КОГОМОЛОГИИ НИЛЬМНОГООБРАЗИЙ И ТЕОРЕМА ГОНЧАРОВОЙ

Д. В. МИЛЛИОНЩИКОВ

Для построения контрпримера к гипотезе Лаптона-Опри (всякое односвязное симплектическое многообразие является формальным в смысле Сулливана ([?])) И.К. Бабенко и И.А. Тайманов рассмотрели в [?] одно очень интересное семейство нильмногообразий M_n. Впервые это семейство появилось в [?] в связи с изучением алгебр Ландвебера-Новикова.

Определим нильпотентную алгебру Ли $\mathcal{V}_n$ базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и коммутационными соотношениями

$$[e_i, e_j] = \begin{cases} (j-i)e_{i+j}, i+j \leq n; \\ 0, i+j > n. \end{cases}$$

По теореме А.И. Мальцева ([?]) у соответствующей ей односвязной нильпотентной группы Ли G_n существует равномерная решетка Γ_n. Нильмногообразие G_n/Γ_n обозначим как M_n. В работах В.М. Бухштабера [?], [?] группы G_n и ее равномерные решетки красиво определяются при помощи полиномиальных преобразований вещественной прямой.

Когомологии $H^*(M_n, \mathbb{R})$ изоморфны когомологиям $H^*(\mathcal{V}_n)$ согласно теореме Номидзу ([?]). Важным наблюдением в [?] было

Утверждение 1. *M_{2k} является симплектическим многообразием с левоинвариантной симплектической формой*

$$\Omega_{2k+1} = \sum_{i+j=2k+1, i<j} (j-i)\omega_i \wedge \omega_j = (2k-1)\omega_1 \wedge \omega_{2k} + (2k-3)\omega_2 \wedge \omega_{2k-1} + \cdots + \omega_k \wedge \omega_{k+1},$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_{2k}$ – двойственный к $e_1, e_2, \ldots, e_{2k}$ базис левоинвариантных $1-$форм.

В результате симплектического раздутия вдоль симплектического вложения $M_{2k} \to \mathbb{C}P^{2k+1}$ получается уже односвязное симплектическое многообразие $\tilde{M}_{2k}$, у которого в когомологиях сохраняется нетривиальное тройное произведение Масси, соответствующее $< [\omega_2], [\omega_1], [\omega_2] >$ в $H^*(\mathcal{V}_{2k})$. Это и доказывает неформальность $\tilde{M}_{2k}$. Вопрос о вычислении $H^*(M_n, \mathbb{R}) = H^*(\mathcal{V}_n)$ оставался открытым.

Первые же шаги в вычислении $H^*(\mathcal{V}_n)$ приводят к известной теореме Гончаровой из теории бесконечномерных алгебр Ли.

Определим алгебру L_k как алгебру Ли полиномиальных векторных полей на $\mathbb{R}^1$, имеющих $x = 0$ нулем кратности $k+1$. Она может быть задана своим базисом

$$e_i = x^{i+1}\frac{d}{dx}, i \in \mathbb{Z}, i \geq k; \ [e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j}.$$

Таким образом алгебра $\mathcal{V}_n$ является фактор-алгеброй $\mathcal{V}_n = L_1/L_{n+1}$.

Используя вторую градуировку p комплекса $C^*(L_k) = \oplus_p C_p^*(L_k)$, где $p(\omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_q}) = i_1 + \cdots + i_q$ и вычисляя биградуированные когомологии $H_p^q(L_k)$, Л.В. Гончарова в [?] доказала следующие формулы (гипотеза Гельфанда-Фукса) для чисел Бетти алгебр L_k :

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №99-01-00090).

$$\dim H^q(L_k) = \binom{q+k-1}{k-1} + \binom{q+k-2}{k-1}. \tag{1}$$

Для вычисления $H^*(L_1/L_{n+1})$ рассмотрим спектральную последовательность Серра–Хохшильда $\{E_r^{i,j}, d_r\}$ пары (L_1, L_{n+1}), сходящуюся к $H^*(L_1)$. Полное вычисление всех ее дифференциалов d_r приводит к значительным техническим трудностям комбинаторного плана, но можно отметить следующие факты:

Лемма 2. *При $q \le \frac{n+1}{3}$ выполняется*

$$E_3^{i,j} = E_\infty^{i,j} = 0, i+j = q, j \neq 0;\ E_3^{q,0} = E_\infty^{q,0} = H^q(L_1);$$

$$E_2^{q,0} = H^q(L_1/L_{n+1}) = \mathrm{Im} d_2(E_2^{q-2,1}) \oplus H^q(L_1),$$

$$\mathrm{Im} d_2(E_2^{q-2,1}) = [\Omega_{n+1}]H^{q-2}(L_2) \oplus [\Omega_{n+1}]^2 H^{q-4}(L_3) \oplus [\Omega_{n+1}]^3 H^{q-6}(L_4) \oplus \dots,$$

где $[\Omega_{n+1}]$ – двумерный класс когомологий формы $\Omega_{n+1} = \sum\limits_{i+j=n+1, 1\le i<j} (j-i)\omega_i \wedge \omega_j$.

Следствие 3. *При $q \le \frac{n+1}{3}$ имеется бигрaдуированный изоморфизм*

$$H^q(L_1/L_{n+1}) = H^q(L_1) \oplus [\Omega_{n+1}]H^{q-2}(L_2) \oplus [\Omega_{n+1}]^2 H^{q-4}(L_3) \oplus [\Omega_{n+1}]^3 H^{q-6}(L_4) \oplus \dots$$

Теперь, используя значения (**??**) для $\dim H^{q-2i}(L_{i+1})$, мы можем подсчитать размерность $\dim H^q(L_1/L_{n+1})$ при $q \le \frac{n+1}{3}$:

$$\dim H^q(L_1/L_{n+1}) = \binom{q}{0} + \binom{q-1}{0} + \binom{q-1}{1} + \binom{q-2}{1} + \binom{q-2}{2} + \binom{q-3}{2} + \dots$$

Последняя сумма есть не что иное, как сумма элементов двух соседних диагоналей треугольника Паскаля, а она, как известно, равняется $q+2-$му числу Фиббоначчи F_{q+2}. Таким образом приходим к основной теореме:

Теорема 4. *Число Бетти $b_q(M_n) = \dim(H^q(\mathcal{V}_n))$ стабилизируется при $n \ge 3q-1$ и равняется $(q+2)-$му числу Фиббоначчи F_{q+2} :*

$$b_1(M_n) = 2,\ b_2(M_n) = 3,\ b_3(M_n) = 5, \dots, b_q(M_n) = F_{q+2},\ n \ge 3q-1.$$

Пример 5. Укажем базисы в $H^q(\mathcal{V}_n)$ для $q = 1, 2, 3$ ($n \ge 3q-1$ в каждом случае):

1) $H^1(\mathcal{V}_n) : [\omega_1], [\omega_2]$.

2) $H^2(\mathcal{V}_n) : [\omega_2 \wedge \omega_3], [\omega_2 \wedge \omega_5 - 3\omega_3 \wedge \omega_4], [\Omega_{n+1}]$.

3) в $H^3(\mathcal{V}_n)$ имеется 5 образующих: g_{12}, g_{15} (образующие из $H^3(L_1)$ со второй градуировкой 12, 15 соответственно [**?**]) и три коцикла

$$[\omega_2]\wedge[\Omega_{n+1}], [\omega_2 \wedge \Omega_{n+2} - n\omega_3 \wedge \Omega_{n+1}], [\omega_2 \wedge \Omega_{n+3} - (n+1)\omega_3 \wedge \Omega_{n+2} + \frac{n(n+1)}{2}\omega_4 \wedge \Omega_{n+1}],$$

где $\Omega_{n+2} = \sum\limits_{i+j=n+2, 2\le i<j} (j-i)\omega_i \wedge \omega_j$, $\Omega_{n+3} = \sum\limits_{i+j=n+3, 3\le i<j} (j-i)\omega_i \wedge \omega_j$.

Автор выражает благодарность Л.А. Алания, И.К. Бабенко, В.М. Бухштаберу и В.Ю. Овсиенко за обсуждение результатов работы.

Литература

[1] И.К. Бабенко, И.А. Тайманов *О существовании неформальных односвязных симплектических многообразий*, УМН, **53**:5 (1998), 225.

[2] Л.В. Гончарова, *Когомологии алгебр Ли формальных векторных полей на прямой*, Функц. анал. и его прил., **7**:2 (1973), 6–14.

[3] В.М. Бухштабер, А.В. Шокуров, *Алгебра Ландвебера-Новикова и формальные векторные поля на прямой*, Функц. анал. и его прил., **12**:3 (1978), 1–11.

[4] В.М. Бухштабер, *Группы полиномиальных преобразований прямой, неформальные симплектические многообразия и алгебра Ландвебера-Новикова*, УМН, **54**:4 (1999), 161.

[5] G. Lupton and J. Oprea. *Symplectic manifolds and formality*, J. Pure Appl. Algebra, **91** (1994), 193–207.
[6] А.И. Мальцев. *Об одном классе однородных пространств*, Известия АН СССР Сер. матем. **3** (1949), 9-32.
[7] K. Nomizu. *On the cohomology of homogeneous spaces of nilpotent Lie groups*, Ann. of Math. **59** (1954), 531–538.

Московский Государственный университет
E-mail address: million@mech.math.msu.su