КОГОМОЛОГИИ С ЛОКАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ СОЛВМНОГООБРАЗИЙ И ЗАДАЧИ ТЕОРИИ МОРСА-НОВИКОВА

Д. В. МИЛЛИОНЩИКОВ

Рассмотрим комплекс де Рама $\Lambda^*(M)$ гладкого компактного многообразия M с деформированным дифференциалом $d_{\lambda\omega} = d + \lambda\omega\wedge$, где λ – комплексный параметр, а ω – некоторая замкнутая 1-форма. Когомологии комплекса $(\Lambda^*(M), d_{\lambda\omega})$ возникают естественным образом в рамках теории Морса-Новикова ([1]) и совпадают с когомологиями $H^*_{\rho_{\lambda\omega}}(M, \mathbb{C})$ многообразия M с коэффициентами в локальной системе $\rho_{\lambda\omega}$ групп $\mathbb{C}^*$, где $\rho_{\lambda\omega}(\gamma) = \exp\int_\gamma \lambda\omega$ (см. [2]).

Л.А. Алания в [3] доказал, что $H^*_{\rho_{\lambda\omega}}(M_n, \mathbb{C}) = 0$ при $\lambda\omega \neq 0$ для одного семейства нильмногообразий M_n, там же было отмечено, что подобная теорема верна для произвольных нильмногообразий. Технически более сложная задача о вычислении $H^*_{\rho_{\lambda\omega}}(M_n, \mathbb{C}) = 0$ при $\lambda\omega = 0$ частично была решена в [4]. Продолжим исследование, начатое в [3], в более общей ситуации, рассматривая теперь солвмногообразия – компактные однородные пространства G/Γ односвязных разрешимых групп Ли G относительно решеток Γ. Согласно теореме Хаттори [5] когомологии $H^*_{\rho_{\lambda\omega}}(G/\Gamma, \mathbb{C})$ произвольного солвмногообразия G/Γ с вполне разрешимой группой Ли G изоморфны когомологиям $H^*_{\rho_{\lambda\omega}}(\mathfrak{g})$ комплекса $(\Lambda^*(\mathfrak{g}^*), d_{\lambda\omega})$ соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно деформированного дифференциала $d_{\lambda\omega} = d + \lambda\omega\wedge$.

Утверждение 1. Комплекс $(\Lambda^*(\mathfrak{g}^*), d_{\lambda\omega})$ совпадает с коцепным комплексом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в одномерном представлении ($\mathfrak{g}$-модуле) $\rho_{\lambda\omega} : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$, где $\rho_{\lambda\omega}(\xi) = \lambda\omega(\xi), \xi \in \mathfrak{g}$.

Замечание 1. Представления $\rho_{\lambda\omega}$ решетки Γ и алгебры Ли $\mathfrak{g}$ продолжаются до одномерного представления $\rho_{\lambda\omega}$ самой группы G: $\rho_{\lambda\omega}(g) = \exp\int_{\gamma(e,g)} \lambda\omega$, где $\gamma(e, g) \subset G$ – некоторый путь в G, соединяющий $g \in G$ с единицей e группы (ω – левоинвариантная 1-форма). В этой ситуации применима теорема Мостова (теорема 7.26. [6]), еще более расширяющая класс солвмногообразий, для которых вложение левоинвариантных форм индуцирует изоморфизм когомологий $H^*_{\rho_{\lambda\omega}}(\mathfrak{g}) \to H^*_{\rho_{\lambda\omega}}(G/\Gamma, \mathbb{C})$.

Будем говорить, что $\mathfrak{g}$-модуль M содержится в $\mathfrak{g}$-модуле V, если M является фактормодулем некоторого подмодуля в V или же подмодулем некоторого фактормодуля V.

Теорема 1 (Диксмье, [7])**.** *Пусть $\mathfrak{g}$ – n-мерная нильпотентная алгебра Ли, V – некоторый конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль. Тогда*

1) если в V не содержится тривиальных $\mathfrak{g}$-модулей, то $H^*(\mathfrak{g}, V) = 0$;

2) если в V содержится тривиальный $\mathfrak{g}$-модуль, то $\dim H^p(\mathfrak{g}, V) \geq 2, 1 \leq p \leq n-1$ *и* $\dim H^0(\mathfrak{g}, V) \geq 1, \dim H^n(\mathfrak{g}, V) \geq 1$.

Следствие 1. *Пусть G/Γ – нильмногообразие, а $\mathfrak{g}$ – соответствующая нильпотентная алгебра Ли. Тогда $H^*_{\rho_{\lambda\omega}}(G/\Gamma, \mathbb{C}) \cong H^*_{\rho_{\lambda\omega}}(\mathfrak{g}) = 0$ для $\lambda\omega \neq 0$.*

Таким образом Теорема 1 из [3] является следствием теоремы Диксмье.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №99-01-00090).

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ – n-мерная комплексная разрешимая (или вещественная вполне разрешимая) алгебра Ли с $\dim H^1(\mathfrak{g}) = k$. Тогда существует базис $\omega_1, \dots, \omega_n$ в $\mathfrak{g}^*$ такой, что*

$$d\omega_i = 0, i = 1, \dots, k; \quad d\omega_j = \alpha_j \wedge \omega_j + P_j(\omega_1, \dots, \omega_{j-1}), j = k{+}1, \dots, n,$$

где набор $\{\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$ замкнутых 1-форм имеет следующий инвариантный смысл: это набор весов (вместе с их кратностями) вполне приводимого представления ассоциированного с $ad|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ – ограничением присоединенного представления на коммутант.

Для доказательства достаточно применить теорему Ли к представлению $ad|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$.

При помощи базиса $\omega_1, \dots, \omega_n$ определяются фильтрация F комплекса $(\Lambda^*(\mathfrak{g}), d_{\lambda\omega})$ и соответствующая спектральная последовательность E_r, сходящаяся к $H^*_{\lambda\omega}(\mathfrak{g})$. E_r вырождается в первом члене E_1, если $-\lambda\omega$ принадлежит дополнению конечного множества $\{0\} \cup \Omega_{\mathfrak{g}}$ в $H^1(\mathfrak{g})$. $\Omega_{\mathfrak{g}}$ определяется как множество всевозможных p-сумм вида $\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_p}$, где $k{+}1 \le i_1 < \dots < i_p \le n$ и $p = 1, \dots, n$ форм из набора $\{\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$. Заметим, что множество $\Omega_{\mathfrak{g}}$ отвечает за невырождение спектральной последовательности в первом члене, но и ненулевой E_1, вообще говоря, не гарантирует нетривиальность E_∞. Поэтому и нужно ввести $\tilde{\Omega}_{\mathfrak{g}} \subset \Omega_{\mathfrak{g}}$, для которого $E_\infty \neq 0$.

Теорема 2. *Пусть G/Γ – компактное солвмногообразие, отвечающее вполне разрешимой группе Ли G, $\mathfrak{g}$ – соответствующая алгебра Ли, ω – замкнутая 1-форма на G/Γ. $H^*_{\lambda\omega}(G/\Gamma, \mathbb{C}) \neq 0$ если и только если $-\lambda[\omega] \in \{0\} \cup \tilde{\Omega}_{\mathfrak{g}}$, где $\tilde{\Omega}_{\mathfrak{g}}$ – некоторое конечное подмножество в $H^1(G/\Gamma, \mathbb{R})$, определенное в терминах алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

Пример 1. Рассмотрим полупрямое произведение $G_0 = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$, причем $\mathbb{R}$ действует на $\mathbb{R}^2$ посредством

$$t \to \phi(t) = \begin{pmatrix} a^t & 0 \\ 0 & a^{-t} \end{pmatrix},$$

где $a + a^{-1} = n \in \mathbb{N}, a \neq 1, a > 0$. Тогда $\phi(1)$ сопряжена некоторой матрице из $SL(2, \mathbb{Z})$, а значит существует решетка $L \subset \mathbb{R}^2$ инвариантная относительно $\phi(1)$. Определяем решетку $\Gamma \subset G_0$ как полупрямое произведение $\mathbb{Z} \ltimes_{\phi(1)} L$. Рассмотрим соответствующее солвмногообразие $M = G_0/\Gamma$.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ группы G_0 изоморфна алгебре, заданной базисом e_1, e_2, e_3 и коммутационными соотношениями: $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = -e_3$. В двойственном базисе $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ дифференциал d устроен следующим образом: $d\omega_1 = 0, d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2, d\omega_3 = -\omega_1 \wedge \omega_3$. Таким образом $H^*_{\lambda\omega}(\mathfrak{g}_0) \neq 0$ при $\lambda\omega = 0, \pm\omega_1$. Для чисел Бетти $b^p_{\lambda\omega}(M) = \dim H^p_{\lambda\omega}(G_0/\Gamma) = \dim H^p_{\lambda\omega}(\mathfrak{g}_0)$ солвмногообразия $M = G_0/\Gamma$ имеем:

1) $b^0_{\pm\omega_1}(M) = 0$, $b^1_{\pm\omega_1}(M) = b^2_{\pm\omega_1}(M) = 1$, $b^3_{\pm\omega_1}(M) = 0$;
2) $b^0(M) = b^1(M) = b^2(M) = b^3(M) = 1$.

Автор благодарен Л.А. Алания за стимулирующие обсуждения и интерес к работе.

Литература

[1] С.П. Новиков, *Блоховские гомологии. Критические точки функций и замкнутых 1-форм*, ДАН **287**:6 (1986), 1321–1324.
[2] А.В. Пажитнов, *Аналитическое доказательство вещественной части неравенств Новикова*, ДАН **293**:6 (1987), 1305–1307.
[3] Л.А. Алания, *Когомологии с локальными коэффициентами некоторых нильмногообразий*, УМН **54**:5 (1999), 147–148.
[4] Д.В. Миллионщиков, *Когомологии нильмногообразий и теорема Гончаровой*, УМН **56**:4 (2001), 153–154.
[5] A. Hattori, *Spectral sequence in the deRham cohomology of fibre bundles*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1, **8**:4, (1960), pp. 289–331.
[6] М. Рагунатан, *Дискретные подгруппы групп Ли*, М.: Мир, 1977, 316 с.
[7] J. Dixmier, *Cohomologie des algebres de Lie nilpotentes*, Acta Sci. Math. Szeged **16** (1955), 246–250.

Московский Государственный университет
E-mail address: million@mech.math.msu.su