2000 г. ноябрь — декабрь *т. 55, вып. 6(336)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЭЙЛЕРОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ПО ПРОСТРАНСТВУ ФУНКЦИЙ И ПОЛИНОМ АЛЕКСАНДЕРА ОСОБЕННОСТИ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

С. М. Гусейн-Заде, Ф. Дельгадо, А. Кампильо

Пусть $\Delta^C(t_1,\dots,t_r)$ – полином Александера приведенной особенности плоской кривой $C=\bigcup_{i=1}^r C_i$ (C_i – ее неприводимые компоненты), т.е. зацепления $C\cap S^3_\varepsilon\subset S^3_\varepsilon$ для достаточно малого $\varepsilon>0$ (см., например, [1]). Вообще говоря, полином Александера определен только с точностью до умножения на моном $\pm t_1^{n_1}\cdots t_r^{n_r}$. Мы фиксируем его, полагая, что он действительно является полиномом (т.е. не содержит переменных в отрицательных степенях) и что $\Delta^C(0,\dots,0)=1$. Пусть $\zeta_C(t)$ – дзета-функция преобразования классической монодромии особенности C, т.е. ростка функции $f\colon(\mathbb{C}^2,0)\to(\mathbb{C},0)$ такого, что $C=\{f=0\}$ (см., например, [2]). Для $r>1$ имеем $\zeta_C(t)=\Delta^C(t,\dots,t)$ (для $r=1$ $\zeta_C(t)=\Delta^C(t)/(1-t)$).

В [3] было показано, что все коэффициенты полинома Александера $\Delta^C(\underline{t})$ ($\underline{t}=(t_1,\dots,t_r)$) могут быть выражены как эйлеровы характеристики некоторых явным образом описанных пространств – дополнений к системам проективных гиперплоскостей в проективных пространствах. Для особенности гиперповерхности произвольной размерности числа Лефшеца итераций преобразования классической монодромии были описаны как эйлеровы характеристики некоторых подпространств в пространстве (усеченных) дуг [4]. Этот результат связан с теорией интегрирования по отношению к эйлеровой характеристике в пространстве дуг. Здесь мы обсуждаем аналогичное понятие (интегрирование по отношению к эйлеровой характеристике) в проективизации $\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ кольца $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ ростков функций на пространстве $\mathbb{C}^n$ в начале координат (рассматриваемом здесь как линейное пространство) и показываем, что полином Александера и дзета-функция особенности плоской кривой могут быть выражены в виде некоторых интегралов по пространству $\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ по отношению к эйлеровой характеристике.

Пусть $J^k_{\mathbb{C}^n,0}$ – пространство k-струй функций в начале координат в пространстве $\mathbb{C}^n$ ($J^k_{\mathbb{C}^n,0}=\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/\mathfrak{m}^{k+1}\cong\mathbb{C}^{\binom{n+k}{k}}$, где $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал в кольце $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$). Для комплексного линейного пространства L (конечно- или бесконечномерного) обозначим через $\mathbb{P}L$ его проективизацию $(L\setminus\{0\})/\mathbb{C}^*$, пусть $\mathbb{P}^*L$ – несвязное объединение $\mathbb{P}L$ и точки (в некотором смысле $\mathbb{P}^*L=L/\mathbb{C}^*$). Имеются естественные отображения $\pi_k\colon\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}\to\mathbb{P}^*J^k_{\mathbb{C}^n,0}$, $\pi_{k,\ell}\colon\mathbb{P}^*J^k_{\mathbb{C}^n,0}\to\mathbb{P}^*J^\ell_{\mathbb{C}^n,0}$ для

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00612) и фонда INTAS (грант № 97-1644).

Работа последних двух авторов выполнена при частичной поддержке гранта DGICYT PB97-0471 и гранта Кастильи и Леона VA51/97.

$k \geq \ell$. Над $\mathbb{P}J^{\ell}_{\mathbb{C}^n,0} \subset \mathbb{P}^*J^{\ell}_{\mathbb{C}^n,0}$ отображение $\pi_{k,\ell}$ является локально тривиальным расслоением, слоем которого является комплексное линейное пространство размерности $C^k_{n+k} - C^{\ell}_{n+\ell}$.

Определение. Говорят, что подмножество $X \subset \mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ является цилиндрическим, если $X = \pi_k^{-1}(Y)$ для некоторого полуалгебраического подмножества $Y \subset \mathbb{P}J^k_{\mathbb{C}^n,0} \subset \mathbb{P}^*J^k_{\mathbb{C}^n,0}$.

Определение. Эйлерова характеристика $\chi(X)$ цилиндрического подмножества $X \subset \mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ ($X = \pi_k^{-1}(Y)$, $Y \subset \mathbb{P}J^k_{\mathbb{C}^n,0}$) определяется как эйлерова характеристика $\chi(Y)$ множества Y.

Замечание. Полуалгебраическое подмножество конечномерного проективного пространства (например, множество Y выше) может быть представлено в виде объединения конечного числа непересекающихся клеток. Эйлерова характеристика такого множества определяется как альтернированная сумма чисел клеток различных размерностей. Определенная таким образом эйлерова характеристика обладает свойством аддитивности: $\chi(Y_1 \cup Y_2) = \chi(Y_1) + \chi(Y_2) - \chi(Y_1 \cap Y_2)$, и поэтому может рассматриваться как обобщенная (неположительная) мера на алгебре полуалгебраических подмножеств.

Пусть $\psi\colon \mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \to A$ – функция со значениями в абелевой группе A.

Определение. Говорят, что функция $\psi\colon \mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \to A$ является цилиндрической, если для любого ненулевого элемента $a \in A$ множество $\psi^{-1}(a) \subset \mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ является цилиндрическим.

Определение. Интеграл цилиндрической функции ψ по $\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ по отношению к эйлеровой характеристике – это $\displaystyle\int_{\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}} \psi\, d\chi = \sum_{a\in A,\ a\neq 0} \chi(\psi^{-1}(a))\cdot a$, если эта сумма имеет смысл в A. Если интеграл существует (имеет смысл), то говорят, что функция ψ интегрируема.

Замечание. Аналогичным образом можно определить обобщенную эйлерову характеристику $[X]$ цилиндрического подмножества пространства $\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ (или пространства $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$) со значениями в кольце Гротендика комплексных полуалгебраических пространств, локализованном по классу $\mathbb{L}$ комплексной прямой, и тем самым соответствующее понятие интегрирования (см., например, [5]). Для этого можно определить $[X]$ как $[Y]\cdot \mathbb{L}^{-C^k_{n+k}}$.

Для особенности $C = \bigcup_{i=1}^r C_i \subset (\mathbb{C}^2,0)$ плоской кривой пусть $\varphi_i\colon (\mathbb{C}_i,0) \to (\mathbb{C}^2,0)$ – параметризации (униформизации) компонент C_i кривой C (т.е. $\operatorname{Im}\varphi_i = C_i$ и φ_i является изоморфизмом между $\mathbb{C}_i$ и C_i вне начала координат). Для ростка $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ обозначим через $v_i(g)$ степень начального члена в разложении в степенной ряд ростка $g \circ \varphi_i\colon (\mathbb{C}_i,0) \to \mathbb{C}$: $g \circ \varphi_i(\tau_i) = c_i \cdot \tau_i^{v_i}$ + (члены более высокой степени), где $c_i \neq 0$. Если $g \circ \varphi_i(t) \equiv 0$, то полагаем $v_i(g)$ равным бесконечности (∞). Положим $\underline{v}(g) = (v_1(g), \ldots, v_r(g)) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$, $v(g) = \|\underline{v}(g)\| = v_1(g) + \cdots + v_r(g)$. Пусть $\mathbb{Z}[[t]]$ (соответственно $\mathbb{Z}[[t_1,\ldots,t_r]]$) – группа (по отношению к сложению) формальных степенных рядов по переменной t (соответственно по переменным $t_1,\ldots,t_r$). Для $\underline{v} = (v_1,\ldots,v_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ положим $\underline{t}^{\underline{v}} = t_1^{v_1}\cdots t_r^{v_r}$; мы полагаем $t^{\infty} = 0$.

Теорема 1. *Для любого $\underline{v} \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ подмножество $\{g \in \mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0} : \underline{v}(g) = \underline{v}\}$ является цилиндрическим. Поэтому функции $\underline{t}^{\underline{v}(g)}$ и $t^{v(g)}$ на пространстве $\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ со значениями в $\mathbb{Z}[[t_1,\ldots,t_r]]$ и $\mathbb{Z}[[t]]$ соответственно являются цилиндрическими.*

Доказательство вытекает из того факта, что для $g \in \mathfrak{m}^s$ $v_i(g) \geq s$, т.е. ряд Тейлора ростка $g \circ \varphi_i(\tau_i)$ начинается с члена степени не менее s. Поэтому функции $\underline{t}^{\underline{v}(g)}$ и $t^{v(g)}$ на $\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ являются интегрируемыми (поскольку $\sum_{\underline{v}\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}} \ell(\underline{v})\underline{t}^{\underline{v}} \in \mathbb{Z}[[t_1,\ldots,t_r]]$ для любых целых $\ell(\underline{v})$).

Теорема 2. *При $r > 1$ $\displaystyle\int_{\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}} \underline{t}^{\underline{v}(g)}\, d\chi = \Delta^C(t_1,\ldots,t_r)$; при $r \geq 1$ $\displaystyle\int_{\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}} t^{v(g)}\, d\chi = \zeta_C(t)$.*

Доказательство следует из результатов работы [3]. Пусть $\mathbb{P}\widehat{S}_C$ – проективизация расширенной полугруппы кривой C (см. [3]). Для $\underline{v} = (v_1,\ldots,v_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ пусть $k = 1 + \max_{1\leq i\leq r} v_i$ и пусть $Y_{\underline{v}} \subset \mathbb{P}J^k_{\mathbb{C}^2,0}$ – множество $\{j^k g \in \mathbb{P}J^k_{\mathbb{C}^2,0} : \underline{v}(g) = \underline{v}\}$ (мы указывали, что выполнение условия $\underline{v}(g) = \underline{v}$ определяется k-струей $j^k g$ ростка g). Естественное отображение $Y_{\underline{v}} \to \mathbb{P}F_{\underline{v}}$ множества $Y_{\underline{v}}$ в слой $\mathbb{P}F_{\underline{v}}$ проективизации расширенной полугруппы $\mathbb{P}\widehat{S}_C$ (см. [3]) является локально тривиальным расслоением, слоем которого является комплексное линейное пространство некоторой размерности. Теперь теорема 2 вытекает из того, что $\chi(\mathbb{P}\widehat{S}_C) = \Delta^C(t_1, \dots, t_r)$ (см. [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Eisenbud D., Neumann W. Three-Dimensional Link Theory and Invariants of Plane Curve Singularities. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1985. (Ann. of Math. Stud. V. 110.) [**2**] A'Campo N. // Comment. Math. Helv. 1975. V. 50. P. 233–248. [**3**] Гусейн-Заде С. М., Дельгадо Ф., Кампильо А. // УМН. 1999. Т. 54. № 3. С. 157–158. [**4**] Denef J., Loeser F. Lefschetz numbers of iterates of the monodromy and truncated arcs // Preprint math.AG/0001105. [**5**] Craw A. An introduction to motivic integration // Preprint math.AG/9911179.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова;
Университет г. Вальядолид, Испания
E-mail: sabir@mccme.ru, fdelgado@agt.uva.es, campillo@cpd.uva.es

Принято редколлегией
03.10.2000