*2000 г. май — июнь* *т. 55, вып. 3(333)*

*УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК*

# В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

## СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

### ГОЛОМОРФНЫЕ РАССЛОЕНИЯ И КОММУТИРУЮЩИЕ РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. ДВУХТОЧЕЧНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

И. М. Кричевер, С. П. Новиков

Настоящая работа непосредственным примыкает к предшествующей работе авторов [1]. Как известно, в современной математической физике теория коммутирующих одномерных операторов появилясь, как побочный алгебраический аспект теории иинтегрирования нелинейных солитонных систем и спектральной теории периодических конечнозонных операторов [2]–[5].

Как чисто алгебраическая задача, проблема классификации обыкновенных скалярных дифференциальных операторов была поставлена еще в 20-х годах Бурхналом и Чаунди [6], которые далеко продвинулись в решении задачи для случая операторов взаимно-простых порядков (в котором ранг всегда равен 1), завершенном в [3]. Они же отмечали, что общая задача для ранга $r > 1$, представляется чрезвычайно трудной.

Первые шаги были сделаны в работах [7], [8]. Метод эффективной классификации коммутирующих дифференциальных операторов ранга $r > 1$ общего положения был создан авторами в работах [9], [10]. Коммутирующие пары ранга $r$ зависят от $(r-1)$ произвольной функции одной переменной, гладкой алгебраической кривой $\Gamma$ с *одной* отмеченной точкой $P$ и набора параметров Тюрина (характеризующих оснащенное стабильное голоморфное расслоение). Мы называем такие конструкции *одноточечными*.

Для разностных операторов вся, ставшая уже классической, теория пар коммутирующих операторов ранга $r = 1$ основывалась только на *двухточечных конструкциях* [11], [12]. Кольца таких операторов оказывались изморфны кольцам $A(\Gamma, P^{\pm})$ мероморфных функций на алгебраической кривой $\Gamma$ с полюсами в паре отмеченных точек $P^{\pm}$.

В предшествующей работе авторов [1] было показано, что для ранга $2l \geq 2$ широкий класс коммутирующих разностных операторов получается из одноточечной конструкции. Аналогично непрерывному случаю, эти операторы зависят от произвольных функции одной переменной $n \in Z$.

В настоящей работе нами получено описание широкого класса коммутирующих разностных операторов, построенных исходя из двухточечных конструкции. В отличие от одноточечных конструкции, здесь не возникает никаких произвольных функции; коэффициенты операторов могут быть вычислены через тэта-функции Римана. Как и для случая ранга 1, эти операторы приводят к решениям уравнений $2D$ цепочки Тода и всей связанной с ними иерархии.

Рассмотрим гладкую алгебраическую кривую $\Gamma$ рода $g$ с двумя отмеченными точками $P^{\pm}$. Пусть $(\gamma)$ является набором $rg$ точек $\gamma_s$, $s = 1, \ldots, rg$, на $\Gamma$, а $(\alpha)$ является набором $(r-1)$-мерных векторов: $\alpha_s = (\alpha_{sj})$, $j = 1, \ldots, r-1$. Согласно [9], [10], эти параметры $(\gamma, \alpha)$, называются *параметрами Тюрина*. В общем случае они определяют стабильное оснащенное расслоение $\mathscr{E}$ над $\Gamma$ ранга $r$ и степени $c_1(\det \mathscr{E}) = rg$.

---

Работа выполнена при частичной поддержке грантов DMS-98-02577, DMS-97-04613.

Лемма 1. *Для любого набора параметров Тюрина $(\gamma,\alpha)$ общего положения существует единственная мероморфная вектор-функция $\psi_n(Q)=(\psi_n^i(Q))$, $i=1,\dots,r$; $Q\in\Gamma$ такая, что:* (i) *вне $P^{\pm}$ функция $\psi_n^i(Q)$ имеет не более чем простые полюсы в точках $\gamma_s$; ее вычеты в этих точках удовлетворяют соотношению $\alpha_{si}\operatorname{res}_{\gamma_s}\psi_n^i=\operatorname{res}_{\gamma_s}\psi_n^r$;* (ii) *в окрестности отмеченных точек $\psi_n(Q)^i$, $n=kr+j$, $0\le j<r$, имеет вид*

$$\psi_n^i=z_\pm^{\mp k}\left(\xi_{n,\pm}^i+O(z_\pm)\right), \tag{1}$$

*где $\xi_{kr+j,+}^j=1$, $\xi_{kr+j,+}^i=0$, $i>j$; $\xi_{kr+j,-}^i=0$, $i<j$ (здесь $z_\pm$ локальные координаты в окрестностях $P^{\pm}$).*

Определенная выше вектор-функция является аналогом разностной функции Бейкера–Ахиезера для случая высших рангов.

Теорема 1. *Пусть $\psi_n^i(Q)$ является векторной функцией Бейкера-Ахиезера, соответствующей набору алгебро-геометрических данных $\{\Gamma,P^{\pm},(\gamma,\alpha)\}$. Тогда для любой функции $f(Q)\in A(\Gamma,P^{\pm})$ существует единственный разностный оператор $L_f$ вида:*

$$L_f=\sum_{i=-rn_-}^{rn_+}u_i(n)T^i, \qquad u_{\pm rn_\pm}=f_\pm\neq 0, \tag{2}$$

*такой, что $L_f\psi_n^i(Q)=f(Q)\psi_n^i(Q)$, $i=1,\dots,r$. Здесь $Ty_n=y_{n+1}$ оператор сдвига, а $n_\pm$ порядки функции $f(Q)$ в точках $P^{\pm}$.*

*Как функция $\psi$, так и коэффициенты операторов могут быть явно вычислены через тэта-функцию Римана, отвечающую кривой $\Gamma$. Коэффициенты операторов $L_f$ являются периодическими функциями тогда и только тогда, когда $A(P^+)-A(P^-)$ является точкой конечного порядка на якобиане $J(\Gamma)$.*

Замечание 1. Обратим внимание на то, что в этой конструкции нет функциональных параметров даже и в случае ранга $r>1$. Из формула (2) следует, что среди операторов $L_f$ имеются как такие, что все сдвиги $T^i$ положительны, $i>0$, так и такие операторы, что все сдвиги отрицательны, $i<0$. Одноточечные конструкции никогда не приводят к таким операторам. Мы естествено приходим здесь и к конструкции представлений варианта алгебры Каца-Муди $\widehat{sl}(r,C)$, ассоциированной с алгебраической кривой $\Gamma$ с отмеченными точками $P^{\pm}$ по схеме работы [13].

Замечание 2. Авторы также построили для любого ранга $r>1$ двухточечные вектор-функции Бейкера–Ахиезера, задающие решения полной иерархии уравнений $2D$ цепочки Тода. Они зависят от $2(r-1)$ произвольных функций. Эта конструкция содержит теорию интегрируемых потенциалов двумерного оператора Шредингера, связанных с расслоениями высших рангов, начатую авторами в работе [14].

Рассмотрим кольцо $\mathcal{D}$ разностных операторов конечного порядка. В силу теоремы 1 набор параметров Тюрина общего положения $(\gamma,\alpha)$ задает гомоморфизм $G_{(\gamma,\alpha)}\colon A(\Gamma,P^{\pm})\mapsto\mathcal{D}$, образ которого является максимальным коммутативным подкольцом. Следующая теорема показывает, что предложенная конструкция описывает все подобные кольца общего положения.

Теорема 2. *Для любого кольцевого мономорфизма $G\colon A(\Gamma,P^{\pm})\mapsto\mathcal{D}$, такого что операторы $L_f=G(f)$ имеют вид (2), нормированные совместные собственные функции определяют оснащенное голоморфное расслоение ранга $r$ и степени $rg$. В общем положении, когда это расслоение описывается параметрами Тюрина $(\gamma,\alpha)$, гомоморфизм $G$ совпадает с гомоморфизмом $G=G_{(\gamma,\alpha)}$, задаваемым в силу теоремы 1 с помощью соответствующей векторной функции Бейкера–Ахиезера.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

**[1]** Кричевер И. М., Новиков С. П. // УМН. 2000. Т. 55. №1. С. 187–188. **[2]** Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. // УМН. 1976. Т. 31. №1. С. 55–136.

[**3**] Кричевер И. М. // УМН. 1977. Т. 32. № 6. С. 183–208. [**4**] Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. Итоги науки и техники. Фундаментальные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1985. [**5**] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. [**6**] Burchnall J. L., Chaundy T. W. // Proc. Roy. Soc. London. 1928. V. 118. P. 557–583. [**7**] Dixmier J. // Matematika. 1969. V. 13. № 4. P. 27–40. [**8**] Дринфельд В. Г. // Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11. № 1. С. 11–31. [**9**] Кричевер И. М. // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12. № 3. С. 20–31. [**10**] Кричевер И. М., Новиков С. П. // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12. № 4. С. 41–52. [**11**] Кричевер И. М. // УМН. 1978. Т. 33. № 4. С. 215–216. [**12**] Mumford D. // Proccedings of International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto 1977). Tokyo: Kinokuniya Book Store, 1978. P. 115–153. [**13**] Кричевер И. М., Новиков С. П. // Функц. анализ и его прил. 1987. Т. 21. № 2. С. 46–63. [**14**] Кричевер И. М., Новиков С. П. // УМН. 1980. Т. 35. № 6. С. 47–68.

Columbia University, New York, University of Maryland, College Park,
Институт теоретической физики им. Ландау

Принято редколлегией
03.04.2000