde{h}$ непрерывны и 1-периодичны, они определяют непрерывные функции f, g, h на окружности $\mathbf{T}$. Положим

$$P(S,T) = \begin{pmatrix} f(S) & g(S) + h(S)T \\ h(S)T^* + g(S) & 1 - f(S) \end{pmatrix}$$

(ср. [9]). В частности, если мы применим эту формулу к каноническим унитарным элементам, порождающим алгебру $C(\mathbf{T}^2)$ функций на торе, мы получим проектор $P \in C(\mathbf{T}^2) \otimes M_2$, задающий образующую группы $K_0(C(\mathbf{T}^2))$. Отметим, что P является элементом алгебры $M_2((SC(\mathbf{T}))^+) \subseteq M_2(C(\mathbf{T}^2))$. В общем случае $P(S,T)$ лежит в образе отображения $\mathrm{id}_{M_2} \otimes \lambda$, где $\lambda : (SC(\mathbf{T}))^+ \longrightarrow C^*(S,T)$ — унитальный $*$-гомоморфизм, удовлетворяющий условиям

$$\lambda((1 - e^{2\pi i x}) \otimes 1) = 1 - S, \quad \lambda((1 - e^{2\pi i x}) \otimes e^{2\pi i y}) = T - ST.$$

Рассмотрим также проектор

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2 \subseteq C(\mathbf{T}^2) \otimes M_2.$$

Определим отображение

$$\mathrm{Bott}_A : \mathrm{Ext}^{-1/2}(C(\mathbf{T}^2) \otimes A, B)_h \longrightarrow \mathrm{Ext}^{-1/2}(A, B)_h$$

формулой

$$[\varphi] \mapsto [(\mathrm{id}_{M_2} \otimes \varphi) \circ b_A] - [(\mathrm{id}_{M_2} \otimes \varphi) \circ b_0],$$

где $b_A, b_0 : A \longrightarrow M_2(C(\mathbf{T}^2)) \otimes A$ — отображения $b_A(a) = P \otimes a$ и $b_0(a) = P_0 \otimes a$ соответственно. Основной частью доказательства служит следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Пусть* $i : SA \longrightarrow C(\mathbf{T}) \otimes A$ *— каноническое вложение,* $e : C(\mathbf{T}) \otimes A \longrightarrow A$ *— отображение, получаемое вычислением в* $1 \in \mathbf{T}$, *а* $c : A \longrightarrow C(\mathbf{T}) \otimes A$ *—* $*$*-гомоморфизм отождествления* A *с постоянными* A*-значными функциями на* $\mathbf{T}$. *Тогда*

$$-\mathrm{Bott}_{SA} \circ E \circ CH([\psi] - e^* \circ c^*[\psi]) = i^*[\psi]$$

в $\mathrm{Ext}^{-1/2}(SA, B)_h$ *для любого полуобратимого расширения* $\psi \in \mathrm{Hom}(C(\mathbf{T}) \otimes A, Q(B))$.

Для доказательства предложения 3.1 заметим, что $c^*([\psi] - e^* \circ c^*([\psi])) = 0$ в $\mathrm{Ext}^{-1/2}(A, B)$. Поэтому мы можем прибавить к $c^*(\psi - e^* \circ c^*(\psi))$ асимптотически расщепимое расширение χ так, чтобы полученное расширение стало асимптотически расщепимым. Тогда

$$\psi' = \psi - e^* \circ c^*(\psi) + e^*(\chi)$$

является таким полуобратимым расширением алгебры $C(\mathbf{T}) \otimes A$ алгеброй B, что $i^*[\psi'] = i^*[\psi]$, а $c^*(\psi')$ является асимптотически расщепимым расширением алгебры A алгеброй B. Так как $CH[e^*(\chi)] = (Se)^*(CH[\chi]) = 0$ в силу того, что расширение χ асимптотически расщепимо, достаточно (работая с ψ' вместо ψ) рассмотреть полуобратимое расширение $\psi \in \mathrm{Hom}(C(\mathbf{T}) \otimes A, Q(B))$, для которого $c^*(\psi)$ асимптотически расщепимо, и показать, что $\mathrm{Bott}_{SA} \circ E \circ CH[\psi] = i^*[\psi]$. Пусть ψ — такое расширение и $\varphi = \psi \circ i$.

Лемма 3.2. *Пусть $e^{2\pi ix}$ — тождественная функция на окружности $\mathbf{T}$. Тогда существует такой унитарный элемент $U \in M(M_2(B))$, что*

$$\begin{pmatrix} \psi(e^{2\pi ix} f \otimes a) & \\ & 0 \end{pmatrix} = q_{M_2(B)}(U) \begin{pmatrix} \psi(f \otimes a) & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

для всех $f \in C(\mathbf{T}),\ a \in A$.

Доказательство. Мы воспользуемся хорошо известным фактом [12], что сюръективный $*$-гомоморфизм сепарабельных C^*-алгебр допускает сюръективное унитальное продолжение до $*$-гомоморфизма алгебр мультипликаторов. Гомоморфизм ψ продолжается до унитального $*$-гомоморфизма

$$\hat{\psi} : M(C(\mathbf{T}) \otimes A) \longrightarrow M(\psi(C(\mathbf{T}) \otimes A)).$$

Тогда $V = \hat{\psi}(e^{2\pi ix} \otimes 1_A)$ — унитарный элемент в $M(\psi(C(\mathbf{T}) \otimes A))$ (1_A обозначает здесь единичный элемент алгебры $M(A)$ и, следовательно, $e^{2\pi ix} \otimes 1_A$ — тождественная функция на окружности $\mathbf{T}$, рассматриваемая как унитарный мультипликатор на $C(\mathbf{T}) \otimes A$). Положим $D = q_B^{-1}(\psi(C(\mathbf{T}) \otimes A)) \subseteq M(B)$. Поскольку q_B отображает D на $\psi(C(\mathbf{T}) \otimes A)$), оно продолжается до сюръективного унитального $*$-гомоморфизма $\widehat{q_B} : M(D) \longrightarrow M(\psi(C(\mathbf{T}) \otimes A))$. Так как $\begin{pmatrix} V & \\ & V^* \end{pmatrix}$ лежит в компоненте связности единицы в $M_2(M(\psi(C(\mathbf{T}) \otimes A)))$, существует такой унитарный элемент $U \in M_2(M(D))$, что

$$\mathrm{id}_{M_2} \otimes \widehat{q_B}(U) = \begin{pmatrix} V & \\ & V^* \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $M(D) \subseteq M(B)$, поскольку B — существенный идеал в D. Таким образом, мы можем рассматривать U как унитарный элемент в $M_2(M(B))$. Тогда ясно, что U обладает указанным в лемме свойством. $\bullet$

Из леммы 3.2 следует, что после прибавления нулевого расширения к ψ и φ мы можем предполагать, что существует такой унитарный элемент $w \in M(B)$, что

$$q_B(w)\psi(f \otimes a) = \psi(e^{2\pi ix} f \otimes a),\ \ f \in C(\mathbf{T}),\ \ a \in A. \tag{3.1}$$

Пусть $\{\pi_t\}_{t\in[1,\infty)} : A \longrightarrow M(B)$ — такой асимптотический гомоморфизм, что $\psi(1 \otimes a) = q_B(\pi_t(a))$ для всех a и t.

Лемма 3.3. *Пусть $\{u_t\}_{t\in[1,\infty)}$ — непрерывная аппроксимативная единица алгебры B, такая что $\lim_{t\to\infty}(u_t\pi_1(a) - \pi_1(a)u_t) = 0$ для всех $a \in A$. Тогда существует такая возрастающая непрерывная функция $r : [1,\infty) \to [1,\infty)$, что $r(t) \geq t$ для* *всех* $t \in [1, \infty)$ *и* $\lim_{t\to\infty}(f(u_{r(t)})\pi_1(a) - f(u_{r(t)})\pi_t(a)) = 0$ *для всех* $a \in A,\ f \in C_0(0,1)$.

Доказательство. По теореме выбора Бартла–Грейвза [2] существует такое непрерывное отображение $\chi : A \longrightarrow M(B)$, что $\chi(a) - \pi_1(a) \in B$ для всех A. Эта же теорема обеспечивает существование такого равномерно непрерывного асимптотического гомоморфизма $\pi' = (\pi'_t) : A \longrightarrow M(B)$, что $\lim_{t\to\infty}(\pi_t(a) - \pi'_t(a)) = 0$ для всех $a \in A$. Пусть $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3 \subseteq \cdots$ — последовательность конечных подмножеств, объединение которых плотно в A. Пользуясь тем, что $\{\pi_t(a) - \chi(a) : t \in [1, n],\ a \in F_n\}$ — компактное подмножество в B для каждого n, легко построить такую функцию r, $r(t) \geq t$, что $\lim_{t\to\infty}(u_{r(t)}\pi_t(a) - u_{r(t)}\chi(a)) = 0$ для каждого $a \in \bigcup_n F_n$. Тогда $\lim_{t\to\infty}(u_{r(t)}\pi'_t(a) - u_{r(t)}\chi(a)) = 0$ для каждого $a \in \bigcup_n F_n$, и из непрерывности χ и равномерной непрерывности $\{\pi'_t\}$ следует, что это же верно для всех $a \in A$. Но тогда $\lim_{t\to\infty}(u_{r(t)}\pi_t(a) - u_{r(t)}\pi_1(a)) = 0$, поскольку $\chi(a) - \pi_1(a) \in B$ для всех $a \in A$. То, что $\lim_{t\to\infty}(f(u_{r(t)})\pi_t(a) - f(u_{r(t)})\pi_1(a)) = 0$ для всех $a \in A$ имеем $f \in C_0(0,1)$, вытекает из теоремы Вейерштрасса. •

Из леммы 3.3 следует, что класс $CH[\psi] \in [[SC(\mathbf{T}) \otimes A, B]]$ представляется таким асимптотическим гомоморфизмом $CH(\psi)$, что

$$\lim_{t\to\infty}(CH(\psi)_t(f \otimes g \otimes a) - f(u_{r(t)})g(w)\pi_t(a)) = 0$$

для всех $a \in A,\ g \in C(\mathbf{T}),\ f \in C_0(0,1)$. Выбирая аппроксимативную единицу $\{u_t\}$ в лемме 3.3 подходящим образом [1], мы можем предполагать, что $\lim_{t\to\infty}(u_{r(t)}\pi_t(a) - \pi_t(a)u_{r(t)}) = 0,\ \lim_{t\to\infty}(1 - u_{r(t)})(w\pi_t(a) - \pi_t(a)w) = 0$ для всех $a \in A$ и $\lim_{t\to\infty}(u_{r(t)}w - wu_{r(t)}) = 0$. Значит, мы можем найти дискретизацию $CH(\psi)_{t_i}, i \in \mathbf{N}$, асимптотического гомоморфизма $CH(\psi)$, для которой выполнены следующие свойства:

1) $\lim_{i\to\infty}(\pi_{t_i}(a) - \pi_{t_{i+1}}(a)) = 0$ для всех $a \in A$,
2) $\lim_{i\to\infty}(u_{r(t_i)} - u_{r(t_{i+1})}) = 0$,
3) $\lim_{i\to\infty}(wu_{r(t_i)} - u_{r(t_i)}w) = 0$,
4) $\lim_{i\to\infty}(1 - u_{r(t_i)})(w\pi_{t_i}(a) - \pi_{t_i}(a)w) = 0$ для всех $a \in A$.

Для упрощения обозначений положим $\pi_n = \pi_{t_n}$, $u_n = u_{r(t_n)}$ и доопределим $\pi_n = \pi_{-n}$ при $n < 0$ и $\pi_0 = \pi_1$. Тогда класс $E \circ CH[\psi] \in \mathrm{Ext}^{-1/2}(SC(\mathbf{T}^2) \otimes A, B)_h$ представляется $*$-гомоморфизмом $\underline{\Phi}$, где $\Phi : SC(\mathbf{T}^2) \otimes A \longrightarrow \mathcal{L}_B(l_2(\mathbf{Z}) \otimes B)$ — такое отображение, что

$$\Phi(f \otimes g \otimes h \otimes a) = \Bigl(\sum_{n\geq 0} f(u_n)e_{nn}\Bigr)\Bigl(\sum_{n\in\mathbf{Z}} g(w)e_{nn}\Bigr)h(T)\Bigl(\sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_n(a)e_{nn}\Bigr)$$

по модулю $\mathcal{K} \otimes B$ для всех $f \in C_0(0,1),\ g, h \in C(\mathbf{T}),\ a \in A$.

Положим

$$W=\sum_{n\in\mathbf{Z}} we_{nn},\qquad U=\sum_{n\geq 0} u_n.$$

Тогда W, T и U коммутируют по модулю $\mathcal{K}\otimes B$. Определим отображение $\underline{\pi}: A\longrightarrow Q(\mathcal{K}\otimes B)$ равенством $\underline{\pi}(a)=\underline{\sum_n \pi_n(a)e_{nn}}$. Тогда $\underline{\pi}$ является $*$-гомоморфизмом, коммутирующим с $\underline{U}$ и $\underline{T}$.

Пусть $Q\in M_2(Q(B))$ — проектор, заданный формулой

$$Q=\begin{pmatrix} s^2(\underline{U}) & sc_0(\underline{U})+sc_1(\underline{U})\underline{W} \\ sc_1(\underline{U})\underline{W}^*+sc_0(\underline{U}) & (c_0+c_1)^2(\underline{U})\end{pmatrix}.$$

Лемма 3.4. *Класс* $-\operatorname{Bott}_{SA}\circ E\circ CH[\psi]$ *представляется в* $\operatorname{Ext}^{-1/2}(SA,B)_h$ *расширением* $\lambda: SA\longrightarrow M_2(Q(B))$, *таким что*

$$\lambda((1-e^{2\pi ix})\otimes a)=Q\begin{pmatrix}1-\underline{T} & \\ & 1-\underline{T}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{\pi}(a) & \\ & \underline{\pi}(a)\end{pmatrix}$$

для всех $a\in A$.

Доказательство. Для упрощения обозначений положим

$$\widetilde{U}=\begin{pmatrix}(1-e^{2\pi ix})(\underline{U}) & \\ & (1-e^{2\pi ix})(\underline{U})\end{pmatrix}.$$

По определению $\operatorname{Bott}_{SA}\circ E\circ CH[\psi]=[\lambda_+]-[\lambda_-]$, где $\lambda_\pm: SA\longrightarrow M_2(Q(B))$ — $*$-гомоморфизмы, определенные равенствами

$$\lambda_+((1-e^{2\pi ix})\otimes a)=P(\underline{T},\underline{W})\widetilde{U}\begin{pmatrix}\underline{\pi}(a) & \\ & \underline{\pi}(a)\end{pmatrix}$$

и

$$\lambda_-((1-e^{2\pi ix})\otimes a)=P_0\widetilde{U}\begin{pmatrix}\underline{\pi}(a) & \\ & \underline{\pi}(a)\end{pmatrix}.$$

Положим

$$X=1-(1-P(\underline{T},\underline{W})\widetilde{U})(1-P_0\widetilde{U}^*).$$

Тогда $[\lambda_+]-[\lambda_-]=[\lambda']$, где $*$-гомоморфизм $\lambda': SA\longrightarrow M_2(Q(B))$ задается формулой

$$\lambda'((1-e^{2\pi ix})\otimes a)=X\begin{pmatrix}\underline{\pi}(a) & \\ & \underline{\pi}(a)\end{pmatrix}.$$

Отметим, что X является 2×2-матрицей, элементы которой лежат в C^*-алгебре, порожденной элементами $1-\underline{T}$, $\underline{W}$ и $(1-e^{2\pi ix})(\underline{U})$. Действительно, если мы определим $*$-гомоморфизм $\Lambda: S\otimes C(\mathbf{T})\otimes S\longrightarrow Q(B)$ равенством

$$\Lambda((1-e^{2\pi ix})\otimes e^{2\pi iy}\otimes(1-e^{2\pi iz}))=(1-e^{2\pi ix})(\underline{U})\ \underline{W}\ (1-\underline{T}),$$

то существует такой квазиунитарный элемент $d \in M_2(S \otimes C(\mathbf{T}) \otimes S)$, что $\mathrm{id}_{M_2} \otimes \Lambda(d) = X$. Через S мы обозначаем здесь для краткости C^*-алгебру $C_0(0,1)$. Напомним, что квазиунитарным называется такой элемент d C^*-алгебры D, что разность $1-d$ унитарна в D^+. Другими словами, это нормальный элемент, спектр которого лежит в $\{1 - z : z \in \mathbf{T}\}$. Тогда расширение

$$\mathrm{id}_{M_2} \otimes \Lambda \otimes \begin{pmatrix} \underline{\pi} & \\ & \underline{\pi} \end{pmatrix} : S \otimes C(\mathbf{T}) \otimes S \otimes A \longrightarrow M_2(Q(B))$$

полуобратимо, и обратное расширение задается $*$-гомоморфизмом, который получается при замене U на $\sum_{n<0} u_{-n}$ в определении Λ. Определим $*$-гомоморфизм

$$\nu : SA \longrightarrow M_2(S \otimes C(\mathbf{T}) \otimes S \otimes A)$$

равенством $\nu((1 - e^{2\pi i x}) \otimes a) = d \otimes a$ и отметим, что $\lambda' = \left(\mathrm{id}_{M_2} \otimes \Lambda \otimes \begin{pmatrix} \underline{\pi} & \\ & \underline{\pi} \end{pmatrix}\right) \circ \nu$. Пусть α — автоморфизм алгебры $M_2(S \otimes C(\mathbf{T}) \otimes S \otimes A)$, который переставляет местами две надстройки поворотом плоскости $\mathbf{R}^2$ на угол $\pi/2$. Тогда

$$-\left[\left(\mathrm{id}_{M_2} \otimes \Lambda \otimes \begin{pmatrix} \underline{\pi} & \\ & \underline{\pi} \end{pmatrix}\right)\right] = \left[\left(\mathrm{id}_{M_2} \otimes \Lambda \otimes \begin{pmatrix} \underline{\pi} & \\ & \underline{\pi} \end{pmatrix}\right) \circ \alpha\right]$$

в $\mathrm{Ext}^{-1/2}(S \otimes C(\mathbf{T}) \otimes S \otimes A, B)_h$. Отсюда следует, что

$$-[\lambda'] = \left[\left(\mathrm{id}_{M_2} \otimes \Lambda \otimes \begin{pmatrix} \underline{\pi} & \\ & \underline{\pi} \end{pmatrix}\right) \circ \alpha \circ \nu\right]$$

в $\mathrm{Ext}^{-1/2}(SA, B)_h$. Положим

$$Y = 1 - \left(1 - Q\begin{pmatrix} 1-\underline{T} & \\ & 1-\underline{T} \end{pmatrix}\right)\left(1 - P_0\begin{pmatrix} 1-\underline{T}^* & \\ & 1-\underline{T}^* \end{pmatrix}\right)$$

и заметим, что $\left(\mathrm{id}_{M_2} \otimes \Lambda \otimes \begin{pmatrix} \underline{\pi} & \\ & \underline{\pi} \end{pmatrix}\right) \circ \alpha \circ \nu = \mu$, где $\mu : SA \longrightarrow M_2(Q(B))$ — такое расширение, что

$$\mu((1 - e^{2\pi i x}) \otimes a) = Y\begin{pmatrix} \underline{\pi}(a) & \\ & \underline{\pi}(a) \end{pmatrix}.$$

Значит, $[\mu] = [\lambda] - [\mu']$, где $\mu'((1 - e^{2\pi i x}) \otimes a) = (1 - \underline{T})\underline{\pi}(a)$. Легко видеть, что μ' асимптотически расщепимо. Поэтому $[\mu] = [\lambda]$. •

Положим

$$X = \begin{pmatrix} s(\underline{U}) & -c_0(\underline{U}) - c_1(\underline{U})\underline{W} \\ c_0(\underline{U}) + c_1(\underline{U})\underline{W}^* & s(\underline{U}) \end{pmatrix}$$

и

$$Z = \begin{pmatrix} i\underline{W_+} & 0 \\ 0 & -i\underline{W_+} \end{pmatrix},$$

где

$$W_+ = \sum_{n\geq 0} we_{nn} + \sum_{n<0} e_{nn} \in \mathcal{L}_B(l_2(\mathbf{Z}) \otimes B).$$

Тогда Z и X — унитарные элементы в $M_2(Q(B))$. Пусть $T_0 : l_2(\mathbf{Z}) \otimes B \longrightarrow l_2(\mathbf{Z}) \otimes B$ — унитарный элемент, определенный формулой

$$T_0 = \sum_{n\in\mathbf{Z}\setminus\{-1\}} e_{n,n+1} + we_{-1,0}.$$

Мы можем тогда определить расширение $\lambda_1 : SA \longrightarrow Q(B)$ равенством

$$\lambda_1((1-e^{2\pi ix})\otimes a) = (1-\underline{T_0})\ \underline{\pi}(a).$$

Лемма 3.5. *Пусть* $\lambda : SA \longrightarrow M_2(Q(B))$ *— расширение из леммы* 3.4. *Тогда*

$$\operatorname{Ad} X^* \circ \lambda = \operatorname{Ad} Z \circ \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Отметим, что λ и $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$ допускают продолжение до унитальных $*$-гомоморфизмов $C(\mathbf{T}) \otimes A \longrightarrow M_2(Q(B))$, определенных так, что они отображают $1 \otimes a$ в $\begin{pmatrix} \underline{\pi}(a) & \\ & \underline{\pi}(a) \end{pmatrix}$, $a \in A$. Достаточно показать, что имеют место равенства

$$X^* \begin{pmatrix} \underline{\pi}(a) & \\ & \underline{\pi}(a) \end{pmatrix} X = Z \begin{pmatrix} \underline{\pi}(a) & \\ & \underline{\pi}(a) \end{pmatrix} Z^* \tag{3.2}$$

и

$$\begin{aligned} V^* &\left(Q \begin{pmatrix} \underline{T} & \\ & \underline{T}^* \end{pmatrix} + Q^\perp \right) \begin{pmatrix} \underline{\pi}(a) & \\ & \underline{\pi}(a) \end{pmatrix} V \\ &= Z \begin{pmatrix} \underline{T_0} & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\pi}(a) & \\ & \underline{\pi}(a) \end{pmatrix} Z^* \\ &= Z \left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{T_0} & \\ & \underline{T_0}^*) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \underline{\pi}(a) & \\ & \underline{\pi}(a) \end{pmatrix} Z^*. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Чтобы облегчить проверку этих равенств, заметим, что $W_+T_0 = TW_+$, откуда следует, что $Z\begin{pmatrix} \underline{T_0} & \\ & \underline{T_0}^* \end{pmatrix} Z^* = \begin{pmatrix} \underline{T} & \\ & \underline{T}^* \end{pmatrix}$. Поскольку X, очевидно, коммутирует с $\begin{pmatrix} \underline{T} & \\ & \underline{T}^* \end{pmatrix}$, а Z коммутирует с $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$, мы видим, что (3.3) вытекает из равенств (3.2) и

$$X^*QX = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Таким образом, следует проверить лишь равенства (3.2) и (3.4), что мы оставляем читателю. •

Итак, мы уже показали, что $-\operatorname{Bott}_{SA}\circ E\circ CH[\psi]=[\lambda_1]$ в $\operatorname{Ext}^{-1/2}(SA,B)_h$. Определим отображение

$$\kappa : SA \longrightarrow Q(B)$$

формулой

$$\kappa((1-e^{2\pi ix})\otimes a)=(1-\underline{T})\,\underline{\pi}(a).$$

Расширение κ асимптотически расщепимо, следовательно, $[\lambda_1]=[\lambda_1]-[\kappa]$. Поскольку $[\lambda_1]-[\kappa]=[\mu]$, где $\mu : SA\longrightarrow Q(B)$ задано формулой $\mu((1-e^{2\pi ix})\otimes a)=(1-T_0T^*)\underline{\pi}(a)$, и поскольку $T_0T^*=\sum_{n\neq -1}e_{nn}+we_{-1,-1}$, получаем, что $[\lambda_1]=[\varphi]$. Этим завершено доказательство предложения 3.1.

Следствие 3.6. *Гомоморфизм*

$$CH : \operatorname{Ext}^{-1/2}(SA,B)_h \longrightarrow [[S^2A,B]]$$

инъективен на множестве $i^*(\operatorname{Ext}^{-1/2}(C(\mathbf{T})\otimes A,B)_h)$.

Доказательство. Пусть $\psi\in\operatorname{Ext}^{-1/2}(C(\mathbf{T})\otimes A,B)$ и предположим, что $CH(i^*[\psi])=0$. Тогда из естественности конструкции Конна–Хигсона заключаем, что

$$(Si)^*(CH[\psi]-(Se)^*\circ(Sc)^*(CH[\psi]))=CH(i^*(\psi))=0$$

в $[[S^2A,B]]$. Поскольку функтор $[[S-,B]]$ является точным на расщепляющихся коротких точных последовательностях [6], получаем, что

$$0=CH[\psi]-(Se)^*\circ(Sc)^*(CH[\psi])=CH([\psi]-e^*\circ c^*[\psi]).$$

Но тогда $i^*[\psi]=0$ по предложению 3.1. •

Лемма 3.7. *Гомоморфизм*

$$(Si)^* : \operatorname{Ext}^{-1/2}(SC(\mathbf{T})\otimes A,B)_h \longrightarrow \operatorname{Ext}^{-1/2}(S^2A,B)_h$$

сюръективен.

Доказательство. Отождествим $S^2=C_0(\mathbf{R}^2)$ с $C_0(D)$, где $D=\mathbf{R}^2\backslash\{(0,y)\in\mathbf{R}^2 : y\geq 0\}$, а $SC(\mathbf{T})$ — с $C_0(\mathbf{R}^2\backslash\{0\})$. Легко видеть, что существует такое непрерывное отображение $F:[0,1]\times\mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R}^2$, что $F(0,-)$ — гомеоморфизм $\mu=F(0,-):\mathbf{R}^2\longrightarrow D$; $F(1,z)=z$, $z\in\mathbf{R}^2$, и множество $F^{-1}(K)$ компактно для каждого компакта $K\subset D$. Таким образом, $f\mapsto f\circ\mu^{-1}$ — эндоморфизм алгебры $C_0(D)$, гомотопный $\mathrm{id}_{C_0(D)}$. Значит, если $\varphi\in\operatorname{Hom}(S^2A,Q(B))$ — полуобратимое расширение, то в группе $\operatorname{Ext}^{-1/2}(S^2A,B)$ имеет место равенство $[\varphi]=[\chi]$, где $\chi(f)=\varphi(f\circ\mu^{-1})$. Определим $\psi : SC(\mathbf{T})\longrightarrow Q(B)$ равенством $\psi(g)=\varphi(g\circ\mu^{-1})$. Тогда $(Si)^*[\psi]=[\varphi]$. •

Лемма 3.7 вместе со следствием 3.6 доказывают, что отображение CH диаграммы (2.1) инъективно. Это завершает доказательство п. б) теоремы 2.3. •

Список литературы

[1] Arveson W., *Notes on extensions of C^*-algebras*, Duke Math. J. **44** (1977), 329–355.
[2] Bartle R. G., Graves L. M., *Mappings between function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 400–413.
[3] Busby R., *Double centralizers and extensions of C^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **132** (1968), 79–99.
[4] Connes A., Higson N., *Déformations, morphismes asymptotiques et K-théorie bivariante*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **311** (1990), 101–106.
[5] Cuntz J., *A general construction of bivariant K-theories on the category of C^*-algebras*, Operator Algebras and Operator Theory (Shanghai, 1997), Contemp. Math., vol. 228, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 31-43.
[6] Dădărlat M., Loring T. A., *K-homology, asymptotic representations and unsuspended E-theory*, J. Funct. Anal. **126** (1994), 367–383.
[7] Houghton-Larsen T., Thomsen K., *Universal* (*co*)*homology theories*, K-Theory **16** (1999), 1–27.
[8] Каспаров Г. Г., *Операторный K-функтор и расширения C^*-алгебр*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **44** (1980), №3, 571–636.
[9] Loring T. A., *K-theory and asymptotically commuting matrices*, Canad. J. Math. **40** (1988), 197–216.
[10] Мануйлов В. М., Мищенко А. С., *Асимптотические и фредгольмовы представления дискретных групп*, Мат. сб. **189** (1998), №10, 53–74.
[11] Manuilov V. M., Thomsen K., *Quasidiagonal extensions and sequentially trivial asymptotic homomorphisms*, Adv. Math. (в печати).
[12] Pedersen G. K., *C^*-algebras and their automorphism groups*, London Math. Soc. Monogr., vol. 14, Academic Press, Inc., London–New York, 1979.

Московский государственный университет
механико-математический факультет
кафедра высшей геометрии и топологии
Россия, 119899 Москва, Воробьевы горы
E-mail: manuilov@mech.math.msu.su

Поступило 24 декабря 1999 г.

Орхусский университет
Математический институт
8000, Орхус Ц., Ню Мункегаде
Дания
(Mathematical Institute, Århus University
Ny Munkegade
8000, Århus C, Denmark)
E-mail: matkt@imf.au.dk