МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 512.772.1

КУСТАРЕВ АНДРЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫЕ СТРУКТУРЫ НА КВАЗИТОРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

Специальность 01.01.04 – геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
чл.-корр. РАН, доктор физико-математических наук,
профессор В. М. Бухштабер;
доктор физико-математических наук,
доцент Т. Е. Панов

Москва 2010

Содержание

1 Введение

Тема настоящей диссертации – инвариантные почти комплексные структуры на квазиторических многообразиях. Мы исследуем вопросы существования, единственности и эквивалентности таких структур, а также зависимости от комбинаторных данных.

Квазиторические многообразия – один из основных объектов торической топологии, области математики, возникшей за последние 20 лет на стыке таких классических областей, как эквивариантная алгебраическая топология, симплектическая и алгебраическая топология и геометрия и комбинаторика. Основополагающей работой в области явилась статья Дэвиса и Янушкиевича ([9]). В этой работе была решена такая важная задача, как построение чисто топологического аналога ставшего классическим объекта алгебраической геометрии – торических многообразий. Новые объекты стали известны в литературе под именем "квазиторических многообразий". Оказалось, что эти объекты наследуют многие известные свойства проективных торических многообразий, такие, как комбинаторное описание кольца когомологий, стратификация по орбитам действия тора. В работе [9] были также приведены наброски доказательства существования гладкости и комплексной структуры на стабилизированном касательном расслоении.

В работе [6] был описан комбинаторный язык, позволивший описать все топологические свойства и характеристики квазиторических многообразий в терминах чисто комбинаторных данных – простого многогранника и целочисленной характеристической функции. Это сделало возможным конструктивное построение канонической инвариантной гладкой структуры и канонической стабильно комплексной структуры на квазиторическом многообразии в терминах комбинаторных данных.

Кроме того, благодаря комбинаторному языку появилась возможность строить автоматически в неограниченном количестве многообразия с теми или иными заранее известными топологическими свойствами. Комбинаторный язык сделал возможным создание "машины" для производства квазиторических многообразий.

Говоря более детально, квазиторические многообразия – это многообразия с действием тора половинной размерности с пространством орбит действия, эквивалентным простому многограннику. Как уже было сказано, одним из их основных свойств является наличие канонической инвариантной стабильно комплексной структуры. Вопрос о том, эквивалентна ли стабильно комплексная структура на данном многообразии некоторой почти комплексной, был успешно решен в работе [24]. В работе [9] была поставлена аналогичная проблема торической топологии: предъявить комбинаторный критерий для существования инвариантных почти комплексных структур на данном квазиторическом многообразии.

Одним из результатов, полученных в данной диссертации, является решение этой проблемы.

Результаты диссертации опубликованы в работах [14] и [15]. Главы 1 и 2 посвящены классической теории торических многообразий и квазиторическим многообразиям. В главе 1 мы рассматриваем классические и современные конструкции торических многообразий, включая конструкцию Кокса и симплектическую редукцию для проективных торических многообразий. В главе 2 приводятся конструкции квазиторических многообразий, канонической гладкости и канонических стабильно комплексных структур, а также несколько определений знака неподвижной точки, играющих роль комбинаторного языка для формулировки критерия существования и единственности.

В главе 3 приводятся формулировки и доказательства результатов и утверждений, касающихся инвариантных структур. Основной результат диссертации таков:

Теорема. *Каноническая стабильно комплексная структура на квазиторическом многообразии эквивалентна некоторой инвариантной почти комплексной, если и только если соответствующая ей полиориентация положительна.*

Это утверждение, в свою очередь, является следствием двух следующих теорем.

Теорема 4.1 (существование). *Квазиторическое многообразие M допускает T^n-инвариантную почти комплексную структуру тогда и только тогда, когда оно обладает положительной полиориентацией.*

Положительная полиориентация многообразия определяется в терминах знаков неподвижных точек, введенных в п. 3.4. Утверждение теоремы было ранее получено Н. Э. Добринской для случая $n \leqslant 7$ иным методом. Существенные результаты были также получены в работе [17].

Теорема 4.2 (стабильная эквивалентность). *Пусть J_0 и J_1 – две T^n-инвариантные комплексные структуры на расслоении $\tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2l}$, $l > 0$, индуцирующие одну полиориентацию на M. Тогда J_0 и J_1 эквивариантно гомотопны. Иными словами, существует непрерывное по t семейство $J(t)$ инвариантных комплексных структур на $\tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2l}$ такое, что $J(0) = J_0$ и $J(1) = J_1$.*

Из двух основных теорем и их доказательств можно получить ряд следствий об эквивалентностях инвариантных структур, которые приведены в п. 4.4.3.

В разделе 4.5 рассматриваются комбинаторные вопросы, возникающие в связи с исследованием множества инвариантных почти комплексных структур. Для каждой размерности строится пример квазиторического многообразия, не допускающего никакой инвариантной почти комплексной структуры (следствие 4.30). Мы определяем комбинаторный инвариант многогранника $i(P)$, отвечающий за число положительных полиориентаций, и с помощью оценки на $i(P)$, полученной в предложении 4.33, доказываем следующий результат.

Теорема 4.8. *Число инвариантных почти комплексных структур на квазиторическом многообразии M^{2n} не превосходит 2^n.*

В разделе 4.6 содержится краткий обзор проблемы Хирцебруха о допустимых значениях чисел Черна различных классов многообразий. Приводятся результаты для квазиторических многообразий с инвариантной почти комплексной структурой.

Я благодарен моим научным руководителям Виктору Матвеевичу Бухштаберу и Тарасу Евгеньевичу Панову за постановку задачи, постоянное внимание и поддержку, интересные и продуктивные обсуждения и интерес к моей научной работе. Хотел бы выразить благодарность Н. Рэю, Л. А. Алании, М. Э. Казаряну, С. В. Дужину, И. А. Дынникову, С. К. Ландо, Ю. М. Бурману, О. В. Мусину за неоценимое научное обсуждение. Я благодарен всем людям, научившим и привившим мне интерес к математике, в особенности И. В. Ященко, Р. К. Гордину, А. Ю. Митягину, А. Б. Скопенкову, А. В. Иншакову, С. В. Маркелову, Р. М. Федорову.

Большое спасибо Е. Горскому, Г. Мерзону, Г. Гусеву, М. Берштейну, А. Мазур, Д. Гугнину, А. Гайфуллину, Н. Ероховцу, В. Жгуну, В. Горину, Е. Гречникову, Ю. Устиновскому, М. Горскому, беседы с которыми много для меня проясняли.

В заключение я хотел бы поблагодарить своих родителей, родных, близких и знакомых за их терпение и понимание, проявленное в процессе работы над диссертацией.

2 Торические многообразия

2.1 Вееры

Хотя вееры изучались в выпуклой геометрии и ранее, особый интерес они привлекли благодаря их тесной взаимосвязи с торическими многообразиями, открытой в начале 1970-х годов. Мы подробно рассмотрим эту взаимосвязь в следующих разделах, а здесь дадим необходимые определения и конструкции.

Определение 2.1. (Терминология вееров). Пусть $N \simeq \mathbb{Z}^n$ – целочисленная решетка ранга n и $N_{\mathbb{R}} = N_{\otimes\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ – объемлющее векторное пространство. Для каждого набора векторов $a_1, \ldots, a_k \in N_{\mathbb{R}}$ определим порожденный ими *выпуклый многогранный конус* σ:

$$\sigma = \{\mu_1 a_1 + \ldots + \mu_k a_k : \mu_i \in \mathbb{R}, \mu_i \geqslant 0\}. \tag{1}$$

Конус σ называется *рациональным*, если его образующие $a_1, \ldots, a_s$ можно выбрать из целочисленной решетки N, и называется *сильно выпуклым*, если он не содержит ни одной прямой. Далее мы будем рассматривать только сильно выпуклые рациональные конусы σ, если не оговорено противное. Конус называется *симплициальным*, если он порождается частью базиса пространства $N_{\mathbb{R}}$. Конус называется *неособым*, если он порождается частью базиса решетки N. *Гранью* конуса σ называется пересечение $\sigma \cap H$ конуса с гиперплоскостью H, для которой σ целиком содержится в одном из определяемых ею полупространств. Грань конуса снова является конусом. Единственная 0-мерная грань называется *вершиной*, а 1-мерные грани – *лучами* (или *ребрами* конуса). Если конус является неособым, то он порождается целочисленными примитивными векторами вдоль его ребер.

Веером называется набор Σ конусов в $N_{\mathbb{R}}$ такой, что грань каждого конуса из Σ также содержится в Σ, и пересечение любых двух конусов из Σ является гранью каждого из них. Веер Σ называется *симплициальным* (соответственно, *неособым*), если все его конуса являются симплициальными (соответственно, неособыми).

Пусть $N^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ и $N^*_{\mathbb{R}}$ – двойственные решетка и пространство. Определим *двойственный конус* σ^* как

$$\sigma^* = \{u \in N^*_{\mathbb{R}} : (u, x) \geqslant 0 \text{ для всех } x \in \sigma\} \tag{2}$$

Можно проверить, что σ^* действительно является выпуклым рациональным конусом, однако σ^* является строго выпуклым, только если размерность конуса равна n.

Следующая конструкция сопоставляет веер каждому выпуклому многограннику с вершинами в точках решетки.

Конструкция 2.2. (Нормальный веер). Пусть в пространстве $N^*_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ задан n-мерный многогранник P – ограниченное множество, заданное системой уравнений

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : (a_i, x) + b_i \geqslant 0 \,\text{при}\, 1 \leqslant i \leqslant m\}, \tag{3}$$

где ни одно из уравнений не является лишним, то есть удаление любого из уравнений изменяет многогранник. Будем считать, что вершины многогранника P лежат в точках решетки N^* – такие многогранники называются *целочисленными*. Тогда векторы $a_i \in N_{\mathbb{R}}$ в (3) можно выбрать целочисленными (т.е. из N) и примитивными, а значения b_i – целочисленными. Рассматривая $N^*_{\mathbb{R}}$ как евклидово пространство, мы можем считать, что вектор a_i нормален к гиперграни

$$F_i = \{x \in P : (a_i, x) + b_i = 0\}.$$

Для каждой грани $Q \subset P$ определим конус

$$\sigma_Q = \{x \in N_{\mathbb{R}} : (u, x) \leqslant (u', x) \,\text{для всех}\, u \in Q \,\text{и}\, u' \in P\}.$$

В силу (2), двойственный конус σ^*_Q порожден векторами $u' - u$, где $u' \in Q$, $u \in P$. Другими словами, σ^*_Q представляет собой "многогранный угол" при грани Q, порожденный всеми векторами, соединяющими некоторую точку из Q с некоторой точкой из P. Скажем, что вектор a_i *нормален* к грани Q, если $Q \subset F_i$. Тогда конус σ_Q порождается всеми нормальными векторами к грани Q.

Набор конусов $\{\sigma_Q \; : \; Q - \text{грань в} P\}$ является полным веером в $N_{\mathbb{R}}$, который обозначается Σ_P и называется *нормальным веером* многогранника P. Если 0 содержится во внутренности многогранника, то веер Σ_P состоит из конусов над гранями полярного многогранника P^*.

Нормальный веер Σ_P является симплициальным тогда и только тогда, когда многогранник P является простым. В этом случае конусы веера Σ_P порождены такими подмножествами $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$, для которых пересечение $F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k}$ непусто. Наконец, Σ_P является неособым тогда и только тогда, когда векторы $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ образуют базис решетки N для любого набора n гиперграней $F_{i_1}, \ldots, F_{i_n}$, имеющих общую вершину.

Как показывают простые примеры, далеко не любой полный веер получается как нормальный веер для некоторого выпуклого многогранника (см. [11]).

2.2 Классическая конструкция торических многообразий

Торические многообразия как класс алгебраических многообразий впервые возникли в алгебраической геометрии в начале 1970-х годов в связи с задачами эквивариантной компактификации действий алгебраического тора. Геометрия торических многообразий, или "торическая геометрия очень быстро превратилась в один из самых привлекательных разделов алгебраической геометрии и нашла приложения во многих других областях исследований, которые до этого казались весьма далекими друг от друга.

Торическая геометрия является разделом алгебраической геометрии, и здесь *тором* обычно называется коммутативная алгебраическая группа $T_{\mathbb{C}}$, изоморфная произведению $(\mathbb{C}^{\times})^n$ нескольких экземпляров мультипликативной группы $\mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ комплексных чисел. Однако согласно классическому определению, принятому и в топологии, n-мерным *тором* T называется компактная абелева группа Ли, изоморфная произведению n окружностей. Мы будем следовать топологической терминологии, а коммутативные алгебраические группы $T_{\mathbb{C}}$ будем называть *алгебраическими торами*. Тор T можно отождествить с факторгруппой $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ или с компактной подгруппой в стандартном алгебраическом торе $(\mathbb{C}^{\times})^n$:

$$T \simeq \mathbb{T}^n = \{(e^{2\pi i\varphi_1}, \dots, e^{2\pi i\varphi_n}) \in \mathbb{C}^n\} \tag{4}$$

(где $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ пробегает пространство $\mathbb{R}^n$), однако без особой надобности мы не будем фиксировать такое отождествление.

Определение 2.3. *Торическим многообразием* называется нормальное комплексное алгебраическое многообразие X, содержащее алгебраический тор $T_{\mathbb{C}}$ в качестве открытого по Зарисскому подмножества таким образом, что естественное действие $T_{\mathbb{C}}$ на себе продолжается до действия на всем X.

Таким образом, $T_{\mathbb{C}}$ действует на X с плотной орбитой. Исторически торические многообразия возникли как эквивариантные компактификации алгебраического тора $T_{\mathbb{C}}$, но со временем стали рассматривать и некомпактные торические многообразия.

Пример 2.4. Простейшими примерами торических многообразий являются алгебраический тор $(\mathbb{C}^\times)^n$ и аффинное пространство $\mathbb{C}^n$. Примером компактного многообразия является комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$, на котором тор действует в однородных координатах следующим образом:

$$(t_1, \ldots, t_n) \cdot (z_0 : z_1 : \ldots : z_n) = (z_0 : t_1 z_1 : \ldots : t_n z_n).$$

2.2.1 Аффинные торические многообразия

Одним из замечательных свойств торических многообразий является то, что их глубокие алгебро-геометрические свойства описываются на языке комбинаторики и выпуклой геометрии. А именно, имеется взаимно-однозначное соответствие между веерами в $N_\mathbb{R}$ (см. определение (2.1)) и торическими многообразиями с действием алгебраического тора $T_\mathbb{C} = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}^\times \simeq (\mathbb{C}^\times)^n$. Ниже мы кратко изложим соответствующую конструкцию, детали можно найти в [11].

Конструкция 2.5. Сначала покажем, как по конусу $\sigma \subset N_\mathbb{R}$ построить аффинное торическое многообразие. Рассмотрим двойственный конус $\sigma^* \subset N^*_\mathbb{R}$ и его множество целых точек $S_\sigma := \sigma^* \cap N^*$. Тогда S_σ является конечно порожденной полугруппой (относительно сложения). Эта полугруппа определяет групповое кольцо $\mathbb{C}[S_\sigma]$, которое является коммутативной $\mathbb{C}$-алгеброй. Как комплексное векторное пространство, алгебра $\mathbb{C}[S_\sigma]$ имеет базис $\{\chi^u : u \in S_\sigma\}$. Умножение определяется при помощи сложения в S_σ:

$$\chi^u \cdot \chi^{u'} := \chi^{u+u'},$$

а единицей является элемент χ^0. Конечно порожденной коммутативной $\mathbb{C}$-алгебре $\mathbb{C}[S_\sigma]$ стандартным образом сопоставляется аффинное алгебраическое многообразие:

$$V_\sigma := Spec(\mathbb{C}[S_\sigma]),$$

которое называется *аффинным торическим многообразием*, соответствующим конусу σ. Таким образом, если в алгебре $\mathbb{C}[S_\sigma]$ выбрать набор образующих и тем самым представить ее в виде факторалгебры кольца многочленов:

$$C[S_\sigma] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r]/I,$$

то V_σ можно отождествить с подмногообразием общих нулей многочленов из идеала I. Точки многообразия V_σ можно отождествить с гомоморфизмами полугрупп $\mathrm{Hom}_{sg}(S_\sigma, \mathbb{C}_m)$, где $\mathbb{C}_m = \mathbb{C}^\times \cup \{0\}$ – мультипликативная полугруппа комплексных чисел.

Если τ – грань конуса σ, то мы имеем отображение $V_\tau \to V_\sigma$, которое является вложение открытого (по Зарисскому) множества. Это позволяет склеить аффинные многообразия V_σ, соответствующие всем конусам $\sigma \in \Sigma$ некоторого веера Σ в одно алгебраическое многообразие V_Σ, которое и называется *торическим многообразием*, соответствующим вееру Σ. Более формально, V_Σ можно определить как *копредел* в категории алгебраических многообразий V_σ по частично упорядоченному множеству конусов из Σ:

$$V_\Sigma := \mathrm{colim}_{\sigma\in\Sigma} V_\sigma.$$

На многообразии V_σ имеется действие алгебраического тора $T_\mathbb{C} \times V_\sigma \to V_\sigma$, которое задано следующим образом. Точки $t \in T_\mathbb{C}$ задаются гомоморфизмами групп $N^* \to \mathbb{C}^\times$, а точки $x \in V_\sigma$– гомоморфизмами полугрупп $S_\sigma \to \mathbb{C}_m$. Тогда определим $t \cdot x$ как точку в V_σ, соответствующую отображению полугрупп $S_\sigma \to \mathbb{C}_m$, заданному, как

$$u \mapsto t(u)x(u)$$

Двойственный гомоморфизм алгебр $\mathbb{C}[S_\sigma] \to \mathbb{C}[S_\sigma] \otimes C[N^*]$ отображает χ^u в $\chi^u \otimes \chi^u$ для $u \in S_\sigma$. Если $\sigma = \{0\}$, то мы получаем умножение в алгебраической группе $T_\mathbb{C}$. Действия тора на многообразиях V_σ согласованы с вложениями открытых подмножеств, соответствующих граням конуса. Таким образом, для любого веера Σ мы получаем $T_\mathbb{C}$-действие на многообразии V_Σ, которое продолжает $T_\mathbb{C}$-действие на себе.

Пример 2.6. Пусть $N = \mathbb{Z}^n$ и σ – конус, порожденный k базисными векторами $e_1, \ldots, e_k$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Полугруппа S_σ порождена элементами $e_1^*, \ldots, e_k^*$ и $\pm e_{k+1}^*, \ldots, \pm e_n^*$. Следовательно,

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, x_{k+1}^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}],$$

где мы положили $x_i := \chi^{e_i}$. Таким образом, соответствующее аффинное многообразие имеет вид

$$V_\sigma \simeq \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times \times \ldots \times \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^\times)^{n-k}.$$

В частности, при $k = n$ мы получаем n-мерное аффинное пространство, а при $k = 0$ (т.е. $\sigma = \{0\}$) получаем алгебраический тор $(\mathbb{C}^\times)^n$.

Пример 2.7. Пусть $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ – конус, порожденный векторами e_2 и $2e_1 - e_2$ (заметим, что этот конус не является неособым). Тогда двойственный конус σ^* порожден векторами e_1^* и $e_1^* + 2e_2^*$. В качестве образующих полугруппы S_σ можно взять e_1^*, $e_1^* + e_2^*$ и $e_1^* + 2e_2^*$. Таким образом,

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[x, xy, xy^2] \simeq \mathbb{C}[u, v, w]/(v^2 - uw),$$

а V_σ является особым многообразием (конусом над кривой второго порядка).

Пример 2.8. Рассмотрим полный веер Σ в $\mathbb{R}^2$, имеющий три максимальных конуса: конус σ_0 порожден векторами e_1 и e_2, конус σ_1 порожден векторами e_2 и $-e_1 - e_2$, и конус σ_2 порожден векторами $-e_1 - e_2$ и e_1. Тогда каждое аффинное многообразие V_{σ_i} изоморфно $\mathbb{C}^2$, с координатами (x, y) для σ_0, $(x^{-1}, x^{-1}y)$ для σ_1 и (y^{-1}, xy^{-1}) для σ_2. Эти три аффинные карты склеиваются в комплексную проективную плоскость $\mathbb{C}P^2$ стандартным образом: если $(z_0 : z_1 : z_2)$ – однородные координаты в $\mathbb{C}P^2$, то мы имеем $x = z_1/z_0$ и $y = z_2/z_0$.

Пример 2.9. Зафиксируем $k \in \mathbb{Z}$ и рассмотрим полный неособый веер в $\mathbb{R}^2$, имеющий 4 двумерных конуса, порожденных парами векторов $(e_1, e_2), (e_1, -e_2), (-e_1 + ke_2, -e_2)$ и $(-e_1 + ke_2, e_2)$. Можно доказать, что соответствующее алгебраическое многообразие есть *поверхность Хирцебруха* F_k, т.е. комплексная проективизация $\mathbb{C}P(C \oplus \mathcal{O}(k))$. Здесь $\mathbb{C}$ обозначает тривиальное одномерное расслоение, а $\mathcal{O}(k) = \gamma^{\otimes k}$, где γ – *каноническое расслоение* гиперплоского сечения над $\mathbb{C}P^1$ (мы также имеем $\gamma = \overline{\eta}$, где η – расслоение Хопфа). Можно доказать, что многообразие F_k гомеоморфно $S^2 \times S^2$ при четном k и $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ при нечетном k (здесь $\overline{\mathbb{C}P^2}$ обозначает $\mathbb{C}P^2$ с обращенной ориентацией).

Частично упорядоченное по включению множество замыканий орбит $T_{\mathbb{C}}$- действия на V_Σ изоморфно частично упорядоченному множеству граней веера Σ относительно обратного включения. Таким образом, k-мерные конусы веера Σ соответствуют орбитам коразмерности k действия алгебраического тора на V_Σ. В частности, n-мерные конусы соответствуют неподвижным точкам, а 0-мерный конус соответствует единственной плотной орбите. Кроме того, если некоторый веер комбинаторно вкладывается в больший веер, то соответствующее торическое многообразие эквивариантно вкладывается в большее в качестве открытого по Зарисскому множества.

Торическое многообразие V_Σ компактно тогда и только тогда, когда веер Σ является полным (см. определение (2.1)). Если Σ является симплициальным веером, то V_Σ является *орбифолдом*, т.е. локально гомеоморфно факторпространству $\mathbb{R}^{2n}$ по действию конечной группы. Наконец, многообразие V_Σ является неособым (гладким) тогда и только тогда, когда веер Σ является неособым.

2.2.2 Проективные торические многообразия

Конструкция 2.10. (проективные торические многообразия). Рассмотрим целочисленный многогранник $P \subset N^*_{\mathbb{R}}$ и соответствующий нормальный веер Σ_P (см. конструкцию (2.2)). Он имеет по одному максимальному конусу σ_v на каждую вершину $v \in P$ многогранника. Двойственный конус σ_v^* отождествляется с "конусом при вершине v который порожден векторами, соединяющими вершину v с точками многогранника P.

Определим торическое многообразие $V_P := V_{\Sigma_P}$. Так как нормальный веер Σ_P не зависит от линейных размеров многогранника, можно предположить, что для каждой вершины v полугруппа S_{σ_v} (см. конструкцию (2.5)) порождается целыми точками из многогранника (этого всегда можно достичь, заменив P на многогранник kP с достаточно большим k). Отождествим точки решетки N^* с характерами алгебраического тора $T_{\mathbb{C}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times$, т.е. с элементами группы $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(T_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Z}^n$. Тогда целые точки из многогранника P определяют вложение тора $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$ в тор $(\mathbb{C}^\times)^{|N^* \cap P|}$ (здесь $|N^* \cap P|$ – число целых точек в P). При этом можно показать ([11], параграф 3.4), что торическое многообразие V_P отождествляется с проективным замыканием образа тора $T_{\mathbb{C}}$ при этом вложении. В частности, многообразие V_P *проективно* (является подмногообразием в $\mathbb{C}P^{|N^* \cap P|}$). Таким образом, многообразия, происходящие из нормальных вееров, проективны. Верно и обратное: веер, соответствующий проективному торическому многообразию, является нормальным веером для некоторого целочисленного многогранника.

В [11] приведен пример, показывающий, что существуют полные неособые вееры, не являющиеся нормальными веерами ни для каких выпуклых многогранников. Соответствующие торические многообразия, будучи компактными и неособыми, не являются проективными.

Любой комбинаторный простой многогранник допускает выпуклую реализацию в виде многогранника с вершинами в точках целочисленной решетки. Действительно, небольшим возмущением определяющих многогранник неравенств можно добиться того, что ограничивающие гиперплоскости станут рациональными, а комбинаторный тип не изменится (так как гиперплоскости находятся в общем положении). В результате мы получим простой многогранник P' того же комбинаторного типа и с рациональными координатами вершин. Рассмотрев растяжение kP' для подходящего целого k мы получим многогранник с вершинами в точках решетки. Аналогично, шевеля вершины вместо гиперплоскостей, можно получить целочисленную реализацию для произвольного симплициального многогранника. Тем не менее, эти соображения не работают для произвольных многогранников. И действительно, в каждой размерности $\geqslant 8$ существуют комбинаторные многогранники (не являющиеся ни простыми, ни симплициальными), которые не допускают выпуклой реализации с рациональными координатами вершин, см. [28]. В размерностях < 8 существование таких многогранников пока не известно.

Возвращаясь к простым многогранникам и торическим многообразиям, мы заметим, что торические многообразия, соответствующие различным выпуклым реализациям данного комбинаторного многогранника, могут отличаться даже как топологические пространства. Например, все вееры, рассмотренные в примере (2.9), получаются как нормальные вееры к многоугольникам, комбинаторно эквивалентным квадрату, однако соответствующие торические многообразия могут быть не гомеоморфными. Кроме того, существуют комбинаторные простые многогранники, которые не допускают ни одной целочисленной реализации, задающей неособое торическое многообразие.

2.3 Торические многообразия как факторпространства: конструкция Батырева-Кокса

Наряду с классической конструкцией торических многообразий, описанной в разделе (2.2), имеется другая конструкция, описывающая торические многообразия как факторпространства некоторых открытых подмножеств в $\mathbb{C}^m$ по действию подгрупп алгебраического тора. Версии этой конструкции появлялись в работах различных авторов с начала 1990-х годов; в изложении этого раздела мы следуем работе Кокса [7]

Пусть Σ – веер в пространстве $N_{\mathbb{R}}$, имеющий m одномерных конусов, порожденных примитивными векторами $a_1, \ldots, a_m$. В этом разделе мы будем предполагать, что линейная оболочка векторов $a_1, \ldots, a_m$ совпадает с пространством $N_{\mathbb{R}}$.

Рассмотрим отображение $l : \mathbb{Z}^m \to N$, переводящее i-й вектор стандартного базиса решетки $\mathbb{Z}^m$ в вектор $a_i \in N$, для $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда из пердыдущего условия на конусы веера вытекает, что соответствующее отображение $l \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{C}^\times)^m \to T_{\mathbb{C}}$ алгебраических торов сюръективно.

Определим группу $G = G(\Sigma)$ как ядро отображения $l \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times$ (которое для простоты мы снова будем обозначать через l); таким образом, имеем точную последовательность групп:

$$1 \to G \to (\mathbb{C}^\times)^m \xrightarrow{l} T_{\mathbb{C}} \to 1. \tag{5}$$

Группа G изомоморфна произведению $(\mathbb{C}^\times)^{m-n}$ конечной абелевой группы. Легко видеть, что если Σ – неособый веер, содержащий хотя бы один n-мерный конус, то $G \simeq (\mathbb{C}^\times)^{m-n}$.

Мы также определим максимальную компактную подгруппу $K = K(\Sigma) \subset G$ из точной последовательности

$$1 \to K \to \mathbb{T}^m \xrightarrow{l} T \to 1. \tag{6}$$

Пусть $\sigma \subset \Sigma$ – некоторый конус и $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ – множество примитивных образующих его ребер. Определим подмножество $g(\sigma) = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset [m] = \{1, \ldots, m\}$ и рассмотрим моном $z^{\sigma^*} = \prod\limits_{j \notin g(\sigma)} z_j$. Введем аффинное многообразие

$$Z(\Sigma) = \{z \in \mathbb{C}^m : z^{\sigma^*} = 0 \text{ для всех } \sigma \in \Sigma\}$$

и его дополнение $U(\Sigma) = \mathbb{C}^m \setminus Z(\Sigma)$, которое является квазиаффинным многообразием. Для этого дополнения имеется покрытие

$$U(\Sigma) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U(\sigma) \tag{7}$$

аффинными многообразиями

$$U(\sigma) = \{z \in \mathbb{C}^m : z^{\sigma^*} \neq 0\} = \{z \in \mathbb{C}^m : z_j \neq 0 \text{ при } j \notin g(\sigma)\}.$$

Заметим, что $U(\sigma) \simeq \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^\times)^{m-k}$. Каждое подмножество $U(\sigma) \subset \mathbb{C}^m$ инвариантно относительно покоординатного действия $(\mathbb{C}^\times)^m$ на $\mathbb{C}^m$, а значит $U(\Sigma)$ тоже инвариантно.

Как показывает следующий результат, торическое многообразие V_Σ отождествляется с факторпространством $U(\Sigma)$ по действию подгруппы $G \subset T_{\mathbb{C}}$ на $U(\Sigma)$.

Теорема 2.11. *(Кокс [7]) Предположим, что линейная оболочка одномерных конусов веера Σ совпадает с $N_{\mathbb{R}}$.*

1. *Торическое многообразие V_Σ естественно изоморфно категорному факторпространству $U(\Sigma)//G$.*

2. *Торическое многообразие V_Σ является геометрическим факторпространством $U(\Sigma)/G$ тогда и только тогда, когда веер Σ является симплициальным.*

$\square$ Сначала докажем, что для любого конуса $\sigma \in \Sigma$ аффинное торическое многообразие V_σ изоморфно категорному факторпространству $U(\sigma)//G$. Алгебра регулярных функций $\mathbb{C}(U(\sigma))$ изоморфна алгебре $\mathbb{C}[y_i, y_j^{-1} : 1 \leqslant i \leqslant m,\ j \notin g(\sigma)]$ и порождается лорановскими мономами $\prod\limits_{i=1}^{m} y_i^{k_i}$ с $k_i \geqslant 0$ при $i \in g(\sigma)$.

Непосредственная проверка показывает, что моном $\prod\limits_{i=1}^{m} y_i^{k_i}$ инвариантен относительно действия группы G на U_σ тогда и только тогда, когда он имеет вид $\prod\limits_{i=1}^{m} y_i^{(u,a_i)}$ для некоторого $u \in N^*$.

Условия $(u, a_i) \geqslant 0$ при $i \in g(\sigma)$ в точности выделяют двойственный конус $\sigma^* \in N^*_{\mathbb{R}}$, см. (2). Тем самым, мы доказали, что подалгебра инвариантных функций $\mathbb{C}^G(U(\sigma))$ изоморфна алгебре $\mathbb{C}[\sigma^* \cap N^*] = \mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}(V_\sigma)$ (изоморфизм устанавливается соответствием $\prod\limits_{i=1}^{m} y_i^{(u,a_i)} \mapsto \chi^u$). Другими словами, $U(\sigma)//G \simeq V_\sigma$.

Далее необходимо доказать, что установленные нами изоморфизмы $\mathbb{C}^G(U(\sigma)) \to \mathbb{C}[S_\sigma]$ согласованы при переходе к граням конуса. Другими словами, для каждой грани $\tau \subset \sigma$ необходимо установить коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^G(U(\sigma)) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathbb{C}^G(U(\tau)) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathbb{C}[S_\sigma] \arrow[r] & \mathbb{C}[S_\tau].
\end{tikzcd}$$

По определению грани, мы имеем $\tau = \sigma \cap u^\perp$ для некоторого $u \in \sigma^* \cap N^*$, где $u^\perp$ обозначает гиперплоскость в $N_{\mathbb{R}}$ с нормальным вектором u. Рассмотрим моном $y(u) = \prod\limits_{i=1}^{m} y_i^{(u,a_i)}$. Так как $\tau = \sigma \cap u^\perp$, моном $y(u)$ имеет положительный показатель при y_i для $i \in g(\sigma) \setminus g(\tau)$ и нулевой показатель при y_j для $y \in g(\tau)$. Отсюда следует, что алгебра регулярных функций $\mathbb{C}(U(\tau))$ получается из алгебры $\mathbb{C}(U(\sigma))$ локализацией по идеалу, порожденному мономом $y(u)$, т.е. $\mathbb{C}(U(\tau)) = \mathbb{C}(U(\sigma))_{y(u)}$. Так как моном $y(u)$ является G-инвариантным, локализация коммутирует с переходом к инвариантным подалгебрам, т.е. $\mathbb{C}^G(U(\tau)) = \mathbb{C}^G(U(\sigma))_{y(u)}$. Аналогично, $\mathbb{C}[S_\tau] = \mathbb{C}[S_\sigma]_{\chi^u}$. Таким образом, диаграмма (2.3) приобретает вид

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^G(U(\sigma)) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathbb{C}^G(U(\sigma))_{y(u)} \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathbb{C}[S_\sigma] \arrow[r] & \mathbb{C}[S_\sigma]_{\chi^u},
\end{tikzcd}$$

где горизонтальные стрелки являются гомоморфизмами локализации. Эта диаграмма, очевидно, коммутативна.

Теперь, используя аффинное покрытие (7) и доказанное свойство согласованности изоморфизмов на аффинных многообразиях, мы получаем изоморфизм $U(\Sigma)//G \to V_\Sigma = \bigcup\limits_{\sigma\in\Sigma} V_\sigma$. Тем самым, первое утверждение доказано.

Для доказательства второго утверждения необходимо проверить, что все орбиты действия G на $U(\Sigma)$ замкнуты тогда и только тогда, когда веер Σ является симплициальным. Это доказательство можно найти в [7]. $\square$

Предыдущее доказательство также показывает, что тор $T_\mathbb{C}$, действующий на многообразии V_Σ, получается факторизацией тора $(\mathbb{C}^\times)^m$ по подгруппе G, см. (5).

Предположим теперь, что Σ – симплициальный веер. Тогда семейство подмножеств $\{g(\sigma) : \sigma \in \Sigma\}$ образует симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, который мы обозначим K_Σ. Если Σ – полный веер, то K_Σ – симплициальное разбиение $(n-1)$-мерной сферы S^{n-1}.

С каждым симплициальным комплексом K на множестве $[m]$ мы свяжем *конфигурацию координатных подпространств* в $\mathbb{C}^m$:

$$A(K) = \bigcup_{\{i_1,\ldots,i_k\}\notin K} \{z \in \mathbb{C}^m : z_{i_1} = \ldots = z_{i_k} = 0\}$$

и ее *дополнение*

$$U(K) = \mathbb{C}^m \setminus A(K).$$

Предложение 2.12. *$U(K_\Sigma) = U(\Sigma)$.*

$\square$ Рассмотрим точку $z \in \mathbb{C}^m$ и обозначим через $w(z) \subset [m]$ множество ее нулевых координат. Тогда $z \in U(K_\Sigma)$ тогда и только тогда, когда $w(z) = g(\sigma)$ для некоторого конуса $\sigma \in \Sigma$. Это эквивалентно тому, что $z \in U(\sigma)$. Следовательно, $U(K_\Sigma) = \cup_{\sigma\in\Sigma} U(\sigma) = U(\Sigma)$. $\square$

Таким образом, подмножество $U(\Sigma) \subset \mathbb{C}^m$ зависит лишь от комбинаторной структуры веера Σ, в то время как подгруппа $G \subset (\mathbb{C}^\times)^m$ зависит от геометрических данных – примитивных образующих одномерных граней веера Σ.

Следующее предложение уточняет вторую часть теоремы (2.11).

Предложение 2.13. *Предположим, что веер Σ является симплициальным. Тогда G действует на $U(\Sigma)$ с конечными стационарными подгруппами точек. Если Σ является неособым веером, то действие G на $U(\Sigma)$ свободно.*

□ Стационарная подгруппа точки $z \in \mathbb{C}^m$ относительно действия $(\mathbb{C}^\times)^m$ имеет вид

$$(\mathbb{C}^\times)^m_z = \{(t_1, \ldots, t_m) \in (\mathbb{C}^\times)^m : t_i = 1, \text{если}\, z_i \neq 0\}.$$

Стационарная подгруппа относительно действия G есть $G_z = (\mathbb{C}^\times)^m_z \cap G$. Так как G есть ядро отображения $l\colon (\mathbb{C}^\times)^m \to T_\mathbb{C}$, подгруппа G_z есть ядро композиции отображений

$$(C^\times)^m_z \hookrightarrow \mathbb{C}^\times)^m \xrightarrow{l} T_\mathbb{C}. \tag{8}$$

Пусть $z \in U(\Sigma)$. Тогда множество нулевых координат $w(z)$ есть $g(\sigma)$ для некоторого $\sigma \in \Sigma$ (см. предложение (2.12)). Следовательно, набор примитивных векторов $\{a_i : i \in w(z)\}$ линейно независим. Отсюда следует, что ядро композиции (8) есть конечная группа. Если веер Σ является неособым, то $\{a_i : i \in w(z)\}$ есть часть базиса решетки N. В этом случае (8) есть мономорфизм и $G_z = 1$. □

Пример 2.14. Рассмотрим полный веер из примера (2.8). Симплициальный комплекс K_Σ представляет собой полный граф на 3 вершинах (границу треугольника). Мы имеем

$$U(\Sigma) = \mathbb{C}^3 \setminus \{z : z_1 = z_2 = z_3 = 0\} = \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$$

Подгруппа G, определяемая точной последовательностью (5), есть образ диагонального вложения $\mathbb{C}^\times \to (\mathbb{C}^\times)^3$. Согласно теореме (2.11) мы имеем $V_\Sigma = U(\Sigma)/G = \mathbb{C}P^2$.

Пример 2.15. Теперь рассмотрим веер, состоящий из 3 одномерных конусов, порожденных векторами e_1, e_2 и $-e_1 - e_2$. Этот веер не является полным, но его 1-мерные конусы порождают векторное пространство $N_\mathbb{R}$, так что теорема (2.11) применима. Симплициальный комплекс

K_Σ состоит из 3 точек. Пространство $U(\Sigma)$ есть дополнение к 3 координатным прямым в $\mathbb{C}^3$:

$$U(\Sigma) = \mathbb{C}^3 \setminus \{z : z_1 = z_2 = 0,\ z_1 = z_3 = 0,\ z_2 = z_3 = 0\}.$$

Как и в предыдущем примере, $G \simeq \mathbb{C}^\times$ есть диагональная подгруппа в $(\mathbb{C}^\times)^3$. Согласно теореме (2.11), $V_\Sigma = U(\Sigma)/G$ – квазипроективное многообразие, получаемое удалением 3 точек из $\mathbb{C}P^2$.

2.4 Гамильтоновы действия тора и симплектическая редукция

Здесь мы излагаем подход к определению гладких торических многообразий на основе *метода симплектической редукции*. Этот метод позволяет получать гладкое проективное торическое многообразие V_P как фактор некоторого компактного подмногообразия $\mathcal{Z}_P \subset U(\Sigma_P)$ по свободному действию компактной группы K, определяемой из последовательности (6). Таким образом, в гладком проективном случае вместо факторизации некомпактного множества $U(\Sigma)$ по некомпактной группе G можно рассматривать факторизацию компактного многообразия по компактной группе. Исторически именно метод симплектической редукции послужил мотивацией для введения конструкции из предыдущего раздела. Дополнительную информацию о гамильтоновых действиях групп и ссылки можно найти в монографии [2].

Напомним, что *симплектическим многообразием* (W, ω) называется гладкое (но не обязательно компактное) многообразие W с замкнутой 2-формой ω, невырожденной в каждой точке. Таким образом, W должно иметь четную размерность, $\dim W = 2n$.

2.4.1 Метод симплектической редукции

Предположим, что на W задано гладкое и сохраняющее симплектическую форму ω действие тора K (наш выбор обозначения связан с точной последовательностью (6), которая будет для нас источником примеров). Обозначим через $\mathfrak{k}$ алгебру Ли группы K (эта алгебра Ли коммутативна и потому тривиальна, но соответствующие определения можно обобщить и на случай действий некоммутативных групп Ли). Для каждого элемента $k \in \mathfrak{k}$ обозначим через ξ_k соответствующее K-инвариантное векторное поле на W. Действие тора K называется *гамильтоновым*, если 1-форма $\omega(\cdot, \xi_k)$ является точной для любого $k \in \mathfrak{k}$. Другими словами, существует функция H_k на W (называемая *гамильтонианом*), удовлетворяющая условию

$$\omega(\xi, \xi_k) = dH_k(\xi) = \xi(H_k)$$

для любого векторного поля ξ на W. Выбрав базис $\{k_i\}$ в $\mathfrak{k}$ и соответствующий набор гамильтонианов $\{H_{k_i}\}$, можно определить *отображение моментов*

$$\mu : W \to \mathfrak{k}^*, \qquad (x, k_i) \to H_{k_i}(x).$$

Согласно теореме Атьи-Гийемина-Стернберга ([2], Th. 4.2.1), если многообразие W компактно, то образ $\mu(W)$ отображения моментов является выпуклым многогранником в $\mathfrak{k}^*$.

Пример 2.16. В качестве простейшего и основополагающего примера рассмотрим $W = \mathbb{C}^m$ с симплектической формой $\omega = 2\sum\limits_{k=1}^{m} dx_k \wedge dy_k$, где $z_k = x_k + iy_k$. Рассмотрим *стандартное* (покоординатное) действие тора $K = \mathbb{T}^m$ на $\mathbb{C}^m$:

$$(t_1, \ldots, t_m) \cdot (z_1, \ldots, z_m) = (t_1 z_1, \ldots, t_m z_m).$$

Это действие является гамильтоновым, а соответствующее отображение моментов $\mu : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^m$ задается как $\mu(z_1, \ldots, z_m) = (|z_1|^2, \ldots, |z_m|^2)$. (Здесь мы отождествили двойственную алгебру Ли тора $\mathbb{T}^m$ с $\mathbb{R}^m$). Образом отображения моментов является *ортант*

$$\mathbb{R}^m_{\geqslant} = \{(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m : y_i \geqslant 0 \,\text{при}\, 1 \leqslant i \leqslant m\}.$$

Пример 2.17. Пусть теперь Σ – неособый веер, имеющий хотя бы один n-мерный конус, и K–подгруппа в $\mathbb{T}^m$, определяемая из (6). Действие из предыдущего примера можно ограничить до действия группы K на инвариантном подмногообразии $U(\Sigma) \subset \mathbb{C}^m$. Соответствующее отображение моментов задается как композиция

$$\mu_\Sigma \colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^m \to \mathfrak{k}^* \tag{9}$$

Конструкция 2.18. (Симплектическая редукция). Пусть на симплектическом многообразии W задано гамильтоново действие тора K. Предположим, что отображение моментов $\mu : W \to \mathfrak{k}^*$ *собственно*, т.е. множество $\mu^{-1}(V)$ компактно для любого компактного подмножества $V \in \mathfrak{k}^*$. Пусть $v \in \mathfrak{k}^*$ – регулярное значение отображения моментов, т.е. дифференциал $\tau(W)_z \to \mathfrak{k}^*$ является сюръекцией для любого $z \in \mu^{-1}(v)$. Тогда множество уровня $\mu^{-1}(v)$ является гладким K-инвариантным подмногообразием в W, причем тор K действует на $\mu^{-1}(v)$ с конечными стационарными подгруппами точек. Ограничение симплектической формы ω на $\mu^{-1}(v)$ может быть вырождено. Однако, если действие K на $\mu^{-1}(v)$ свободно, то на гладком многообразии $\mu^{-1}(v)/K$ имеется невырожденная форма ω', удовлетворяющая условию

$$p^*\omega' = i^*\omega,$$

где $i : \mu^{-1}(v) \to W$ – вложение, а $p : \mu^{-1}(v) \to \mu^{-1}(v)/K$ – проекция. Таким образом, $(\mu^{-1}(v)/K, \omega')$ является симплектическим многообразием. Переход от (W, ω) к $(\mu^{-1}(v)/K, \omega')$ называется *симплектической редукцией*.

2.4.2 Момент-угол многообразия

Здесь мы более подробно рассмотрим структуру многообразия уровня для отображения моментов, соответствующего действию группы K (6) на множестве $U(\Sigma_P)$ в случае, когда Σ_P – полный неособый веер, определяемый простым многогранником P. Это многообразие уровня, называемое *момент-угол многообразием*, затем будет использовано в конструкции торических многообразий методом симплектической редукции. Данная конструкция является известной, однако само момент-угол многообразие до сих пор изучалось довольно мало. Как было отмечено во введении, момент-угол многообразия сами по себе представляют большой интерес, ввиду их обширных взаимосвязей с различными конструкциями из комбинаторной геометрии и гомологической алгебры.

Рассмотрим простой многогранник $P \subset N^*_{\mathbb{R}}$, заданный системой из m неравенств (3). Мы предположим дополнительно, что первые n гиперграней $F_1, \ldots, F_n$ многогранника P имеют общую вершину, и используем базис из соответствующих нормальных векторов $a_1, \ldots, a_n$ для отождествления $N^*_{\mathbb{R}}$ с $\mathbb{R}^n$. Тогда определены $m \times n$-матрица A_P и аффинный мономорфизм

$$i_P \colon N^*_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^m,$$

который вкладывает P в положительный конус $\mathbb{R}^m_{\geqslant}$.

Теперь определим множество $\mathcal{Z}_P$ из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_P & \xrightarrow{i_Z} & \mathbb{C}^m \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu} \\ P & \xrightarrow{i_P} & \mathbb{R}^m, \end{array} \qquad (10)$$

где $\mu(z_1, \ldots, z_m) = (|z_1|^2, \ldots, |z_m|^2)$ – отображение моментов из примера (2.16). Таким образом, вертикальные стрелки являются проекциями на факторпространства по действию тора $\mathbb{T}^m$, а i_Z является $\mathbb{T}^m$-эквивариантным вложением.

Далее, выбрав матрицу C как базис в $\operatorname{coker} A_P$, мы получим точную последовательность

$$0 \to N_{\mathbb{R}}^* \xrightarrow{A_P} \mathbb{R}^m \xrightarrow{C} \mathbb{R}^{m-n} \to 0. \tag{11}$$

Образ многогранника P при отображении i_P задается следующей формулой:

$$i_P(P) = \{y \in \mathbb{R}^m : Cy = Cb,\, y_i \leqslant 0 \,\text{при}\, 1 \leqslant i \leqslant m\}. \tag{12}$$

Ввиду специального выбора базиса в пространстве $N_{\mathbb{R}}^*$ первые n строк матрицы $A_P = (a_{ij})$ образуют единичную матрицу. Поэтому мы можем в явном виде задать отображение C матрицей

$$\begin{pmatrix} -a_{n+1,1} & \ldots & -a_{n+1,n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_{n+2,1} & \ldots & -a_{n+2,n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m,1} & \ldots & -a_{m,n} & 0 & 0 & \ldots & 1. \end{pmatrix}$$

Сопоставив это с (12) и коммутативной диаграммой 10, мы приходим к выводу, что $\mathcal{Z}_P$ вкладывается в $\mathbb{C}^m$ как множество общих нулей $m-n$ вещественных квадратичных уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} c_{jk}(|z_k|^2 - b_k) = 0 \,\text{для}\, 1 \leqslant j \leqslant m-n. \tag{13}$$

Теорема 2.19. *Система квадратичных уравнений (13) невырождена в каждой точке. Таким образом, определямое ей множество $\mathcal{Z}_P$ является гладким $(m+n)$-мерным многообразием, вложенным в $\mathbb{C}^m$ с тривиальным нормальным расслоением.*

□ Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 2.20. *Пусть C' – матрица размера $(m-n)\times(m-k)$, полученная из C удалением столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_k$, где $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда если пересечение $F_{j_1} \cap \ldots \cap F_{j_k}$ соответствующих гиперграней многогранника P непусто, то C' имеет максимальный ранг $m-n$.*

$\square$ Пусть $\iota : \mathbb{R}^{m-k} \to \mathbb{R}^m$ обозначает вложение координатного подпространства $\{x : x_{j_1} = \ldots = x_{j_k} = 0\}$, и $\kappa : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ – соответствующая проекция на факторпространство. Тогда C' есть матрица композиции отображений $C \cdot \iota$, а матрица композиции $\kappa \cdot A_P$ есть матрица A' размера $k \times n$, составленная из векторов-строк $a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}$. По предположению, эти векторы линейно независимы, так что A' имеет ранг k. Следовательно, $\kappa \cdot A_p$ – эпиморфизм. Из рассмотрения диаграмм

$$0 \to \mathbb{R}^{m-k} \xrightarrow{\iota} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\kappa} \mathbb{R}^k \to 0$$

и

$$0 \to \mathbb{R}^{n} \xrightarrow{A_P} \mathbb{R}^m \xrightarrow{C} \mathbb{R}^{m-n} \to 0$$

вытекает, что $C \cdot \iota$ – также эпиморфизм. Следовательно, C' имеет ранг $m - n$. $\square$

Теперь вернемся к доказательству теоремы. Зафиксируем отождествление $\mathbb{C}^m$ с $\mathbb{R}^{2m}$, заданное как

$$(z_1, \ldots, z_m) \to (x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m),$$

где $z_k = x_k + iy_k$. Тогда в каждой точке $(x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m) \in \mathcal{Z}_P$ градиенты $m - n$ квадратичных уравнений (13) суть

$$2(c_{j,1}x_1, c_{j,1}y_1, \ldots, c_{j,m}x_m, c_{j,m}y_m), \quad 1 \leqslant j \leqslant m - n. \tag{14}$$

Записав их по строкам, получим $(m - n) \times 2m$ - матрицу 2CR, где R – матрица вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & x_m & y_m \end{pmatrix}$$

По определению вложения i_P, если в некоторой точке $z \in \mathcal{Z}_P$ мы имеем $x_{j_1} = y_{j_1} = \ldots = x_{j_k} = y_{j_k}$, то пересечение гиперграней $F_{j_1} \cap \ldots \cap F_{j_k}$ непусто. Согласно лемме (2.20) матрица, получаемая из C удалением столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_k$, имеет ранг $m - n$. Следовательно, $2CR$ также имеет ранг $m - n$, т.е. градиенты (14) линейно независимы в точке z. Теорема доказана. $\square$

Определение 2.21. Многообразие $\mathcal{Z}_P$ называется *момент-угол многообразием*, соответствующим простому многограннику P.

Замечание 2.22. Хотя наша конструкция $\mathcal{Z}_P$ зависит от явной геометрической реализации многогранника P, топологический тип многообразия $\mathcal{Z}_P$ зависит лишь от комбинаторного типа P. Мы докажем это в следующем разделе.

Нам также понадобится описание момент-угол многообразий $\mathcal{Z}_{F_i}$, соответствующих гиперграням $F_i \subset P$ многогранника, $1 \leqslant i \leqslant m$. Обозначим через $p : \mathcal{Z}_P \to P$ проекцию на пространство орбит, т.е. левую стрелку в (10).

Лемма 2.23. *Подмногообразие $p^{-1}(F_i) \subset \mathcal{Z}_P$ гомеоморфно $\mathcal{Z}_{F_i} \times \mathbb{T}^k$, где k – число гиперграней в P, не пересекающихся с F_i.*

$\square$ Пусть гиперплоскость $H_i \subset \mathbb{R}^n$, содержащая гипергрань F_i, задается уравнением $(a_i, x) + b_i = 0$, см. (3). Тогда мы можем задать саму гипергрань F_i системой неравенств

$$F_i = \{x \in H_i : (a_j, x) + b_j \geqslant 0, \text{ при } j \neq i\}$$

Отождествив H_i с $\mathbb{R}^{n-1}$, мы получим представление простого многогранника F_i, аналогичное (3), но при этом некоторые из неравенств будут "лишними". А именно, "лишними" будут неравенства $(a_j, x) + b_j \geqslant 0$, для которых $F_j \cap F_i = \emptyset$; по условию, таких неравенств в точности k. Каждое из этих "лишних" неравенств при ограничении на F_i превращается в строгое неравенство.

Пусть m_i – число гиперграней простого многогранника F_i, тогда мы имеем $m_i + k = m - 1$. Теперь рассмотрим ограничение отображения $i_P : P \to \mathbb{R}^m_{\geqslant}$ на F_i. Заметим, что $i_P(F_i)$ лежит в гиперплоскости $\{z_i = 0\} \subset \mathbb{R}^m$, которую мы отождествим с $\mathbb{R}^{m-1}$. Кроме того, так как каждое из "лишних" неравенств при ограничении на F_i превращается в строгое неравенство, мы имеем $i_P(F_i) \subset \mathbb{R}^{m_i}_{\geqslant} \times \mathbb{R}^k_{>}$. Из этих рассмотрений вытекает, что ограничение диаграммы (10) на F_i раскладывается следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(F_i) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}^{m_i} \times (\mathbb{C}^\times)^k \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}^{m-1} \arrow[d] \\
\mathcal{Z}_{F_i} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}^{m_i} \times \mathbb{R}^k_{>} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}^{m_i} \times \mathbb{R}^k_{\geqslant} \arrow[d] \\
F_i \arrow[r] & \mathbb{R}^{m_i}_{\geqslant} \times \mathbb{R}^k_{>} \arrow[r] & \mathbb{R}^{m-1}_{\geqslant}
\end{tikzcd}$$

Отсюда вытекает, что $p^{-1}(F_i) \to \mathcal{Z}_{F_i}$ является расслоением со слоем $\mathbb{T}^k$, индуцированным из тривиального расслоения $\mathbb{C}^{m_i} \times (\mathbb{C}^\times)^k \to \mathbb{C}^{m_i} \times (\mathbb{R}_{>})^k$. Следовательно, $p^{-1}(F_i) \simeq \mathcal{Z}_{F_i} \times \mathbb{T}^k$. $\square$.

Предложение 2.24. *Действие тора $\mathbb{T}^m$ на $\mathcal{Z}_P$ является гладким. Для каждой гиперграни $F_i \subset P$ подмножество $p^{-1}(F_i)$ является гладким*

$\mathbb{T}^m$-инвариантным подмногообразием в $\mathcal{Z}_P$ с тривиальным нормальным расслоением.

□ Первое утверждение вытекает из того, что действие тора на $\mathcal{Z}_P$ является ограничением стандартного гладкого действия на $\mathbb{C}^m$ при эквивариантном вложении $i_Z : \mathcal{Z}_P \to \mathbb{C}^m$. Второе утверждение вытекает из того факта, что подмногообразие $p^{-1}(F_i) \subset \mathcal{Z}_P$ задается уравнением $z_i = 0$. □

Теорема 2.25 ([3], Cor.4.7)**.** *Гладкая структура на многообразии $\mathcal{Z}_P$, удовлетворяющая условиям из предложения (2.24), единственна.*

Предположим теперь, что многогранник P является целочисленным (т.е. его вершины лежат в решетке N^*), и рассмотрим соответствующий нормальный веер Σ_P (конструкция (2.2)). Тогда линейное отображение $A_P : N^*_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^m$ есть в точности отображение, получаемое из отображения торов $l : \mathbb{T}^m \to T$ (6) применением функтора $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, \mathbb{S}^1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Следовательно, отображение моментов $\mu_P = \mu_{\Sigma_P}$ (9), соответствующее вееру Σ_P, задается как

$$\mu_P \colon (z_1, \ldots, z_m) \mapsto (\sum_{k=1}^{m} c_{1,k}|z_k|^2, \ldots, \sum_{k=1}^{m} c_{m-n,k}|z_k|^2). \qquad (15)$$

Следствие 2.26. *Пусть P – простой многогранник (3) с вершинами в точках решетки N^*. Тогда $Cb_P \in \mathfrak{k}^* \simeq \mathbb{R}^{m-n}$ является регулярным значением для соответствующего отображения моментов (9), а множество уровня $\mu_P^{-1}(Cb_P)$ есть момент-угол многообразие $\mathcal{Z}_P$.*

□ Это вытекает из явной формулы (15) для отображения моментов, задания многообразия $\mathcal{Z}_P$ системой (13) и теоремы (2.19). □

2.4.3 Торические многообразия и симплектическая редукция

Теперь мы предположим дополнительно, что нормальный веер Σ_P, задаваемый целочисленным простым многогранником P (3), является неособым. Тогда группа K, определяемая из (6), является $(m-n)$-мерным тором, и мы можем рассмотреть многообразия $\mu^{-1}(Cb_P)/K$, получаемые в результате симплектической редукции действия K на $\mathbb{C}^m$.

Теорема 2.27. *Вложение $\mu^{-1}(Cb_P) \subset U(\Sigma_P)$ индуцирует диффеоморфизм*

$$\mu^{-1}(Cb_P)/K \to U(\Sigma_P)/G = V_P.$$

Тем самым всякое неособое проективное торическое многообразие V_P получается как симплектическая редукция действия тора $K \simeq \mathbb{T}^{m-n}$ на $\mathbb{C}^m$.

□ Мы лишь наметим основные шаги доказательства; детали можно найти в [2].

Непосредственно проверяется, что $\mu_P^{-1}(Cb_P) \subset U(\Sigma_P)$. По аналогии с предложением (2.13) доказывается, что действие K на $\mathcal{Z}_P = \mu_P^{-1}(Cb_P)$ свободно. Теперь рассмотрим функцию

$$f\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}, \qquad f(z) = ||\mu_P(z) - Cb_P||^2.$$

Эта функция неотрицательна и принимает минимальное значение на множестве $\mathcal{Z}_P$. Можно доказать, что единственными критическими точками функции f в $U(\Sigma_P)$ являются $z \in \mathcal{Z}_P$. Таким образом, для любого $z \in U(\Sigma_P)$ траектория градиентного потока функции f, выходящая из z, достигнет точки из $\mathcal{Z}_P$. Далее, можно показать, что каждая траектория градиентного потока функции f целиком лежит в одной орбите действия группы G. Отсюда и из предыдущего утверждения вытекает, что каждая орбита действия G на $U(\Sigma_P)$ пересекает многообразие $\mathcal{Z}_P$. Наконец, каждая G-орбита пересекает $\mathcal{Z}_P$ по единственной K-орбите, т.е. если $z \in \mathcal{Z}_P$, то

$$(G \cdot z) \cap \mathcal{Z}_P = K \cdot z.$$

Это завершает доказательство теоремы. □

Многообразие $\mu^{-1}(Cb_P)/K$ как результат симплектической редукции, наделяется симплектической структурой. В то же время, неособое проективное торическое многообразие V_P также является симплектическим (симплектическая форма индуцируется вложением в проективное пространство, задаваемым многогранником P). Можно показать [13], что диффеоморфизм из теоремы (2.27) сохраняет симплектическую форму.

Пример 2.28. Пусть $P = \Delta^n$ – *стандартный симплекс*. Конусы соответствующего нормального веера Σ_P порождаются собственными подмножествами множества векторов $\{e_1, \ldots, e_n, -e_1 - \ldots - e_n\}$. Группы $G \simeq \mathbb{C}^\times$ и $K \simeq \mathbb{S}^1$ суть диагональные подгруппы в $(\mathbb{C}^\times)^{n+1}$ и $\mathbb{T}^{n+1}$ соответственно, а $U(\Sigma_P) = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Матрица C (2.4.2) есть строка из $n+1$ единицы. Отображение моментов (9) задается как $\mu_P(z_1, \ldots, z_{n+1}) = |z_1|^2 + \ldots + |z_{n+1}|^2$. Так как $Cb_P = 1$, момент-угол многообразие $\mathcal{Z}_P = \mu_P^{-1}(1)$ есть единичная сфера $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, а $\mathbb{S}^{2n+1}/K \simeq (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/G = V_P$ – комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$.

2.5 Пространство орбит действия компактного тора

В алгебраическом торе $T_{\mathbb{C}}$, действующем на торическом многообразии V_Σ, содержится компактный тор T. В этом разделе мы более внимательно изучим именно действие компактного тора; полученные результаты будут играть мотивирующую роль для конструкций из следующей главы.

Прежде всего заметим, что пространство орбит V_P/T действия тора на неособом проективном торическом многообразии V_P отождествляется с простым многогранником P. Это легко вытекает из конструкции симплектической редукции. Действительно, действие $\mathbb{T}^m$ на $\mathcal{Z}_P = \mu^{-1}(Cb_P)$ индуцирует гамильтоново действие $T = \mathbb{T}^m/K$ на $V_P = \mathcal{Z}_P/K$. Образ соответствующего отображения моментов $V_P \to \mathfrak{k}^*$ можно отождествить с образом многообразия $\mathcal{Z}_P \subset \mathbb{C}^m$ при отображении моментов $\mu\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^m$, т.е. с образом многогранника P при вложении i_P (см. (10)). В следующей конструкции мы даем чисто топологическую интерпретацию этого наблюдения. В отличие от метода симплектической редукции, который применим лишь в случае проективных торических многообразий, следующая конструкция может быть легко обобщена на непроективный случай.

Конструкция 2.29. Рассмотрим координатные подгруппы-окружности в $\mathbb{T}^m$:

$$T_i = \{(t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{T}^m : t_j = 1 \text{ при } j \neq i\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Далее, для каждого подмножества $\omega \subset [m]$ определим координатную подгруппу

$$T_\omega = \{(t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{T}^m : t_j = 1 \text{ при } j \neq \omega\} = \prod_{i \in \omega} T_i \subset \mathbb{T}^m$$

(в частности, $T_\emptyset$ – это тривиальная подгруппа $\{1\}$).

Введем полярные координаты (r, φ) в $\mathbb{C}$ и построим отображение $\mathbb{R}_\geqslant \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}, (r, \varphi) \mapsto re^{2\pi i\varphi}$. Взяв произведение, получим отображение

$$\mathbb{R}^m_\geqslant \times \mathbb{T}^m \to \mathbb{C}^m.$$

Прообраз точки $z \in \mathbb{C}^m$ при этом отображении имеет вид $y \times T_{\omega(z)}$, где $y_i = |z_i|$ для $1 \leqslant i \leqslant m$, а $\omega(z) \subset [m]$ – множество нулевых координат точки z. Таким образом, $\mathbb{C}^m$ отождествляется с факторпространством $\mathbb{R}^m_\geqslant \times \mathbb{T}^m / \sim$, где $(y, t_1) \sim (y, t_2)$ при $t_1^{-1} t_2 \in T_{\omega(y)}$.

Используя (10), мы можем получить аналогичное представление и для момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$. Для каждой точки p многогранника

P рассмотрим наименьшую грань $G(p)$, содержащую p. Рассмотрим множество

$$\psi(p) = \{i \in [m] : p \in F_i\},$$

тогда мы имеем $G(p) = \cap_{i\in\psi(p)} F_i$. Введем координатную подгруппу $T(p) = T_{\psi(p)}$. В частности, если p – вершина, то $T(p)$ имеет размерность n (максимально возможную), а если p – внутренняя точка многогранника, то $T(p) = \{1\}$. Тогда многообразие $\mathcal{Z}_P$ можно отождествить с факторпространством

$$P \times \mathbb{T}^m / \sim \tag{16}$$

по отношению эквивалентности $(p, t_1) \sim (p, t_2) \Longleftrightarrow t_1^{-1} t_2 \in T(p)$. Отсюда, в частности, вытекает, что топологический тип многообразия $\mathcal{Z}_P$ зависит лишь от комбинаторного типа многогранника P. Стационарными подгруппами действия $\mathbb{T}^m$ на $\mathcal{Z}_P$ будут в точности подгруппы вида $T(p)$.

Рассмотрим отображение $l\colon \mathbb{T}^m \to T$ из (6) и обозначим $S(p) = l(T(p)) \subset T$ для $p \in P$. Если p – вершина, то $S(p) = T$, а если p – внутренняя точка многогранника, то $S(p) = \{1\}$. Тогда торическое многообразие $V_P = \mathcal{Z}_P / K$ можно задать как факторпространство

$$P \times T / \simeq \tag{17}$$

по отношению эквивалентности $(p, t_1) \sim (p, t_2) \Longleftrightarrow t_1^{-1} t_2 \in S(p)$.

Слои проекции $\pi\colon V_P = P \times T/ \sim \longrightarrow P$ суть стационарные подгруппы T-действия. Предыдущая конструкция показывает, что это в точности подгруппы вида $S(p)$. Таким образом, T-действие на V_P свободно над внутренностью многогранника, вершины многогранника соответствуют неподвижным точкам, а точки из внутренности одной грани коразмерности k соответствуют орбитам, имеющим одну и ту же k- мерную стационарную подгруппу. Это свойство формализуется при помощи понятий *локально стандартного действия тора* и *многообразия с углами*, как описано ниже.

Определение 2.30. Рассмотрим стандартное (покоординатное) действие тора $\mathbb{T}^n$ на $\mathbb{C}^n$. Пусть M – многообразие размерности $2n$ с действием $\mathbb{T}^n$. *Стандартной картой* на многообразии M называется тройка (U, f, ψ), где $U \subset M$ – некоторое $\mathbb{T}^n$- инвариантное открытое подмножество, ψ – автоморфизм тора $\mathbb{T}^n$, а f – ψ-эквивариантный гомеоморфизм $f\colon U \to W$ на некоторое $\mathbb{T}^n$-инвариантное открытое подмножество $W \subset \mathbb{C}^n$. (Это означает, что $f(t \cdot y) = \psi(t) f(y)$ для всех $t \in \mathbb{T}^n, y \in U$.) Скажем, что действие тора $\mathbb{T}^n$ на M является *локально* *стандартным*, если M допускает стандартный атлас, т.е. каждая точка из M лежит в некоторой стандартной карте.

Пространством орбит стандартного действия тора является ортант $\mathbb{R}^n_{\geqslant}$ (а проекцию на пространство орбит можно задавать отображением моментов $\mu\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_{\geqslant}$, см. пример (2.16)). Таким образом, пространство орбит локально стандартного действия $\mathbb{T}^n$ на M локально выглядит как $\mathbb{R}^n_{\geqslant}$. Это свойство формализуется при помощи следующего определения.

Определение 2.31. Пусть Q – (сепарабельное, со счетной базой) топологическое пространство, представленное в виде объединения открытых подмножеств $\bigcup U_i$, для каждого из которых существует гомеоморфизм $\varphi_i\colon U_i \to W_i$ на некоторое открытое подмножество $W_i \subset \mathbb{R}^n_{\geqslant}$. В ортанте $\mathbb{R}^n_{\geqslant}$ имеется естественное понятие коразмерности точек: точка $y \in \mathbb{R}^n_{\geqslant}$ имеет коразмерность k, если в точности k ее координат обращаются в нуль. Пространство Q называется *многообразием с углами*, если все отображения $\varphi_i^{-1}\varphi_j$ являются гомеоморфизмами, сохраняющими коразмерность. Тем самым, понятие коразмерности переносится на точки Q. Связные компоненты множества точек коразмерности $\geqslant k$ называются *гранями* коразмерности k. Грани коразмерности 1 называются *гипергранями*.

Два многообразия с углами Q_1 и Q_2 *гомеоморфны* (как многообразия с углами), если существует гомеоморфизм $Q_1 \to Q_2$, сохраняющий коразмерность точек. Гомеоморфизм многообразий с углами индуцирует изоморфизм их частично упорядоченных множеств граней (по включению).

Понятие многообразия с углами можно определить и в гладкой категории: многообразие с углами Q называется *гладким*, если все отображения $\varphi_i^{-1}\varphi_j$ являются диффеоморфизмами (при этом отображение между открытыми подмножествами в $\mathbb{R}^n_{\geqslant}$ называется диффеоморфизмом, если оно является ограничением диффеоморфизма открытых подмножеств в $\mathbb{R}^n$).

Таким образом, пространство орбит $Q = M/\mathbb{T}^n$ локально стандартного действия тора является многообразием с углами (причем гладким, если действие гладкое).

Простейшими примерами многообразий с углами являются простые многогранники, как показывает следующая конструкция.

Конструкция 2.32. Пусть P – простой многогранник. Для каждой вершины $v \in P$ обозначим через U_v открытое подмножество в P, полученное удалением всех граней, не содержащих v. Подмножество U_v

гомеоморфно $\mathbb{R}^n_{\geqslant}$ с сохранением коразмерности точек (более того, оно аффинно изоморфно окрестности нуля в $\mathbb{R}^n_{\geqslant}$). Следовательно, P является многообразием с углами (причем гладким и компактным), с атласом $\{U_v\}$.

Легко видеть, что два простых многогранника гомеоморфны как многообразия с углами тогда и только тогда, когда они комбинаторно эквивалентны.

Конструкция 2.33. Пусть Σ – симплициальный веер и V_Σ – соответствующее торическое многообразие. Рассмотрим аффинное покрытие $\{V_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ (см. конструкцию (2.5)). Факторпространства V_σ/T по действию тора можно отождествить с множествами полугрупповых гомоморфизмов из S_σ в полугруппу неотрицательных вещественных чисел $\mathbb{R}_{\geqslant}$:

$$V_\sigma/T = (V_\sigma)_{\geqslant} := \mathrm{Hom}_{sg}(S_\sigma, \mathbb{R}_{\geqslant}), \quad \sigma \in \Sigma,$$

см. ([11], 4.1).

Если веер Σ является неособым, то мы имеем $V_\sigma \simeq \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^\times)^{n-k}$, где $k = \dim\sigma$, см. пример (2.6). Следовательно, T-действие на неособом торическом многообразии V_Σ является локально стандартным, а покрытие $\{V_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ задает атлас из стандартных карт. При этом $(V_\sigma)_{\geqslant} \simeq \mathbb{R}^k_{\geqslant} \times \mathbb{R}^{n-k}$ и покрытие $\{(V_\sigma)_{\geqslant} : \sigma \in \Sigma\}$ задает на пространстве орбит $Q = V_\Sigma/T$ структуру гладкого многообразия с углами. В общем случае некоторые из многообразий V_σ могут не быть изоморфны $\mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^\times)^{n-k}$ (см. пример (2.7)), и T-действие на V_Σ может не быть локально стандартным. Тем не менее, покрытие $\{(V_\sigma)_{\geqslant} : \sigma \in \Sigma\}$ по-прежнему задает на $Q = V_\Sigma/T$ структуру многообразия с углами (вообще говоря, не гладкого).

Если Σ является полным симплициальным веером, то разбиение многобразия с углами Q на грани двойственно по Пуанкаре триангуляции $(n-1)$-мерной сферы, задаваемой симплициальным комплексом K_Σ. При этом имеется проекция $Q \times T \to V_\Sigma$, которая устанавливает гомеоморфизм

$$V_\Sigma \simeq Q \times T/\sim, \tag{18}$$

по аналогии с (17), см. ([11], 4.1).

Если V_P – неособое проективное многобразие, то, как показывает анализ в начале этого раздела, пространство орбит V_P/T гомеоморфно (как многообразие с углами) многограннику P. Более того, если $\pi : V_P \to$

P – проекция на пространство орбит, то прообраз $\pi^{-1}(U_v) \subset V_P$ есть аффинное подмногообразие $V_{\sigma(v)}$, где $\sigma(v) \in \Sigma_P$ – конус размерности n в нормальном веере, соответствующий вершине v многогранника.

Если неособое компактное торическое многообразие V_Σ не является проективным, то может оказаться, что многообразие с углами $Q = V_\Sigma/T$ не гомеоморфно никакому простому многограннику (хотя это не так для непроективного многообразия из примера, приведенного в [11]). При этом Q гомеоморфно простому многограннику тогда и только тогда, когда K_Σ комбинаторно эквивалентно границе симплициального многогранника. Однако, начиная с $\dim K_\Sigma = 3$, имеются триангуляции сфер, которые не получаются из симплициальных многогранников (описание одного из таких примеров – *сферы Барнетта* – можно найти в [5], 2.39).

Конструкции этого раздела сведены в следующем утверждении.

Предложение 2.34. *1. Действие тора T на неособом торическом многообразии V является локально стандартным.*

Если при этом V является проективным многообразием, то пространство орбит V/T гомеоморфно (как многообразие с углами) простому многограннику P.

Эти свойства действия тора на торических многообразиях будут взяты за основу для различных топологических обобщений торических многообразий, которым посвящена следующая глава.

3 Квазиторические многообразия

В этой главе мы осуществляем переход от алгебраических построений торической геометрии к топологической теории действий тора на многообразиях. Основным объектом изучения здесь будет класс компактных $2n$-мерных многообразий с действием n-мерного тора T, обладающих свойствами, моделирующими действие комактного тора на неособых торических многообразиях.

3.1 Определение и конструкция квазиторических многообразий Дэвиса-Янушкиевича

В работе [9] Дэвис и Янушкиевич использовали топологические свойства действия тора на торическом многообразии для определения нового класса многообразий с действием тора. Эти многообразия, впоследствии названные *квазиторическими*, можно рассматривать как "топологические аналоги" неособых компактных торических многообразий.

Определение 3.1. Пусть P – комбинаторный простой многогранник размерности n. Условие простоты означает, что в каждой вершине сходится в точности n гиперграней, иными словами, все грани P находятся в общем положении. *Квазиторическим многообразием* над P называется $2n$-мерное многообразие M с действием топологического тора $\mathbb{T}^n$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1. действие тора локально слабо эквивариантно гомеоморфно стандартному действию $\mathbb{T}^n$ на $\mathbb{C}^n$.

2. пространство орбит гомеоморфно, как многообразие с углами, многограннику P.

Замечание 3.2. В предыдущем определении мы не требуем гладкости многообразия M. Однако, можно доказать, что любое квазиторическое многообразие обладает гладкой структурой, относительно которой действие тора является гладким (см [8]). В разделе 1.3 мы приведем другую конструкцию, снабжающую квазиторические многообразия канонической гладкой структурой.

Таким образом, определена проекция $\pi : M \to P$, которая постоянна на орбитах действия тора $\mathbb{T}^n$ и отображает каждую k-мерную орбиту в точку из внутренности некоторой k-мерной грани, $k = 0, \ldots, n$. В частности, действие свободно над внутренностью многогранника, в то время как вершины соответствуют неподвижным точкам действия тора на M.

Предложение 3.3. *Неособое проективное торическое многообразие V_P является квазиторическим многообразием над P.*

$\square$ Это вытекает из предложения (2.34) $\square$

Пример 3.4. Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ с действием $\mathbb{T}^n$, заданным в примере (2.4), является квазиторическим многообразием над симплексом Δ^n. Проекция $\mathbb{C}P^n \to \Delta^n$ задается отображением

$$(z_0 : z_1 : \ldots : z_n) \to \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} |z_i|^2}(|z_1|^2, \ldots, |z_n|^2).$$

Пусть $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_m\}$ – множество гиперграней многогранника P. Рассмотрим прообразы

$$M_j = \pi^{-1}(F_j), \qquad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Точки внутренности гиперграни F_j соответствуют орбитам, имеющим одну и ту же одномерную стационарную подгруппу, которую мы обозначим за T_{F_j}. Это, в свою очередь, влечет тот факт, что M_j является $\mathbb{T}^n$-инвариантным подмногообразием коразмерности 2 в M, и M_j является квазиторическим многообразием над F_j (с действием тора $\mathbb{T}^n/T_{F_j} \simeq T^{n-1}$). Следуя [9], мы будем называть M_j *характеристическим подмногообразием*, а соответствие

$$\lambda : F_j \to T_{F_j}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{19}$$

– *характеристической функцией* квазиторического многобразия M.

Рассмотрим некоторую грань G коразмерности k многогранника P и запишем ее как пересечение k гиперграней: $G = F_{j_1} \cap \ldots \cap F_{j_k}$. Тогда $M_G = \pi^{-1}(G)$ является $\mathbb{T}^n$-инвариантным подмногообразием коразмерности $2k$ в M, неподвижным относительно действия каждой из подгрупп $T(F_{j_i})$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Рассмотрев произвольную вершину $v \in G$ и воспользовавшись локальной стандартностью $\mathbb{T}^n$-действия на M вблизи v, мы видим, что характеристические многообразия $M_{j_1}, \ldots, M_{j_k}$ пересекаются трансверсально по подмнообразию M_G, а отображение

$$T_{F_{j_1}} \times \ldots \times T_{F_{j_k}} \to \mathbb{T}^n$$

является мономорфизмом на k-мерную стационарную подгруппу многообразия M_G. Соответствие

$$G \to \{\text{стационарная подгруппа подмногообразия } M_G\}$$

продолжает характеристическое отображение (19) до отображения из частично упорядоченного множества граней многогранника P в множество торических подгрупп в $\mathbb{T}^n$.

Определение 3.5. Пусть P – комбинаторный n-мерный простой многогранник и λ – некоторое отображение из множества его гиперграней в множество замкнутых одномерных подгрупп тора $\mathbb{T}^n$. Тогда (P, λ) называется *характеристической парой*, если отображение $\lambda(F_{j_1}) \times \ldots \times \lambda(F_{j_k}) \to \mathbb{T}^n$ является мономорфизмом при $F_{j_1} \cap \ldots \cap F_{j_k} \neq \emptyset$.

Если (P, λ) является характеристической парой, то отображение λ продолжается на все грани многогранника P, так что мы имеем торическую подгруппу $T_G := \lambda(G) \subset \mathbb{T}^n$ для каждой грани $G \subset P$.

По аналогии с конструкцией (2.29), квазиторическое многообразие можно восстановить по характеристической паре (P, λ).

Конструкция 3.6. (Каноническая модель $M(P, \lambda)$). Пусть задана характеристическая пара (P, λ). Для каждой точки $p \in P$ мы обозначаем через $G(p)$ наименьшую грань, содержащую p. Положим

$$M(P, \lambda) = P \times \mathbb{T}^n / (\equiv),$$

где $(p_1, t_1) \equiv (p_2, t_2)$, если $p_1 = p_2$ и $t_1 t_2^{-1} \in \lambda(G(p))$. Свободное действие тора $\mathbb{T}^n$ на $P \times \mathbb{T}^n$ индуцирует действие на фактор-пространстве $P \times T^n / \simeq$. Это действие свободно над внутренностью многогранника (так как там не происходит отождествления точек) и имеет по одной неподвижной точке для каждой вершины. Пространство $P \times \mathbb{T}^n / (\equiv)$ покрывается открытыми множествами $U_v \times \mathbb{T}^n / (\equiv)$ (см. конструкцию (2.32)), эквивариантно гомеоморфными $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0} \times \mathbb{T}^n / (\equiv) = \mathbb{C}^n$. Таким образом, действие тора локально стандартно, и $P \times \mathbb{T}^n$ является квазиторическим многообразием.

Определение 3.7. (эквивалентность). Квазиторические многообразия M_1 и M_2 называются *слабо $\mathbb{T}^n$-эквивариантно гомеоморфными* (или просто *слабо $\mathbb{T}^n$-гомеоморфными*), если существует автоморфизм $\psi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ и гомеоморфизм $f \colon M_1 \to M_2$, такие, что $f(t \cdot x) = \psi(t) \cdot f(x)$ для любых $t \in \mathbb{T}^n$ т $x \in M_1$. Если ψ – тождественный автоморфизм, то M_1 и M_2 называются $\mathbb{T}^n$-гомеоморфными. Следуя Дэвису и Янушкиевичу, мы скажем, что квазиторические многобразия M_1 и M_2 над одним и тем же многогранником P *эквивалентны*, если существует слабый $\mathbb{T}^n$-гомеоморфизм $f : M_1 \to M_2$, накрывающий тождественное отображение многогранника P.

Две характеристические пары (P, λ_1) и (P, λ_2) (с одним и тем же многогранником P) называются *эквивалентными*, если существует автоморфизм $\psi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ такой, что $\lambda_2 = \psi \cdot \lambda_1$.

Предложение 3.8. *([9], Prop. 1.8). Конструкция (3.6) определяет взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных квазиторических многообразий и характеристических пар.*

☐ В одну сторону утверждение очевидно: если квазиторические многообразия эквивалентны, то соответствующие характеристические пары также эквивалентны. Для того, чтобы доказать обратное утверждение, достаточно показать, что любое квазиторическое многообразие M над P с характеристической функцией λ эквивалентно канонической модели $M(P,\lambda)$. Для этого вначале строится непрерывное отображение $f\colon P\times\mathbb{T}^n \to M$, отображающее $p\times\mathbb{T}^n$ на $\pi^{-1}(p)$ для каждой точки $p \in P$. Это делается путем последовательного "раздутия особых стратов". Тот факт, что P есть стягиваемое множество, гарантирует, что получаемое в конце главное $\mathbb{T}^n$-расслоение над P тривиально. Отображение f идуцирует эквивалентность

$$P \times \mathbb{T}^n/(\equiv) = M(P,\lambda) \to M$$

Детали можно восстановить по [9]. □

Замечание 3.9. Из этого наброска доказательства вытекает, что единственным существенным условием на пространство орбит Q, обеспечивающим эквивалентность канонической модели, является то, что главное $\mathbb{T}^n$-расслоение над Q, получаемое после всех раздутий, тривиально. Это во всяком случае верно, если $H^2(Q,\mathbb{Z}) = 0$, так что предыдущее предложение допускает обобщения и на более общие действия тора.

3.2 Полиориентации и комбинаторные квазиторические данные

Здесь мы завершаем комбинаторное описание квазиторических многообразий M. Характеристические пары (P,λ) заменяются на более естественно задаваемые **комбинаторные квазиторические пары** (P,Λ), состоящие из ориентированного простого многогранника и целочисленной матрицы специального вида. По сравнению с характеристической парой, пара (P,Λ) несет некоторую дополнительную информацию, которая эквивалентна выбору ориентации для многообразия M и всех его характеристических подмногообразий. Получаемое взаимно однозначное соответствие между комбинаторными квазиторическими парами и классами эквивалентных полиориентированных квазиторических многообразий уточняет результат предложения (3.8).

Определение 3.10. Скажем, что квазиторическое многообразие M *полиориентировано*, если выбрана ориентация для M и каждого из его характеристических подмногообразий M_j, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Стационарную подгруппу T_{F_j} характеристического подмногообразия $M_j \subset M$ можно записать в виде

$$T_{F_j} = \Big(\big(e^{2\pi i \lambda_{1j} \varphi}, \ldots, e^{2\pi i \lambda_{nj} \varphi} \big) \in \mathbb{T}^n \Big), \tag{20}$$

где $\phi \in \mathbb{R}$ и $\lambda_j = (\lambda_{1j}, \ldots, \lambda_{nj})^t \in \mathbb{Z}^n$ – некоторый примитивный вектор. Этот вектор определяется подгруппой T_{F_j} лишь с точностью до знака. Выбор знака (и тем самым однозначный выбор вектора) задает параметризацию одномерной подгруппы T_{F_j}.

Полиориентация квазиторического многообразия предоставляет канонический способ выбора векторов λ_j, $1 \leqslant j \leqslant m$. В самом деле, действие параметризованной подгруппы $T_{M_j} \subset \mathbb{T}^n$ задает ориентацию в нормальном расслоении ν_j вложения $M_j \subset M$. Полиориентация многообразия M также задает ориентацию в ν_j при помощи следующего разложения касательного расслоения:

$$\tau(M)|_{M_j} = \tau(M_j) \oplus \nu_j.$$

Теперь мы выберем направление примитивного вектора λ_j таким образом, чтобы эти две ориентации совпадали.

Вообще говоря, выбор полиориентации на M не является каноническим. Тем не менее, если M допускает $\mathbb{T}^n$-инвариантную почти комплексную структуру, то выбор такой структуры дает канонический способ ориентации M и подмногообразий M_j для $1 \leqslant j \leqslant m$. Тем самым мы получаем полиориентацию, *ассоциированную* с инвариантной почти комплексной структурой. Позднее мы приведем явный критерий существования инвариантной почти комплексной структуры на квазиторическом многообразии. Пока же отметим, что в случае, когда M является инвариантно почти комплексным (например, если M – неособое компактное торическое многообразие), мы всегда будем его снабжать ассоциированной полиориентацией. В других случаях мы будем фиксировать ориентацию произвольно.

Задав полиориентацию, мы можем продолжить соответствие (19) до отображения целочисленных решеток

$$\lambda : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n, \qquad e_j \to \lambda_j,$$

которое мы будем называть *направленной* характеристической функцией. При наличии полиориентации мы будем предполагать характеристическую функцию направленной. При этом, если пересечение гиперграней $F_{j_1}, \ldots, F_{j_k}$ непусто, то векторы $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_k}$ составляют часть целочисленного базиса в $\mathbb{Z}^n$.

Введем целочисленную матрицу Λ размера $n \times m$, в которой j-й столбец составляют координаты вектора λ_j, $1 \leqslant j \leqslant m$. Каждую вершину $v \in P$ можно записать как пересечение n гиперграней: $v = F_{j_1} \cap \ldots \cap F_{j_n}$. Рассмотрим максимальный минор $\Lambda_v = \Lambda_{j_1,\ldots,j_n}$ матрицы Λ, образованный столбцами с номерами $j_1, \ldots, j_n$. Тогда

$$\det \Lambda_v = \pm 1. \tag{21}$$

Пусть $\mathrm{chf}(P)$ обозначает множество (направленных) характеристических функций λ для P. Это множество можно отождествить с множеством целочисленных $n \times m$-матриц Λ, удовлетворяющих условию (21) для любой вершины $v \in P$ (мы будем называть такие матрицы *характеристическими*). Группа $GL(n, \mathbb{Z})$ автоморфизмов решетки $\mathbb{Z}^n$ действует слева на множестве $\mathrm{chf}(P)$ (автоморфизм $g : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ действует при помощи композиции $\lambda \to g \cdot \lambda$). Так как автоморфизмы решетки соответствуют автоморфизмам тора $\mathbb{T}^n$, из предложения (3.8) вытекает наличие взаимно однозначного сответствия

$$GL(n, \mathbb{Z}) \setminus \mathrm{chf}(P) \longleftrightarrow \big(\text{классы эквивалентности M над P}\big). \tag{22}$$

Далее мы будем предполагать, что гиперграни упорядочены таким образом, что первые n гиперграней содержат общую вершину v_*, называемую *начальной*:

$$F_1 \cap \ldots \cap F_n = v_*.$$

Тогда в каждом классе сопряженных элементов $GL(n, \mathbb{Z}) \setminus \mathrm{chf}(P)$ из (22) содержится единственная направленная характеристическая функция, задаваемая матрицей Λ вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_{1,n+1} & \ldots & \lambda_{1,m} & \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \lambda_{2,n+1} & \ldots & \lambda_{2,m} & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda_{n,n+1} & \ldots & \lambda_{n,m} & \end{pmatrix}$$

В сокращенной записи, $\Lambda = (E \mid \Lambda_*)$, где E – единичная матрица, а Λ_* – матрица размера $n \times (m - n)$. Мы будем называть (3.2) *приведенной формой характеристической матрицы* Λ, а подматрицу Λ_* – *приведенной подматрицей*. Если же характеристическая матрица задана в неприведенном виде $\Lambda = (A \mid B)$, где A имеет размер $n \times n$, а B – размер $n \times (m - n)$, то приведенный представитель в ее классе сопряженных элементов задается матрицей $(E \mid A^{-1}B)$.

Определение 3.11. Пусть P – ориентированный комбинаторный n-мерный простой многогранник с m гипергранями, которые занумерованы таким образом, что первые n из них содержат общую вершину, а Λ – целочисленная $(n \times m)$-матрица вида (3.2), удовлетворяющая условию (21) для любой вершины $v \in P$. Тогда (P, Λ) называется *комбинаторной квазиторической парой.*

Предложение 3.12. *Имеется взаимно однозначное соответствие между комбинаторными квазиторическими парами и классами эквивалентности полиориентированных квазиторических многообразий.*

□ Прежде всего заметим, что эквивалентность квазиторических многобразий M_1 и M_2 сохраняет ориентацию тогда и только тогда, когда сохраняет ориентацию автоморфизм тора, устанавливающий эквивалентность между соответствующими характеристическими парами (P, λ_1) и (P, λ_2) (см. предложение (3.8)).

Сопоставим комбинаторную квазиторическую пару полиориентированному квазиторическому многообразию M над P. Пусть (P, λ) – соответствующая характеристическая пара. Снабдим каноническую модель $M(P, \lambda)$ ориентацией при помощи гомеоморфизма $M(P, \lambda) \to M$ из предложения (3.8). Так как $M(P, \lambda) = P \times \mathbb{T}^n / \simeq$, а над внутренностью $Int\, P$ многогранника отождествлений не производится, мы имеем разложение

$$\tau_{p,t}(M(P, \lambda)) \cong \tau_p(P) \oplus \tau_t(\mathbb{T}^n) \tag{23}$$

касательного пространства в точке $(p, t) \in M(P, \lambda)$, где $p \in Int\, P$ и $t \in \mathbb{T}^n$. Теперь ориентация многогранника P задается при помощи следующего условия: $(\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n)$ является положительным базисом в пространстве $\tau_{p,t}(M(P, \lambda))$, если $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ являются положительными базисами в $\tau_p(P)$ и $\tau_t(\mathbb{T}^n)$ соответственно. (Эта процедура аналогична заданию ориентации в $\mathbb{C}^n$ при помощи базиса $(e_1, ie_1, \ldots, e_n, ie_n)$.) Итак, ориентация многообразия M задает ориентацию многогранника P. Как мы видели выше, полиориентация M позволяет сопоставить характеристической функции λ целочисленную $(n \times m)$-матрицу Λ. Изменяя, если необходимо, нумерацию гиперграней, мы можем добиться того, что векторы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ образовывали положительно ориентированный базис. Таким образом, $\Lambda = (A \mid B)$, где $\det A = 1$. Тогда $(P, (E \mid A^{-1}B))$ – комбинаторная квазиторическая пара.

Обратно, комбинаторная квазиторическая пара (P, Λ) задает характеристическую пару (P, λ) и квазиторическое многобразие $M =$

$M(P,\lambda)$. Ориентация многогранника P задает ориентацию на M при помощи разложения (23) Далее, для каждого характеристического подмногообразия $M_j \subset M$ вектор λ_j (j-й столбец матрицы Λ) задает ориентацию нормального расслоения ν_j вложения $M_j \subset M$. Ориентации на M и ν_j задают ориентацию характеристического подмногообразия M_j, для $1 \leqslant j \leqslant m$. Итак, пара (P,Λ) определяет полиориентированное квазиторическое многообразие.

Для завершения доказательства надо проверить, что эквивалентным полиориентированным квазиторическим многообразиям M_1 и M_2 над P соответствует одна и та же пара (P,Λ). Действительно, характеристические матрицы Λ_1 и Λ_2, соответствующие M_1 и M_2, связаны соотношением $\Lambda_1 = C\Lambda_2$, где C – матрица сохраняющего ориентацию автоморфизма тора, т.е. $\det C = 1$. Отсюда вытекает, что матрицы Λ_1 и Λ_2 лежат в одном классе сопряженных элементов (22), а их приведенные представители совпадают. $\square$

Далее мы будем обозначать полиориентированное квазиторическое многообразие, соответствующее паре (P,Λ), через $M(P,\Lambda)$.

3.3 Канонические гладкости и стабильно комплексные структуры

Здесь мы дадим явную геометрическую конструкцию канонической модели $M(P,\Lambda)$ квазиторического многообразия как фактор-пространства момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$ по свободному действию тора. Эта конструкция может рассматриваться как обобщение конструкции проективных торических многообразий методом симплектической редукции (см. раздел (2.4.1)). Ее достоинством по сравнению с изначальной конструкцией (3.6) Дэвиса-Янушкиевича является геометричность; благодаря этому мы построим явные канонические инвариантные гладкие структуры на квазиторических многообразиях, а далее опишем инвариантные стабильно комплексные структуры. Полученные описания могут быть использованы для нахождения квазиторических представителей в классах комплексных кобордизмов.

Определение 3.13. *Стабильно комплексная структура* на многообразии M – это изоморфизм вещественных расслоений $c_\tau : \tau(M) \oplus \mathbb{R}^l \simeq \eta$, где на η имеется также и структура комплексного векторного расслоения. Если $l = 0$, говорят, что на M задана *почти комплексная структура.*

Определение 3.14. Предположим, что на M задано гладкое действие α топологической группы G. Стабильно комплексная структура c_τ называется *инвариантной*, если композиция отображений

$$\eta \xrightarrow{c_\tau^{-1}} \tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2m-2n} \xrightarrow{d\alpha(t)\oplus I} \tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2m-2n} \xrightarrow{c_\tau} \eta$$

является комплексно-линейной для любого $t \in G$.

Пусть задана комбинаторная квазиторическая пара (P, Λ). Матрица Λ задает эпиморфизм торов $\mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^n$, ядро которого мы обозначим за $K = K(\Lambda)$. Эта подгруппа изоморфна $\mathbb{T}^{m-n}$ в силу условия (21). Кроме того, рассмотрим момент-угол многообразие $\mathcal{Z}_P$, определяемое многогранником P (см. раздел (2.17)).

Предложение 3.15. *Подгруппа $K(\Lambda)$ действует на $\mathcal{Z}_P$ свободно. Имеется $\mathbb{T}^n$-эквивариантный гомеоморфизм*

$$\mathcal{Z}_P/K(\Lambda) \xrightarrow{\cong} M(P, \Lambda)$$

между фактор-многообразием $\mathcal{Z}_p/K(\Lambda)$ и каноническим квазиторическим многообразием $M(P, \Lambda)$.

□ Стационарные подгруппы действия тора $\mathbb{T}^m$ на $\mathcal{Z}_P$ имеют вид $T(p), p \in P$ (см. конструкцию (2.29)). Из (21) вытекает, что ограничение гомоморфизма $\mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^n$ на подгруппу вида $T(p)$ инъективно, а значит ядро $K(\Lambda)$ пересекается с каждой подгруппой $T(p)$ лишь по единице. Следовательно, $K(\Lambda)$ свободно действует на $\mathcal{Z}_P$, а фактор-пространство $\mathcal{Z}_P/K(\Lambda)$ является $2n$-мерным многообразием с действием тора $\mathbb{T}^n = \mathbb{T}^m/K(\Lambda)$.

Для доказательства второго утверждения отождествим $\mathcal{Z}_P$ с $P \times \mathbb{T}^m$, см. (16). Тогда проекция $\mathcal{Z}_P \to \mathcal{Z}_P/K(\Lambda)$ отождествляется с проекцией

$$\mathcal{Z}_P = P \times \mathbb{T}^m/\sim \to P \times \mathbb{T}^n/\sim$$

индуцированной отображением $\mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^n$. По определению (см. конструкцию (3.6)), пространство $P \times \mathbb{T}^n/\sim$ есть каноническая модель квазиторического многообразия. □

Из предложений (2.24) и (3.15) вытекает, что на $M(P, \Lambda) = \mathcal{Z}_P/K(\Lambda)$ имеется гладкая структура, относительно которой действие $\mathbb{T}^n$ является гладким. Мы будем называть эту гладкую структуру *канонической.* При этом, в отличие от момент-угол многообразий, вопрос о единственности инвариантной гладкой структуры на квазиторических многообразиях открыт.

Рассмотрим теперь подмногообразия $p^{-1}(F_i) \subset \mathcal{Z}_P$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Подмногообразие $p^{-1}(F_i)$ неподвижно относительно действия i-ой координатной подгруппы в торе $\mathbb{T}^m$. Обозначим через $\mathbb{C}_i$ пространство 1-мерного комплексного представления в $\mathbb{C}^m$ при помощи проекции $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}_i$ на i-й сомножитель. Рассмотрим комплексное 1-мерное $\mathbb{T}^m$-расслоение $\mathcal{Z}_P \times \mathbb{C}_i$ с диагональным действием тора $\mathbb{T}^m$ (это расслоение тривиально как расслоение без действия). Тогда ограничение расслоения $\mathcal{Z}_P \times \mathbb{C}_i$ на инвариантное подмногообразие $p^{-1}(F_i)$ изоморфно нормальному расслоению вложения $p^{-1}(F_i) \subset \mathcal{Z}_P$. Профакторизовав по диагональному действию подгруппы $K = K(\Lambda)$, мы получим 1-мерное комплексное $\mathbb{T}^n$-расслоение

$$\rho_i \colon \mathcal{Z}_P \times_K \mathbb{C}_i \to \mathcal{Z}_P/K = M(P, \Lambda) \tag{24}$$

над квазиторическим многообразием $M = M(P, \Lambda)$. Ограничение расслоения ρ_i на $p^{-1}(F_i)/K = M_i$ изоморфно нормальному расслоению к характеристическому подмногообразию $M_i \subset M$. Задаваемая таким образом комплексная структура в этом нормальному расслоении есть в точности структура, определяемая полиориентацией многообразия $M(P, \Lambda)$.

Теорема 3.16. *([9], Th. 6.6). Имеет место изоморфизм вещественных $\mathbb{T}^n$-расслоений над $M = M(P, \Lambda)$:*

$$\tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2m-2n} \cong \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_m,$$

где $\mathbb{R}^{2m-2n}$ – тривиальное $2(m-n)$-мерное $\mathbb{T}^n$-расслоение над M.

☐ Мы имеем $\mathbb{T}^m$-инвариантное разложение

$$\tau(\mathcal{Z}_P) \oplus \nu(i_Z) = \mathcal{Z}_P \times \mathbb{C}^m, \tag{25}$$

получаемое ограничением касательного расслоения $\tau(\mathbb{C}^m)$ на $\mathcal{Z}_P$. При этом нормальное расслоение $\nu(i_Z)$ тривиально как $\mathbb{T}^m$-расслоение, а $\mathcal{Z}_P \times \mathbb{C}^m$ изоморфно, как $\mathbb{T}^m$-расслоение, сумме расслоений $\mathcal{Z}_P \times \mathbb{C}_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Далее, мы имеем

$$\tau(\mathcal{Z}_P) = q^*\tau(M) \oplus \xi, \tag{26}$$

где ξ – касательное расслоение вдоль слоев главного K-расслоения $q\colon \mathcal{Z}_P \to \mathcal{Z}_P/K = M$ ([22], Cor. 6.2). Расслоение ξ индуцируется проекцией q из векторного расслоения над M, ассоциированного с главным расслоением $\mathcal{Z}_P \to M$ при помощи присоединенного представления группы Ли K; так как K абелева, это расслоение тривиально. Факторизуя (25) по действию K и используя (26), мы получаем разложение

$$\tau(M) \oplus (\xi/K) \oplus (\nu(i_Z)/K) \cong \mathcal{Z}_P \times_K \mathbb{C}^m. \tag{27}$$

Согласно вышесказанному, мы имеем $(\xi/K) \oplus (\nu(i_Z)/K) \cong \mathbb{R}^{2m-2n}$ и $\mathcal{Z}_P \times_K \mathbb{C}^m \cong \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_m$ как $\mathbb{T}^n$-расслоения. □

Изоморфизм расслоений из теоремы (3.16) позволяет ввести на полиориентированном квазиторическом многообразии каноническую стабильно комплексную структуру, согласованную с действием тора. Как будет показано позднее, эта структура стабильно эквивалентна любой из инвариантных почти комплексных структур на квазиторическом многообразии, индуцирующих ту же полиориентацию.

Следствие 3.17. *На полиориентированном квазиторическом многообразии M имеется каноническая $\mathbb{T}^n$-инвариантная стабильно комплексная структура c_τ, задаваемая изоморфизмом из теоремы (3.16), и определен соответствующий класс комплексных бордизмов $[M] \in \Omega^U_{2n}$.*

3.4 Веса и знаки неподвижных точек действия тора

Каждая неподвижная точка v действия тора на квазиторическом многообразии M может быть получена как пересечение $M_{j_1} \cap \ldots \cap M_{j_n}$ некоторых n характеристических подмногообразий и соответствует вершине многогранника P. Таким образом, касательное пространство к M в v раскладывается в сумму нормальных пространств к M_{j_k} для $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\tau_v(M) = (\rho_{j_1} \oplus \ldots \oplus \rho_{j_n}|_v). \tag{28}$$

Мы используем это разложение для отождествления $\tau(M)_v$ с $\mathbb{C}^n$; тогда в соответствующих координатах $(z_1, \ldots, z_n)$ касательное пространство к M_{j_k} задается уравнением $z_k = 0$. Представление тора $\mathbb{T}^n$ в касательном пространстве $\tau(M)_v \cong \mathbb{C}^n$ задается набором *весов* $w_k(v) \in \mathbb{Z}^n$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда для $t = (e^{2\pi i\varphi_1}, \ldots, e^{2\pi i\varphi_n})$ (см. (4)) и $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \tau(M)_v$ мы имеем

$$t \cdot z = (e^{2\pi i (w_1(v), \varphi)} z_1, \ldots, e^{2\pi i (w_n(v), \varphi)} z_n),$$

где $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Веса определяются из комбинаторной квазиторической пары (P, Λ) при помощи следующего утвеждения.

Предложение 3.18. *Веса $w_1(v), \ldots, w_n(v)$ представления тора $\mathbb{T}^n$ в касательном пространстве $\tau(M)_v$ в неподвижной точке $v = M_{j_1} \cap \ldots \cap M_{j_n}$ являются столбцами квадратной матрицы W_v, удовлетворяющей условию*

$$W_v^t \Lambda_v = E$$

Другими словами, $\{w_1(v), \ldots, w_n(v)\}$ является базисом решетки $\mathbb{Z}^n$, сопряженным к базису $\{\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_n}\}$.

□ Вначале заметим, что из локальной стандартности действия тора вытекает, что $\{w_1(v), \ldots, w_n(v)\}$ – базис решетки $\mathbb{Z}^n$. (Тот факт, что $\{\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_n}\}$ – также базис, вытекает из соотношения (21)).

Так как однопараметрическая подгруппа $T(F_{j_k}) \subset \mathbb{T}^n$ (20) должна оставлять гиперплоскость $z_k = 0$, касательную к M_{j_k}, неподвижной, мы получаем $(w_i(v), \lambda_{j_k}) = 0$ при $i \neq k$. Следовательно, $W_v^t \Lambda_v$ – диагональная матрица. Тогда из того, что столбцы матриц W_v и Λ_v являются базисами решетки, вытекает, что $(w_k(v), \lambda_{j_k}) = \pm 1$ при $1 \leqslant k \leqslant n$.

С другой стороны, так как действие однопараметрической подгруппы в $\mathbb{T}^n$, определяемой вектором λ_{j_k}, задает ту же ориентацию, что и комплексная структура в расслоении ρ_{j_k}, мы получаем $(w_k(v), \lambda_{j_k}) = \pm 1$ при $1 \leqslant k \leqslant n$. □

Знаки неподвижных точек действия $\mathbb{T}^n$ на M, определяемые инвариантной стабильно комплексной структурой, также можно вычислить в терминах комбинаторной квазиторической пары (P, Λ).

Лемма 3.19. *Пусть $v = M_{j_1} \cap \ldots \cap M_{j_n}$ – неподвижная точка.*

1. *Мы имеем $\sigma(v) = 1$, если в (28) ориентация пространства $\tau(M)_v$, определяемая ориентацией M, совпадает с ориентацией пространства $\rho_{j_1} \oplus \ldots \oplus \rho_{j_n}|_v$, определяемой ориентациями расслоений ρ_{j_k}, $1 \leqslant k \leqslant n$. В противном случае, $\sigma(v) = -1$.*

2. *В терминах комбинаторной пары (P, Λ) мы имеем*

$$\sigma(v) = \operatorname{sign}(\det(\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_n}) \det(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}))$$

□ Для доказательства первого утверждения заметим, что комплексное 1-мерное $\mathbb{T}^n$-расслоение ρ_i тривиально над дополнением к M_i в M. Следовательно, нетривиальная часть пространства $\mathbb{T}^n$-представления $(\rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_m)|_v$ есть в точности $(\rho_{j_1} \oplus \ldots \oplus \rho_{j_n})|_v$. Отсюда вытекает, что композиция отображений из определения (3.13) в нашем случае есть в точности

$$\tau(M)_v \to (\rho_{j_1} \oplus \ldots \oplus_{j_n})|_v \tag{29}$$

Для доказательства второго утверждения мы запишем отображение (29) в координатах. Здесь нам будет удобнее отождествить $\mathbb{C}^m$ с $\mathbb{R}^{2m}$, сопоставив точке $(z_1, \ldots, z_m)$ точку $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m)$, где $z_k = x_k + iy_k$, $1 \le k \le m$ (это соглашение отличается от использованного ранее). В этих координатах отображение

$$\tau(M)_v \to \tau(M)_v \oplus \mathbb{R}^{2m-2n} \xrightarrow{c_\tau} (\rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_m)|_v \simeq \mathbb{R}^{2m}$$

из определения (3.13) задается $2m \times 2n$-матрицей

$$\begin{pmatrix} A_P & 0 \\ 0 & \Lambda^t \end{pmatrix}$$

(это вытекает из разложения (27)). Отображение (29) получается ограничением на подматрицы в A_P и Λ^t, образованные строками с номерами $j_1, \ldots, j_n$, откуда и вытекает требуемая формула для знака.

Пример 3.20. Пусть V_P – неособое проективное торическое многообразие, соответствующее простому многограннику P (3). Тогда $\lambda_i = a_i$, $1 \le i \le m$, – суть нормальные векторы к гиперграням, направленные внутрь многогранника. Из предложения (3.18) вытекает, что веса $w_1(v), \ldots, w_n(v)$ представления тора в касательном пространстве к неподвижной точке $v \in V_P$ суть примитивные векторы вдоль ребер многогранника P, исходящих из вершины v. Кроме того, из предложения (3.19) вытекает, что в этом случае $\sigma(v) = 1$ для всех v.

В случае произвольного квазиторического многообразия веса $w_1(v), \ldots, w_n(v)$ не совпадают с векторами вдоль ребер. Однако из предложения (3.18) вытекает, что мы можем установить естественное взаимно однозначное соответствие между ориентированными ребрами и весами представлений $\mathbb{T}^n$ в неподвижных точках.

При этом соответствии ориентированное ребро с началом в вершине $v = F_{j_1} \cap \ldots \cap F_{j_n} \in P$ переходит в вектор, двойственный к λ_{j_k} относительно базиса $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_n}$, где F_{j_k} – единственная гипергрань, содержащая v и не содержащая e.

Лемма 3.21. *Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – векторы вдоль ребер многогранника P, содержащих вершину $v \in P$ и направленные от v, а $w_1(v), \ldots, w_n(v)$ – соответствующие веса. Тогда имеет место формула для знака вершины:*

$$\sigma(v) = \operatorname{sign}(\det(w_1(v), \ldots, w_n(v)) \det(e_1, \ldots, e_n)).$$

$\square$ Это вытекает из леммы (3.19) и того факта, что $\{w_1(v), \ldots, w_n(v)\}$ – сопряженный базис к $\{\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_n}\}$, а $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – сопряженный базис к $\{a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}\}$. $\square$

Замечание 3.22. Формулы из лемм (3.19) и (3.21) можно сформулировать в виде следующего практического правила для вычисления знаков, которым мы будем пользоваться в дальнейшем. Запишем векторы $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_n}$ (или $w_1(v), \ldots, w_n(v)$) в квадратную матрицу в порядке, задаваемом ориентацией многогранника P, т.е. чтобы нормальные векторы соответствующих гиперграней (или векторы вдоль соответствующих ребер) образовывали положительный базис пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда определитель этой матрицы и есть $\sigma(v)$. Таким образом, в предположении, что векторы $w_1(v), \ldots, w_n(v)$ занумерованы таким образом, что векторы вдоль соответствующих ребер образуют положительный базис, мы можем записать формулу из леммы (3.21) в виде

$$\sigma(v) = \det(w_1(v), \ldots, w_n(v)). \qquad (30)$$

4 Инвариантные почти комплексные структуры на квазиторических многообразиях

4.1 Формулировки и определения

В работе [9] (Prob.7.6, p.450) был поставлен вопрос: найти критерий существования T^n-инвариантной почти комплексной структуры на квазиторическом многообразии M в терминах характеристического отображения λ.

Как уже было сказано выше (3.14), T^n-инвариантная стабильно комплексная структура на многообразии M с действием α тора T^n задает изоморфизм $c_\tau : \tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2m-2n} \simeq \eta$, где η – некоторое комплексное расслоение. При этом композиция отображений

$$\eta \xrightarrow{c_\tau^{-1}} \tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2m-2n} \xrightarrow{d\alpha(t)\oplus I} \tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2m-2n} \xrightarrow{c_\tau} \eta$$

является комплексно-линейной для любого $t \in T^n$.

Если v – неподвижная точка действия T^n на M, то определено сквозное отображение

$$\tau_v(M) \xrightarrow{i} \eta_v \xrightarrow{\pi'} \mathbb{C}^n,$$

где i – композиция вложения и изоморфизма c_τ, π' – проекция вдоль подпространства в η_v, неподвижного при действии T^n. Знак $\mathrm{sign}(v)$ неподвижной точки v – это знак определителя отображения $\pi' \circ i$.

Эквивалентное определение знака неподвижной точки полиориентирвоанного квазиторического многообразия, которым мы будем пользоваться, использует матрицу Λ и приведено в предыдущем разделе.

Полиориентация называется *положительной*, если соответствующие ей знаки всех неподвижных точек положительны.

Теорема 4.1. *Квазиторическое многообразие M допускает T^n-инвариантную почти комплексную структуру тогда и только тогда, когда оно обладает положительной полиориентацией.*

Схема доказательства теоремы (4.1) следующая. Мы фиксируем на M инвариантную риманову метрику ([4]) и строим согласованную с этой метрикой T^n-инвариантную почти комплексную структуру J по индукции – предполагая, что J построена на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ – прообразе $(i-1)$-мерного остова многогранника P, мы продолжаем J на $\pi^{-1}(sk_i(P))$. Препятствием к продложению J оказывается клеточная коцепь $\sigma^i_J \in C^i(P, \pi_{i-1}(SO(2i)/U(i)))$. После этого доказываются стандартные для теории препятствий утверждения, что σ^i_J – коцикл, и что если $\sigma^i_J = \delta\beta$, то J может быть изменена на прообразе внутренностей $(i-1)$-мерных клеток P и продолжена на $\pi^{-1}(sk_i(P))$.

Теорема 4.2. *Пусть J_0 и J_1 – две T^n-инвариантные комплексные структуры на расслоении $\tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2l}$, $l > 0$, индуцирующие одну полиориентацию на M. Тогда J_0 и J_1 эквивариантно гомотопны. Иными словами, существует непрерывное по t семейство $J(t)$ инвариантных комплексных структур на $\tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2l}$ такое, что $J(0) = J_0$ и $J(1) = J_1$.*

Прокомментируем условие теоремы (4.2). Любая T^n-инвариантная комплексная структура J на расслоении $\tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2l}$ обязательно индуцирует ориентацию на M, так как действие T^n на слагаемом $\mathbb{R}^{2l}$ тривиально и подрасслоение $\tau(M) \subset \tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2l}$ J-инвариантно. Кроме того, J индуцирует также и ориентацию любого характеристического подмногообразия $\pi^{-1}(F_j) \subset M$, так как $\pi^{-1}(F_j)$ инвариантно относительно действия T^n, и следовательно, касательное расслоение $\tau(\pi^{-1}(F_j)) \subset \tau(M)|_{\pi^{-1}(F_j)}$ также J-инвариантно. Следовательно, M является полиориентированным квазиторическим многообразием.

Доказательство теоремы (4.2) состоит в построении эквивариантной гомотопии между J_0 и J_1 индукцией по остовам. Аналогично стандартной теории препятствий, мы показываем, что продолжение гомотопии с $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ на $\pi^{-1}(sk_i(P))$ равносильно обращению в ноль некоторой различающей коцепи $d^i(J_0, J_1) \in C^i(P, \pi_i(SO(2i)/U(i)))$. Как будет ясно ниже, условие $l > 0$ в формулировке теоремы нельзя отбросить.

Мы получаем немедленное следствие из теоремы (4.2), являющееся по сути основным результатом диссертации:

Следствие 4.3. *Пусть J - произвольная T^n-инвариантная почти комплексная структура J, индуцирующая на M полиориентацию o. Тогда J эквивариантно гомотопна канонической стабильно комплексной структуре [6], построенной по o.*

Из доказательств теорем (4.1) и (4.2) следует ряд утверждений о структуре множества T^n-инвариантных почти комплексных структур на данном квазиторическом многообразии.

Следствие 4.4. *Пусть J_0 и J_1 – две T^n-инвариантные почти комплексные структуры на квазиторическом многообразии M, согласованные с одной полиориентацией o. Тогда J_0 и J_1 гомотопны в классе неинвариантных почти комплексных структур на M.*

Следствие 4.5. *Пусть J_0 и J_1 – две T^n-инвариантные почти комплексные структуры на квазиторическом многообразии M, согласованные с одной полиориентацией o и совпадающие на $\pi^{-1}(sk_3(P^n))$. Тогда J_0 и J_1 гомотопны в классе инвариантных почти комплексных структур на M.*

Следствие 4.6. *Множество структур на M^{2n}, рассматриваемых с точностью до инвариантной гомотопии и согласованных с данной положительной полиориентацией, может быть неканонически отождествлено с $\mathbb{Z}^{f_1(P)-f_0(P)+1}$. Здесь $f_1(P)$ – число ребер, $f_0(P)$ – число вершин многогранника P.*

Следствие 4.7. *На любом квазиторическом многообразии M^{2n}, $n > 1$ с положительной полиориентацией существует бесконечное количество эквивариантно негомотопных друг другу T^n-инвариантных почти комплексных структур.*

В частности, уже на многообразии $\mathbb{C}P^2$ имеется бесконечное количество T^2-инвариантных почти комплексных структур, между которыми не существует эквивариантной гомотопии.

Раздел (4.5) посвящен исследованию некоторых комбинаторных аспектов, таких, как существование в каждой четной размерности квазиторического многообразия, не допускающего никакой положительной полиориентации (предложение (4.30)). Кроме того, мы вводим новый комбинаторный инвариант $i(P)$ многогранника P, устанавливаем его простейшие свойства и связь с неэквивариантными классами эквивалентности почти комплексных структур.

В предложении (4.33) мы устанавливаем оценку $i(P) \leqslant n-1$, откуда следует такой результат.

Теорема 4.8. *Число инвариантных почти комплексных структур на квазиторическом многообразии M^{2n} не превосходит 2^n.*

В формулировке последней теоремы структуры рассматриваются с точностью до неэквивариантной эквивалентности, т.е. лишь с точностью до гомотопии соответствующих классифицирующих отображений $M^{2n} \to BU(n)$.

В разделе (4.6) приводится краткий обзор задачи географии чисел Черна для различных классов многообразий – комплексных алгебраических, связных почти комплексных, квазиторических многообразий. Теорема (4.1) позволяет полностью описать характеристические числа почти комплексных квазиторических многообразий в размерности 4 (предложение (4.40)).

4.2 Примеры и замечания

Из результатов работы [20], в частности, следует, что для квазиторического многообразия M с положительной полиориентацией и соответствующей ей стабильно комплексной структуры J имеет место равенство $c_n(J) = \chi(M)$. Поэтому в силу [24], M автоматически должно обладать некоторой почти комплексной структурой – которая не обязательно инвариантна.

Как известно, на любом неособом проективном торическом многообразии M существует каноническая T^n-инвариантная комплексная структура. Поскольку M проективно, оно обладает инвариантной симплектической формой ω, и определено *отображение моментов* $\pi : M \to P$ ([1]), задающее на M структуру квазиторического многообразия (P – простой многогранник). Комплексная структура на M задает положительную полиориентацию на M, поскольку все характеристические подмногообразия также являются комплексными.

Отметим, что уже в размерности 6 существуют неособые торические многообразия, не являющиеся проективными (см. [5]), на которых, тем не менее, имеется локально стандартное действие тора T^3, причем факторпространство диффеоморфно простому многограннику.

Рассмотрим теперь примеры неалгебраических квазиторических многообразий. Пусть $\mathbb{C}P^2_k$ – связная сумма k экземпляров $\mathbb{C}P^2$ со стандартной ориентацией и гладкостью. Как следует из конструкции инвариантной связной суммы ([9],[6]), все многообразия $\mathbb{C}P^2_k$ являются квазиторическими, и при нечетном k многообразие $\mathbb{C}P^2_k$ допускает положительную полиориентацию. При четном k многообразие $\mathbb{C}P^2_k$ не может быть почти комплексным.

Теорема 4.9 ([27]). *Ориентированное четырехмерное многообразие M является почти комплексным, если и только если число $td(M) = \frac{1}{4}(\chi(M) + \mathrm{sign}(M))$ целое. Здесь $\mathrm{sign}(M) = (b_2^+(M) - b_2^-(M))$ – сигнатура формы пересечений многообразия M.*

Для многообразия $\mathbb{C}P^2_k$ имеем $td(\mathbb{C}P^2_k) = \frac{k+1}{2}$. Отсюда следует несуществование почти комплексной структуры на $\mathbb{C}P^2_k$ для четных k. Как следует из теоремы 2.1, многообразие $\mathbb{C}P^2_k$ при нечетном k обладает локально стандартным действием тора T^2 и инвариантной почти комплексной структурой. Тем не менее, при $k \geqslant 3$ многообразие $\mathbb{C}P^2_k$ не может быть торическим – поскольку любое торическое многообразие рационально и, следовательно, имеет род Тодда, равный единице.

Как следует из результатов [10], на $\mathbb{C}P^2_k$ при $k \geqslant 2$ также не существует T^2-инвариантной симплектической структуры.

Теорема 4.10. *([10]). Пусть M – многообразие с симплектическим действием окружности, имеющее лишь изолированные неподвижные точки. Тогда $\mathrm{td}(M) = 1$ или 0 в зависимости, соответственно, от того, является действие окружности гамильтоновым или нет.*

Наконец, имеет место следующий результат, доказательство которого основано на теории инвариантов Зайберга-Виттена четырехмерных симплектических многообразий.

Теорема 4.11. *([23]). Многообразие $\mathbb{C}P^2_k$ не является симплектическим при $k \geqslant 2$.*

Таким образом, многобразия $\mathbb{C}P^2_k$ с нечетным $k \geqslant 3$ являются примерами многообразий, обладающих инвариантной почти комплексной структурой, но не являющихся ни симплектическими, ни торическими.

4.3 Доказательство теоремы (4.1)

Часть "только тогда" теоремы (4.1) очевидна. Если J – искомая структура, то все характеристические подмногообразия J-инвариантны, откуда следует положительность знаков всех неподвижных точек. Содержательной частью является часть "тогда": доказать, что существование положительной полиориентации на M влечет существование инвариантной почти комплексной структуры.

4.3.1 Обозначения

Через $sk_i(P)$ мы будем обозначать объединение всех граней размерности i многогранника P. Пусть $\iota : P \to M$ – непрерывное вложение многогранника P в M, удовлетворяющее условию: $\pi \circ \iota = id$.

Вложение ι строится как композиция $P \to P \times T^n \to M$, где последняя стрелка – отображение факторизации ([9]).

Мы будем предполагать, что на M задана T^n-инвариантная риманова метрика g (см. [4]). Структуру J будем строить в виде ортогонального оператора на $\tau(M)$, удовлетворяющего условию $J^2 = -1$.

Напомним, что пространство комплексных структур на $2i$-мерном вещественном пространстве, согласованных с данной метрикой и индуцирующих заданную ориентацию, гомеоморфно $SO(2i)/U(i)$.

Слова "структура на X" здесь и далее будут расшифровываться, как "T^n-инвариантная комплексная структура на расслоении $\tau(M)$, ограниченном на подмножество $X \subset M$".

Если $M_G = \pi^{-1}(G)$ – квазиторическое подмногообразие размерности $2i$ в M, то через $\xi_1 \dots \xi_{n-i}$ будем обозначать двумерные вещественные расслоения над M, соответствующие $n-i$ стационарным торическим подгруппам $T_1 \dots T_{n-i}$ ([9]). Расслоения ξ_j и подгруппы T_j, естественно, зависят от грани G, но мы не будем отражать эту зависимость в обозначениях, так как это не приведет к путанице. По определению, слои расслоений ξ_j над M_G J-инвариантны.

Будем называть структуру J на $\pi^{-1}(Int\, G)$ *согласованной* с o, если она индуцирует ту же ориентацию на всех расслоениях $\xi_1, \dots, \xi_{n-i}$, что и исходная полиориентация o.

Если V – вещественное евклидово пространство четной размерности с фиксированной ориентацией, то через $\mathbb{J}(V)$ будем обозначать пространство всех комплексных структур на V, согласованных с метрикой и ориентацией V. Для наших приложений будет важен случай $V = \tau(M_G)|_x$, где $G \subset P$ – некоторая грань, а $x \in \iota(G)$. Отметим, что после выбора базиса в V пространство $\mathbb{J}(V)$ естественно отождествляется с $SO(2i)/U(i)$, где $i = \dim G$. В частности, $\mathbb{J}(V)$ всегда односвязно.

Расслоение над $\iota(G)$ со слоем $\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)$ над точкой $x \in \iota(G)$, ассоциированное с $\tau(M_G)|_{\iota(G)}$, будем для краткости обозначать через $\mathbb{J}_G$. Очевидно, что $\mathbb{J}_G$ тривиально. Рассмотрим теперь пространство $\mathrm{Aut}(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$ гомеоморфизмов слоя $\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)$ в себя, индуцированных заменой базиса в пространстве $\tau(M_G)|_x$.

Фиксируем произвольную тривиализацию расслоения $\tau(M_G)$ над $\iota(G)$ (определяющую также тривиализацию ассоциированного расслоения $\mathbb{J}_G$). Тогда все остальные тривиализации расслоения $\mathbb{J}_G$, определяемые некоторой тривиализацией $\tau(M_G)$ над $\iota(G)$, задаются непрерывными отображениями $G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$, где $x \in \iota(G)$ – некоторая фиксированная точка. Поскольку пространство замен базиса в $\tau(M_G)|_x$ гомеоморфно $SO(2i)$ и, тем самым, связно, $\mathrm{Aut}(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$ также связно. Следовательно, связным является и пространство тривиализаций расслоения $\mathbb{J}_G$, задаваемых некоторой тривиализацией $\tau(M_G)$ над $\iota(G)$.

4.3.2 Условие положительности и переход к 1-остову

Лемма 4.12. *Если $M_G \subset M$ – квазиторическое подмногообразие, то $\xi_j \perp M_G$ и $\xi_j \perp \xi_k$ при $j \neq k$.*

□ Пусть $v \in \tau(M_G)$, $v_j \in \xi_j$, $v_k \in \xi_k$ – ненулевые вектора, приложенные к точке $x \in M_G$, а $t_\pi \in T_j$ – элемент торической подгруппы T_j, соответствующий повороту на угол π. Тогда $g(v, v_j) = g(v, t_\pi v_j) = g(v, -v_j) = 0$ и $g(v_j, v_k) = g(t_\pi v_j, v_k) = g(-v_j, v_k) = 0$, так как T_j действует тривиально на ξ_k и $\tau(M_G)$. □

Пусть o – некоторая, не обязательно положительная, полиориентация M. Тогда o задает структуру J на $\pi^{-1}(sk_0(P))$ следующим образом: на каждом инвариантном двумерном вещественном подпространстве $\xi_1|_x, \ldots, \xi_n|_x$ в неподвижной точке $x \in M$ структура J является поворотом на угол $\pi/2$ в направлении, определяемом o. Наша задача – продолжить J последовательно на прообразы всех остовов многогранника P.

Лемма 4.13. *Пусть J – структура на $\pi^{-1}(sk_0(P))$, построенная по некоторой полиориентации o. Структура J продолжается на $\pi^{-1}(sk_1(P))$, тогда и только тогда, когда полиориентация o положительна.*

□ Докажем часть "тогда". Пусть I – ребро P, соединяющее вершины x_0 и x_1, а $T_1, \ldots, T_{n-1}$ – торические подгруппы, соответствующие I. Над

$\pi^{-1}(I)$ имеется разложение касательного расслоения в прямую сумму $\tau(M) = \tau(\pi^{-1}(I)) \oplus \xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_{n-1}$. Задание полиориентации o определяет ориентацию расслоений $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ над $\pi^{-1}(I)$.

Обозначим за W_0 и W_1 ортогональные дополнения к $\xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_{n-1}$ в точках $\pi^{-1}(x_0)$ и $\pi^{-1}(x_1)$ соответственно. Поскольку J построена по полиориентации o, J является поворотом на $\pi/2$ в пространствах W_0 и W_1. Заметим, что W_0 и W_1 – касательные пространства к $\pi^{-1}(I)$ в точках $\pi^{-1}(x_0)$ и $\pi^{-1}(x_1)$. Положительность o влечет согласованность ориентаций W_0 и W_1 как касательных пространств к точкам сферы $S^2 = \pi^{-1}(I)$. Поэтому мы можем доопределить J на все $\tau(\pi^{-1}(I))$ как поворот на угол $\pi/2$ в положительном направлении. На расслоениях $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ структура J определяется как поворот на $\pi/2$ в направлении, продиктованном ориентациями $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$.

Для доказательства части "только тогда" теперь достаточно заметить, что если J задана на всей сфере $\pi^{-1}(I)$, то ориентации M в точках $\pi^{-1}(x_0)$ и $\pi^{-1}(x_1)$ согласованы – и это верно для любых вершин x_0 и x_1, соединенных ребром. Поскольку 1-остов любого многогранника связен, все вершины P обязаны иметь один знак. □

4.3.3 Тривиальность высших препятствий

Перейдем к случаю $i > 1$: предположим, что структура J задана на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ и попытаемся продолжить ее на прообраз i-мерного остова P. Пусть $G \subset P$ – некоторая i-мерная грань, $M_G = \pi^{-1}(G)$ – соответствующее квазиторическое подмногообразие.

Лемма 4.14. *Пространство структур J на $\pi^{-1}(Int\, G)$, согласованных с полиориентацией o, гомеоморфно пространству непрерывных отображений* $\mathrm{Map}(Int\, G, \mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$, *где $x \in \iota(Int\, G)$ – произвольная точка.*

□ Инвариантность и согласованность структуры J с o гарантируют, что J однозначно задана на расслоении $\xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_{n-i} \simeq \tau(\pi^{-1}(Int\, G))^{\perp} \subset \tau(M)|_{M_G}$. Таким образом, достаточно определить J на касательном расслоении $\tau(\pi^{-1}(IntG)) \simeq \tau(M_G)|_{Int\, G}$.

Если T^{n-i} – стабилизатор подмногообразия $\pi^{-1}(G)$, то факторгруппа T^n/T^{n-i} изоморфна i-мерному тору и действует на $\pi^{-1}(Int\, G)$ свободно, причем пространство орбит гомеоморфно $Int\, G$. В силу инвариантности, структуру J тогда достаточно задать на $\iota(Int\, G)$. Расслоение $\tau(M_G)$ при ограничении на $\iota(Int\, G)$ становится тривиальным $2i$-мерным ориентированным расслоением, на котором J может быть задана произвольным образом. Если фиксировать тривиализацию ассоциированного расслоения $\mathbb{J}_G$ над $\iota(Int\,G)$, то структура J определяется непрерывным отображением $Int\,G \to \mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)$, где $x \in \iota(G)$ – некоторая фиксированная точка. $\square$

Заметим, что расслоение $\tau(M_G)$, ограниченное на $\iota(G)$, также тривиально. Отсюда следует, что для любых двух точек $x, y \in \iota(G)$ гомотопические группы $\pi_*(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$ и $\pi_*(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_y))$ канонически изоморфны. Действительно, искомый изоморфизм задается произвольным путем $\gamma(t), t \in [0,1]$ таким, что $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ и $\gamma(t) \in \iota(G)$, причем любые два таких пути гомотопны в $\iota(G)$. Кроме того, гомотопическая группа $\pi_*(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$ не зависит от выбора отмеченной точки в $\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)$, поскольку $\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)$ односвязно (см. п. 3.1).

Фиксируем произвольную точку $x \in \iota(G)$ и тривиализацию расслоения $\tau(M_G)$ над $\iota(G)$. Тогда расслоение $\mathbb{J}_G$ также тривиализуется. Поскольку структура J уже задана на $\iota(\partial G) \subset \pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$, она определяет некоторое непрерывное отображение $f : \partial G \to \mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)$. Гомотопический класс сфероида f мы обозначим через C_G.

Покажем, что класс C_G определен корректно. Из сказанного выше следует, что C_G не зависит от выбора точки $x \in \iota(G)$. Предположим теперь, что мы изменили тривиализацию расслоения $\tau(M_G)$ над $\iota(G)$. В силу сказанного ранее, новая тривиализация расслоения $\mathbb{J}_G$ тогда задается некоторым непрерывным отображением $\phi : G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$ из G в пространство гомеоморфизмов слоя $\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)$ в себя, индуцированных заменой базиса в $\tau(M_G)|_x$. В новой тривиализации отображение f заменяется на отображение $g : \partial G \to \mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)$, действующее по формуле $g(y) = \phi(y) \circ f(y)$. Пусть $\phi_t : G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$ – непрерывное семейство отображений такое, что $\phi_0(y) = id$ для любого $y \in \iota(G)$, и $\phi_1 = \phi$ (оно существует в силу связности пространства отображений $G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$). Тогда семейство отображений $\phi_t(y) \circ f(y)$ задает гомотопию f и g, откуда следует, что гомотопические классы сфероидов f и g совпадают.

Отметим, кроме того, что при определении C_G существенна ориентация грани G.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Лемма 4.15. *Структура J, согласованная с o, продолжается с $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P)) \cup M_G$, если и только если $C_G = 0$ в группе $\pi_{i-1}(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$, где $x \in \iota(G)$ – некоторая фиксированная точка.*

Каждый многогранник P обладает каноническим клеточным разбиением, в котором клетками являются грани P. Определим клеточную коцепь $\sigma^i_J \in C^i(P, \pi_{i-1}(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)))$ по правилу $\sigma^i_J(G) =$

C_G. По построению, σ^i_J тождественно равна нулю, если и только если структура J продолжается с $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ на $\pi^{-1}(sk_i(P))$.

Строго говоря, функция σ^i_J не может называться коцепью до тех пор, пока мы каноническим образом не отождествим между собой гомотопические группы $\pi_{i-1}(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$ для всех граней G размерности i. Покажем, как это возможно сделать.

Лемма 4.16. *Пусть* $\dim G = i$, $j \leqslant 2i-2$, $x \in \iota(G)$, $y \in \iota(P)$. *Тогда гомотопические группы* $\pi_j(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x))$ *и* $\pi_j(\mathbb{J}(\tau(M)|_y))$ *канонически изоморфны.*

□ Прежде чем приступить к доказательству, отметим, что поскольку группы $\pi_j(\mathbb{J}(\tau(M)|_y))$ канонически изоморфны между собой для всех точек $y \in \iota(P)$, нужное нам утверждение вытекает из леммы (4.16), так как $i-1 \leqslant 2i-2$. Поэтому без ограничения общности можем считать, что $x = y$.

Рассмотрим сперва произвольное вложение двух граней $H \subset L$, размерности которых различаются на единицу и обе не меньше i. Пусть $x \in \iota(H)$. Тогда имеется вложение пространств комплексных структур

$$c(H, L) : \mathbb{J}(\tau(M_H)|_x) \to \mathbb{J}(\tau(M_L)|_x),$$

определенное формулой $J \to J \oplus t_{\pi/2}$, где $t_{\pi/2}$ – поворот на угол $\pi/2$ в двумерном ортогональном дополнении $\tau(M_H)|_x^{\perp} \subset \tau(M_L)|_x$. Направление поворота продиктовано коориентацией $\tau(M_H)|_x$ в $\tau(M_L)|_x$.

Если мы фиксируем вещественные базисы в $\tau(M_H)|_x$ и $\tau(M_L)|_x$ так, чтобы один из них являлся частью другого, то $c(H, L)$ превратится в каноническое вложение однородных пространств $c : SO(2r)/U(r) \to SO(2r+2)/U(r+1)$, где $r = \dim H$.

Лемма 4.17. *Отображение*

$$c_* : \pi_j(SO(2r)/U(r)) \to \pi_j(SO(2r+2)/U(r+1))$$

является изоморфизмом при $j \leqslant 2r-2$.

□ Вложение c раскладывается в композицию отображений

$$SO(2r)/U(r) \to SO(2r+2)/U(r) \to SO(2r+2)/U(r+1),$$

где первая стрелка является вложением слоя в пространство расслоения над базой $SO(2r+2)/SO(2r)$, вторая – проекцией расслоения со слоем S^{2r+1}. Из гомотопической точной последовательности расслоения следует, что c индуцирует изоморфизм гомотопических групп до размерности $2r-2$ включительно, так как гомотопические группы многообразия Штифеля $\pi_j(SO(2r+2)/SO(2r))$ тривиальны при $j \leqslant 2r-1$ ([26]). $\square$

Рассмотрим теперь произвольную цепочку вложений $G = G_0 \subset \ldots \subset G_{n-i} = P$, в которой размерности любых двух соседних граней различаются на единицу. Для $j \leqslant 2i-2$ определим изоформизм $c_*(G,P) : \pi_j(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)) \to \pi_j(\mathbb{J}(\tau(M)|_x))$ по формуле $c_*(G,P) = c_*(G_{n-i-1}, G_{n-i}) \circ \ldots \circ c_*(G_0, G_1)$. Мы утверждаем, что изоморфизм $c_*(G,P)$ и есть искомый; достаточно доказать следующее утверждение.

Лемма 4.18. *Изоморфизм $c_*(G,P)$ не зависит от выбора цепочки $G = G_0 \subset \ldots \subset G_{n-i} = P$.*

$\square$ Рассмотрим произвольный отрезок цепочки вида $G_{s-1} \subset G_s \subset G_{s+1}$. Тогда существует единственная грань $Q \subset P$ такая, что $G_{s-1} \subset Q \subset G_{s+1}$ и $Q \neq P$. Если $x \in G_{s-1}$, то диаграмма вложений

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{J}(\tau(M_{G_{s-1}})|_x)) & \longrightarrow & \mathbb{J}(\tau(M_{G_s})|_x)) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
\mathbb{J}(\tau(M_Q)|_x)) & \longrightarrow & \mathbb{J}(\tau(M_{G_{s+1}})|_x)
\end{array}$$

коммутативна, поэтому замена грани G_s в цепочке на Q не изменит изоморфизма $c_*(G,P)$.

Будем говорить, что две цепочки граней, соединяющие G и P, эквивалентны, если их можно соединить последовательностью только что рассмотренных операций. Докажем индукцией по $n-i$, что любые две цепочки граней, соединяющие G и P, эквивалентны. База ($n-i=1$) очевидна, так как цепочка единственна. Пусть теперь $G = G_0^1 \subset \ldots \subset G_{n-i}^1 = P$ и $G = G_0^2 \subset \ldots \subset G_{n-i}^2 = P$ – две разные цепочки, соединяющие G и P. Рассмотрим грань Q такую, что $\dim Q = i+2$, $G_1^1 \subset Q$ и $G_1^2 \subset Q$ и произвольную цепочку ζ, соединяющую Q и P. В силу предположения индукции, цепочки $G_1^1 \subset G_2^1 \subset \ldots \subset P$ и $G_1^1 \subset Q \subset \ldots \subset P$, где Q соединена с P цепочкой ζ, эквивалентны. Поэтому эквивалентны цепочки $G \subset G_1^1 \subset G_2^1 \subset \ldots \subset P$ и $G \subset G_1^1 \subset Q \subset \ldots \subset P$. Далее, цепочка $G \subset G_1^1 \subset Q \subset \ldots \subset P$ эквивалентна $G \subset G_1^2 \subset Q \subset \ldots \subset P$, в силу выбора грани Q. Наконец, снова применяя предположение индукции, получаем, что цепочки $G \subset G_1^2 \subset Q \subset \ldots \subset P$ и $G \subset G_1^2 \subset G_2^2 \subset \ldots \subset P$ эквивалентны. $\square$

Таким образом, построение препятствующей коцепи закончено. Суммируем все вышесказанное в следующем утверждении.

Лемма 4.19. *Пусть структура J задана на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ и согласована с о. Тогда определена препятствующая коцепь $\sigma^i_J \in C^i(P, \pi_{i-1}(SO(2i)/U(i))$ – функция на i-мерных гранях P, равная нулю, если и только если J продолжается на $\pi^{-1}(sk_i(P))$ как согласованная с о структура.*

Следующая наша цель – доказать, что коцепь σ^i_J является коциклом.

Лемма 4.20. *Предположим, что структура J согласована с о и определена на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$, Q – некоторая $(i+1)$-мерная грань P. Тогда*

$$\sum_{G\subset\partial Q} \sigma^i_J(G) = 0.$$

□ Из доказанного ранее следует, что мы можем использовать одно обозначение c_* для всех изоморфизмов $c_*(G,Q) : \pi_{i-1}(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x)) \to \pi_{i-1}(\mathbb{J}(\tau(M_Q)|_y))$, $x \in \iota(G)$, $y \in \iota(Q)$.

Достаточно показать, что сумма $\sum\limits_{G\subset\partial Q} c_*\sigma^i_J(G)$ равна нулю в гомотопической группе $\pi_{i-1}(\mathbb{J}(\tau(M_Q)|_y)) \simeq \pi_{i-1}(SO(2i+2)/U(i+1))$.

Как уже говорилось, структура J на расслоении $\tau(M_G)|_{\iota(G)}$ автоматически определяет структуру $c(J)$ на расслоении $\tau(M_Q)|_{\iota(G)}$ по формуле $J \to J \oplus t_{\pi/2}$. Расслоение $\tau(M_Q)$ тривиализуется над $\iota(Q)$. Поскольку $\iota(G) \subset \iota(Q)$ для всех G, корректно определено отображение $f_J : Q \cap sk_{i-1}(P) \to \mathbb{J}(\tau(M_Q)|_y)$, $y \in \iota(Q)$ – некоторая фиксированная точка. По построению, гомотопический класс ограничения f_J на ∂G совпадает с $c_*\sigma^i_J(G)$.

Пусть U_ϵ – замкнутая i-мерная трубчатая окрестность $Q \cap sk_{i-1}(P)$ в ∂Q (такая, что $G \setminus U_\epsilon \neq \emptyset$ для всех $G \subset \partial Q$). Множество $Q \cap sk_{i-1}(P)$ является деформационным ретрактом окрестности U_ϵ, и композиция с ретракцией задает непрерывное отображение $\tilde{f}_J : U_\epsilon \to \mathbb{J}(\tau(M_L)|_y)$. Окрестность U_ϵ гомеоморфна i-мерной сфере с k вырезанными i-мерными шарами; пусть $S_1, \ldots, S_k$ – границы этих шаров.

Тогда если $S_j \subset G$, то гомотопический класс ограничения $\tilde{f}_J|_{S_j}$ совпадает с $c_* \sigma^i_J(G)$. Поскольку сумма сфероидов $\tilde{f}_J|_{S_j}$ гомотопна нулю, это завершает доказательство того, что σ^i_J – коцикл. $\square$

Лемма 4.21. *Если структура J согласована с o, определена на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ и препятствующая коцепь σ^i_J является кограницей, то можно так изменить J на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$, не меняя на $\pi^{-1}(sk_{i-2}(P))$, что для новой структуры J' будем иметь $\sigma^i_{J'} = 0$.*

$\square$ Согласно лемме (4.17), вложение $c : SO(2i-2)/U(i-1) \to SO(2i)/U(i)$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп до размерности $2i-4$ включительно. При $i \geqslant 3$ имеем $i - 1 \leqslant 2i - 4$, поэтому отображение $c_* : \pi_{i-1}(SO(2i-2)/U(i-1)) \to \pi_{i-1}(SO(2i)/U(i))$ является изоморфизмом. При $i = 2$ оба пространства $SO(2i-2)/U(i-1)$ и $SO(2i)/U(i)$ являются односвязными.

Пусть $\sigma^i_J = \partial\beta$ и H – некоторая $(i-1)$-мерная грань. Отметим, что из доказательства леммы 4.5 следует, что мы можем использовать одно обозначение c_* для всех изоморфизмов вида $c_*(H, G_i) : \pi_{i-1}(\mathbb{J}(\tau(M_H)|_x)) \to \pi_{i-1}(\mathbb{J}(\tau(M_{G_i})|_y))$, где $x \in H, y \in G_i, H \subset G_i, \dim G_i = i$. Воспользуемся теперь леммой (4.14): пространство структур на $\pi^{-1}(Int\, H)$, согласованных с o, гомеоморфно пространству непрерывных отображений $Int\, H \to \mathbb{J}(\tau(M_H)|_x)$. Пусть $f_H : Int\, H \to \mathbb{J}(\tau(M_H)|_x)$ – соответствующее структуре J отображение.

Отождествим $Int\, H$ со внутренностью единичного $(i-1)$-мерного шара в $\mathbb{R}^{i-1}$. Рассмотрим непрерывное отображение $\tilde{f}_H : Int\, H \to \mathbb{J}(\tau(M_H)|_x)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- $\tilde{f}_H(x) = f_H((2|x| - 1) \cdot x)$ при $1/2 \leqslant |x| \leqslant 1$;
- гомотопический класс сфероида, полученного ограничением отображения $\tilde{f}_H$ на шар $|x| \leqslant 1/2$, равен $(-c_*^{-1}\beta(H))$:

Замена отображения f_H на $\tilde{f}_H$ соответствует изменению структуры J на новую структуру J'. Тогда для всех i-мерных граней G, содержащих H, имеем $\sigma^i_{J'}(G) = \sigma^i_J(G) - \beta(H)$, поскольку вложение $\mathbb{J}(\tau(M_H)|_x) \to$

$\mathbb{J}(\tau(M_{G_i})|_x)$, $x \in H$ индуцирует совпадающий с c_* изоморфизм соответствующих гомотопических групп.

Если мы теперь изменим отображения f_H не для одной грани H, а для всех $(i-1)$-мерных граней многогранника P по аналогичному правилу $\tilde{f}_H = f_H - c_*^{-1}\beta(H)$, то из условия $\sigma_J^i = \partial\beta$ следует, что для полученной структуры J' верно $\sigma_{J'}^i = 0$. $\square$

4.3.4 Окончание доказательства

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы (4.1). Напомним, идея доказательства состояла в построении структуры J последовательно на прообразах i-мерных остовов многогранника P. Лемма (4.13) и положительность полиориентации o гарантируют, что продолжение J с $\pi^{-1}(sk_0(P))$ на $\pi^{-1}(sk_1(P))$ возможно. В силу лемм (4.19) и (4.20), при $i > 1$ препятствием к продолжению J с $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ на $\pi^{-1}(sk_i(P))$ является коцепь $\sigma_J^i \in C^i(P, \pi_{i-1}(SO(2i)/U(i)))$, причем $\partial\sigma_J^i = 0$. Так как многогранник P ацикличен как клеточный комплекс, σ_J^i является кограницей, и, в силу леммы (4.21), существует T^n-инвариантная почти комплексная структура J' на $\pi^{-1}(sk_i(P))$.

4.4 Доказательство теоремы (4.2) и следствий

4.4.1 Согласованность с инвариантной метрикой

Напомним формулировку утверждения, доказательство которого сейчас является основной целью.

Пусть J_0 и J_1 – две T^n-инвариантные комплексные структуры на расслоении $\tau(M)\oplus\mathbb{R}^{2l}$, $l > 0$, индуцирующие одну полиориентацию на M. Тогда J_0 и J_1 инвариантно гомотопны. Иными словами, существует непрерывное по t семейство $J(t)$ инвариантных комплексных структур на $\tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2l}$ такое, что $J(0) = J_0$ и $J(1) = J_1$.

Действие T^n на слагаемом $\mathbb{R}^{2l}$ предполагается тривиальным. Отметим еще раз, что теорема перестает быть верной при $l = 0$.

Схема доказательства такова. Сперва мы покажем, что структуры J_0 и J_1 можно считать согласованными с некоторой инвариантной метрикой и совпадающими на $\pi^{-1}(sk_0(P))$. После этого будем строить эквивариантную гомотопию между J_0 и J_1 индуктивно – предполагая, что гомотопия задана на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$, продолжим ее на $\pi^{-1}(sk_i(P))$.

Лемма 4.22. *Пусть J – структура на M. Существует T^n-инвариантная риманова метрика на M, относительно которой J является ортогональным оператором.*

$\Box$ Достаточно построить произвольную риманову метрику на M, согласованную с J, искомая инвариантная метрика может быть затем получена интегрированием по слоям действия T^n. Действительно, если $g'(x,y) = \int\limits_{t\in T^n} g(tx,ty)d\mu$, где μ – мера на T^n (даже не обязательно инвариантная в данном случае), то

$$g'(Jx,Jy) = \int\limits_{t\in T^n} g(tJx,tJy)d\mu = \int\limits_{t\in T^n} g(Jtx,Jty)d\mu = \int\limits_{t\in T^n} g(tx,ty)d\mu = g'(x,y),$$

так как J коммутирует с действием T^n и $g(Jx,Jy) = g(x,y)$.

Пусть теперь $x \in M$ – произвольная точка. Тогда вектора $e_1, Je_1, e_2, Je_2, \ldots, e_n, Je_n \in \tau_x(M)$ такие, что e_{i+1} не лежит в линейной оболочке $e_1, \ldots, Je_i$, можно взять за ортонормированный базис для некоторой метрики на $\tau_x(M)$, относительно которой оператор J ортогонален. Таким образом, мы можем считать, что у каждой точки $x \in M$ существует окрестность $U(x)$, в которой задана метрика g_x, согласованная с J. Продолжим каждую метрику g_x вне $U(x)$ нулем. Выберем теперь из множеств вида $U(x)$, $x \in M$ конечное подпокрытие $U(x_1)\ldots U(x_k)$ и склеим соответствующие метрики g_{x_i} при помощи разбиения единицы – получим всюду определенную непрерывную метрику g на M. $\Box$

Лемма 4.23. *Пусть J_0 и J_1 – две структуры на M. Тогда существует непрерывное семейство структур $J(t)$ на M такое, что $J(0) = J_0$ и структуры $J(1)$ и J_1 являются ортогональными операторами относительно некоторой T^n-инвариантной метрики g на M.*

$\Box$ Пользуясь предыдущей леммой, построим две инвариантные метрики g_0 и g_1, относительно которых операторы J_0 и J_1 являются ортогональными. Пространство всех (инвариантных) римановых метрик на многообразии выпукло, поэтому g_0 и g_1 соединяются гомотопией вида $g(t) = tg_0 + (1-t)g_1$, также в классе инвариантных метрик.

Рассмотрим непрерывное по t семейство операторов $C(t)$ на $\tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2l}$ таких, что $g(t)(C(t)u, v) = g_0(u,v)$ для любых векторов $u, v \in TM|_x$, $x \in M$. Такой оператор $C(t)$ существует и единственен для каждого t, диагонализуем, все его собственные значения положительны. Собственные подпространства, отвечающие различным собственным значениям $C(t)$, ортогональны (относительно метрики g_0). Кроме того, $C(t)$ является T^n-эквивариантным оператором, поскольку метрики g_0 и g_t инвариантны относительно действия T^n.

Из этих свойств $C(t)$ следует, что на M существует непрерывное семейство T^n-эквивариантных операторов $C'(t)$ таких, что $C'(t)^2 = C(t)$, причем все собственные значения $C'(t)$ также положительны. Поскольку собственные подпространства $C'(t)$, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны относительно g_0, имеем $g_0(C'(t)u, v) = g_0(u, C'(t)v)$ для всех t и $u, v \in TM_x$, $x \in M$. Поэтому $g_t(u, v) = g_0(C'(t)^2 u, v) = g_0(C'(t)u, C'(t)v)$ для всех t и $u, v \in TM_x$, $x \in M$.

Покажем теперь, что $J(t) = C'(t)^{-1} J_0 C'(t)$ – требуемое семейство операторов. Очевидно, что $J(t)^2 = -1$.

Имеем

$$\begin{gathered} g_1(J(1)u, J(1)v) = \\ = g_1(C'(1)^{-1} J_0 C'(1)u, C'(1)^{-1} J_0 C'(1)v) = \\ = g_0(J_0 C'(1)u, J_0 C'(1)v) = \\ = g_0(C'(1)u, C'(1)v) = \\ = g_1(u, v), \end{gathered}$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 4.24. *Пусть J_0 и J_1 – две T^n-инвариантные комплексные структуры на расслоении $\tau(M) \oplus \mathbb{R}^{2l}$, согласованные с инвариантной метрикой g и ориентацией M. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- *J_0 и J_1 совпадают на $\pi^{-1}(sk_0(P))$;*
- *J_0 и J_1 индуцируют одну полиориентацию на M;*

□ В каждой неподвижной точке действия $x \in M$ имеется ортогональное разложение касательного пространства $\tau(M)|_x$ в прямую сумму $V_1, \ldots, V_n$ двумерных T^n-инвариантных пространств. Каждое из них является нормальным к соответствующему характеристическому подмногообразию. Поэтому ясно, что второе условие влечет первое. Если же J_0 и J_1 совпадают на $\pi^{-1}(sk_0(P))$, то тогда индуцированные ориентации на нормальных расслоениях к характеристическим подмногообразия также совпадают. Действительно, эти ориентации заданы всюду (так как и J_0, и J_1 всюду определены) и совпадают между собой в неподвижных точках. □

4.4.2 Построение и свойства различающей коцепи

Лемма 4.25. *Пусть J_0 и J_1 – две T^n-инвариантные комплексные структуры на расслоении $\tau(M)\oplus\mathbb{R}^{2l}$, $l>0$, совпадающие на $\pi^{-1}(sk_0(P))$ и согласованные с инвариантной метрикой g. Тогда J_0 и J_1 гомотопны в классе T^n-инвариантных структур, согласованных с g.*

☐ Доказательство мы проведем в несколько шагов. Общая схема аналогична доказательству теоремы (4.1): в предположении, что J_0 и J_1 гомотопны на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$, определяется различающая коцепь $d^i(J_0,J_1)\in\pi_i(\mathbb{J}(\tau(M)\oplus\mathbb{R}^{2l}|_x))$, где $x\in P$ – произвольная точка (от выбора точки x ничего не зависит, как будет показано в лемме 5.6). Свойства коцепи $d^i(J_0,J_1)$ аналогичны свойствам коцепи σ^i_J, рассмотренной нами выше.

Структура J на $\tau(M_G)\oplus\mathbb{R}^{2l}\big|_{\pi^{-1}(Int\,G)}$ называется *согласованной с o*, если J индуцирует полиориентацию на расслоениях $\xi_1,\ldots,\xi_{n-i}\subset\tau(M_G)$, совпадающую с полиориентацией, индуцированной o.

Лемма 4.26. *Пусть $x\in\iota(Int\,G)$ – некоторая точка. Пространство T^n-инвариантных почти комплексных структур J на $\tau(M_G)\oplus\mathbb{R}^{2l}\big|_{\pi^{-1}(Int\,G)}$, согласованных с метрикой g и полиориентацией o, гомеоморфно $\mathrm{Map}(Int\,G,\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x\oplus\mathbb{R}^{2l}))$, $x\in G$ – некоторая точка.*

☐ Доказательство аналогично лемме (4.14). Единственная модификация состоит в том, что тор T^{n-i}, являющийся стационарной подгруппой M_G, действует на слагаемом $\mathbb{R}^{2l}|_{\pi^{-1}(Int\,G)}\subset\tau(M_G)\oplus\mathbb{R}^{2l}|_{\pi^{-1}(Int\,G)}$ тривиально, а тор T^n/T^{n-i} – свободно. ☐

Отметим, что гомеоморфизм из предыдущей леммы, опять же, зависит не только от точки $x\in\iota(Int\,G)$, но и от выбора тривиализации расслоения $\tau(M_G)|_{\iota(Int\,G)}$ (задающей очевидно, тривиализацию $\tau(M_G)\oplus\mathbb{R}^{2l}\big|_{\iota(Int\,G)}$).

Тривиализуем теперь $\tau(M_G)$ над $\iota(G)$. Тогда структуры J_0 и J_1 соответствуют некоторым непрерывным отображениям f_1, $f_2:G\to\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x\oplus\mathbb{R}^{2l})$. По условию, на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$ структуры J_0 и J_1 эквивариантно гомотопны. Гомотопия задает отображение $f_h:\partial G\times I\to\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x\oplus\mathbb{R}^{2l})$, поскольку пространство $\tau(M_G)|_y\oplus\mathbb{R}^{2l}$ должно быть J-инвариантным для любой точки $y\in\iota(\partial G)\subset\iota(G)$ и T^n-инвариантной структуры J на $\tau(M)\oplus\mathbb{R}^{2l}\big|_{\iota(G)}$. Мы можем склеить отображения f_1, f_2 и f_h в одно корректно определенное отображение $f_G:S^i\to\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x\oplus\mathbb{R}^{2l})$.

Аналогично тому, как это было сделано ранее, показывается, что гомотопический класс отображения f_G не зависит от выбора точки

$x \in \iota(G)$ и тривиализации расслоения $\tau(M_G)$ над $\iota(G)$. Более того, в силу леммы (4.26) класс $[f_G]$ равен нулю, если и только если гомотопия между J_0 и J_1 продолжается на M_G в классе инвариантных структур.

Определим различающую коцепь $d^i(J_0, J_1) \in C^i(\pi_i(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l})))$ по правилу $d^i(J_0, J_1)(G) = [f_G]$.

Нужно показать, что $d^i(J_0, J_1)$ действительно является клеточной коцепью.

Лемма 4.27. *Пусть $x \in \iota(G)$, $y \in \iota(P)$, $j \leqslant 2i + 2l - 2$, $i = \dim G, l > 0$. Тогда гомотопические группы $\pi_j(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l}))$ и $\pi_j(\mathbb{J}(\tau(M)|_y \oplus \mathbb{R}^{2l}))$ канонически изоморфны.*

□ Доказательство этой леммы полностью аналогично доказательству леммы (4.16). Искомый изоморфизм является композицией изоморфизмов вида $c_* : \pi_j(\mathbb{J}(\tau(M_Q)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l})) \to \pi_j(\mathbb{J}(\tau(M_L)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l}))$, где $Q \subset L$ – грани P, $\dim L = \dim Q + 1$. То, что c_* – изоморфизм, следует из леммы 4.6. Доказательство независимости искомого изоморфизма от цепочки вложенных граней, соединяющих G и P, совпадает с доказательством леммы (4.18). □

Лемма 4.28. $\delta d^i(J_0, J_1) = 0$.

□ Достаточно доказать следующее утверждение. Пусть $\dim Q = i+1$, $\partial Q = G_1 + \ldots + G_k$. Тогда $\sum\limits_{G \subset \partial Q} d^i(J_0, J_1)(G) = 0$.

Прежде всего отметим, что если $i = 1$, то коцепь $d^i(J_0, J_1)$ принимает значения в нулевой группе и условие леммы выполнено. Поэтому далее можно считать, что $i > 1$.

Рассмотрим пространство

$$Y = \{0\} \times \partial Q \cup \{1\} \times \partial Q \cup I \times (\partial Q \cap sk_{i-1}(P))$$

и его подпространства

$$Y_j = \{0\} \times G_j \cup \{1\} \times G_j \cup I \times \partial G_j.$$

Очевидно, Y_j гомеоморфно S^i.

Мы можем построить непрерывное отображение $h : Y \to \mathbb{J}(\tau(M_Q)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l})$, $x \in \iota(Q)$ такое, что $[h|_{Y_j}] = [f_{G_i}]$, используя то, что на $\iota(Q \cap sk_{i-1}(P))$ гомотопия между структурами J_0 и J_1 уже задана.

Отметим, что фиксировав тривиализацию расслоения $\tau(M_Q)$ над $\iota(Q)$, мы можем отождествить между собой пространства $\mathbb{J}(\tau(M_Q)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l})$ для всех $x \in \iota(Q)$.

Заметим теперь, что ограничения построенного отображения h на $\{0\} \times \partial Q$ и $\{1\} \times \partial Q$ гомотопны нулю, так как структуры J_0 и J_1 по условию обе продолжаются на M_Q. Отсюда следует, что сумма классов $\sum [h|_{Y_j}]$ также гомотопна нулю – доказательство завершается аналогично доказательству леммы (4.20). $\Box$

Лемма 4.29. *Предположим, что* $d^i(J_0, J_1) = \delta\beta$, $i+2l \geqslant 4$. *Тогда можно изменить уже построенную гомотопию на* $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P) \backslash sk_{i-2}(P))$ *так, чтобы коцепь* $d^i(J_0, J_1)$ *стала нулевой.*

$\Box$ Пусть G – i-мерная грань, $H \subset \partial G$, $\dim H = i - 1$. Поскольку $i+2l \geqslant 4$, $i \leqslant 2i+2l-4$, поэтому изоморфизм $c_*^{-1} : \pi_i(\mathbb{J}(\tau(M_G)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l})) \to \pi_i(\mathbb{J}(\tau(M_H)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l}))$, $x \in H$, корректно определен в силу леммы (4.17).

Так как гомотопия уже задана на $\pi^{-1}(sk_{i-1}(P))$, для грани H определено отображение $h_H : I \times Int\, H \to \mathbb{J}(\tau(M_H)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l})$, задающее эту гомотопию. Рассмотрим произвольное отображение $\psi_H : S^i \to \mathbb{J}(\tau(M_H)|_x \oplus \mathbb{R}^{2l})$, $y \in H$ – некоторая точка, такое, что $[\psi_H] = [-c_*^{-1}(\beta(H))]$. "Подкрутим" теперь отображение h_H на ψ_H, аналогично тому, как это было сделано в доказательстве леммы (4.21). Тогда для каждой i-мерной грани G значение $d^i(J_0, J_1)(G)$ изменится на сумму $\sum\limits_{H \subset \partial G} (-\beta(H))$. Поскольку $d^i(J_0, J_1) = \delta\beta$, лемма доказана. $\Box$

4.4.3 Доказательства следствий и примеры

Следствие (4.4) *Пусть* J_0 *и* J_1 *– две* T^n*-инвариантные почти комплексные структуры на квазиторическом многообразии* M*, согласованные с одной полиориентацией* o*. Тогда* J_0 *и* J_1 *гомотопны в классе неинвариантных почти комплексных структур на* M*.*

$\square$ Из теоремы (4.2) следует, что и J_0, и J_1 эквивалентны канонической стабильно комплексной структуре, построенной по полиориентации o. Следовательно, J_0 и J_1 стабильно эквивалентны между собой.

Структуры J_0 и J_1 соответствуют отображениям $f_0, f_1 : M \to BU(n)$ в классифицирующее пространство $BU(n)$ n-мерных комплексных векторных расслоений. Если $i : BU(n) \to BU(n+l)$ – стандартное вложение, то отображения $i \circ f_0$ и $i \circ f_1$ должны быть гомотопны. Вложение i эквивалентно расслоению гомотопических типов $BU(n) \to BU(n+l)$ со слоем $U(n+l)/U(n)$, гомотопические группы которого тривиальны до размерности $2n$ включительно ([26]). Поэтому задача построения гомотопии между f_0 и f_1 эквивалентна задаче построения гомотопии между сечениями расслоения над M, индуцированного с i. Поскольку $\dim M = 2n$ и $\pi_j(U(n+l)/U(n)) = 0$ при $j \leqslant 2n$, такая гомотопия существует. $\square$

Отметим, что не любая почти комплексная структура на квазиторическом многообразии M^{2n} обязана быть эквивалентна некоторой T^n-инвариантной. Уже в размерности 4 можно привести контрпример, используя теорему Ву ([27]).

Рассмотрим многообразие $\mathbb{C}P^2 \# 4\overline{\mathbb{C}P^2}$. Его форма пересечений, очевидно, диагональна и может быть задана с помощью образующих: $x^2 = 1, y_1^2 = y_2^2 = y_3^2 = y_4^2 = -1$. Согласно теореме Ву, почти комплексные структуры J на четырехмерном многообразии M находятся во взаимно-однозначном соответствии со когомологическими классами $c_1(J)$, удовлетворяющими следующим условиям:

1. $c_1^2(J) = 2\chi(M) + 3\sigma(M)$;

2. $c_1(J) \bmod 2 = w_2(M)$.

Первое условие в точности соответствует тому, что классы Черна новой структуры согласованы с формулами для эйлеровой характеристики и сигнатуры. Второе условие – необходимое для классов Черна любой почти комплексной структуры. Теорема Ву утверждает, что эти условия являются и достаточными для существования и единственности структуры с данными классами Черна.

Вернемся к многообразию $M = \mathbb{C}P^2 \# 4\overline{\mathbb{C}P^2}$. Класс Черна стандартной комплексной структуры на M, получающейся путем раздутий четырех точек на $\mathbb{C}P^2$, равен $3x - y_1 - \ldots - y_4$. Отсюда следует, что класс $w_2(M)$ равен $\tilde{x} + \tilde{y}_1 + \ldots + \tilde{y}_4 \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$, где тильдой обозначены образы классов $x, y_1, \ldots, y_4$ при редукции $\bmod 2$.

Если $c_1(J) = ax + \sum b_i y_i$, то условия из теоремы Ву для структуры J на M эквивалентны следующему:

1. $a^2 - b_1^2 - \ldots - b_4^2 = 5$;

2. числа $a, b_1, \ldots, b_4$ – нечетные.

Поскольку на знаки b_i эти условия не накладывают никаких ограничений, подходит, например, любая пятерка чисел $(a, b_1, \ldots, b_4)$ вида $a = \pm 3$, $b_1 = \pm 1$. Таким образом, на M существует как минимум 32 неэквивалентные почти комплексные структуры. Оказывается, можно пойти дальше и показать, что число классов $c_1(J)$, удовлетворяющих приведенным условиям, бесконечно велико (соответствующее рассуждение сообщено Е. Гречниковым).

Действительно, нам нужно доказать, что число решений в нечетных числах уравнения $a^2 - 5 = b_1^2 + \ldots + b_4^2$ бесконечно. Теорема Лагранжа утверждает, что любое натуральное число представимо в виде суммы четырех квадратов; покажем тогда, что если число x имеет вид $8k + 4$, то оно представимо и в виде суммы квадратов четырех нечетных чисел. Поскольку $a^2 = 1 \bmod 8$ для всех нечетных a, отсюда следует искомое утверждение для $x = a^2 - 5$.

Из сравнения по модулю 8 следует, что в представлении x в виде суммы четырех квадратов все числа либо одновременно нечетные, либо одновременно четные. В первом случае доказывать нечего. Если выполнено второе, то есть $x = (2c_1)^2 + \ldots + (2c_4)^2$ для некоторых целых $c_1, \ldots, c_4$, то положим $b_1 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$, $b_2 = c_1 + c_2 - c_3 - c_4$, $b_3 = c_1 - c_2 + c_3 - c_4$, $b_4 = c_1 - c_2 - c_3 + c_4$. Поскольку $x = 4 \bmod 8$, среди чисел c_i нечетное число нечетных, откуда следует, что все b_i нечетные.

Таким образом, на M существует бесконечно много попарно неэквивалентных почти комплексных структур, в то время, как инвариантных среди них – не более четырех в силу следствия (4.4) (на самом деле ровно две, стандартная и сопряженная).

Этот пример показывает, что конструкция "усреднения" почти комплексной структуры по орбитам действия тора – если бы ее удалось как-то провести – не может быть использована для доказательства теоремы (4.1): не любая почти комплексная структура эквивалентна инвариантной.

Перейдем теперь к исследованию множества T^n-инвариантных почти комплексных структур с точностью до эквивариантной гомотопии.

Следствие (4.5) *Пусть J_0 и J_1 – две T^n-инвариантные почти комплексные структуры на квазиторическом многообразии*

M, согласованные с одной полиориентацией o и совпадающие на $\pi^{-1}(sk_2(P^n))$. Тогда J_0 и J_1 гомотопны в классе инвариантных почти комплексных структур на M.

□ Проследим, как изменится доказательство теоремы (4.2), если указать в условии случай $l = 0$ – случай, соответствующий почти комплексным структурам. Единственное условие, которое могло бы быть нарушено – это условие $i + 2l \geqslant 4$ в доказательстве леммы (4.29). Из того, что J_0 и J_1 совпадают на $\pi^{-1}(sk_2(P^n))$ следует, что $i \geqslant 3$. В случае $i = 3$, $l = 0$ соответствующая группа коэффициентов равна $\pi_3(SO(3)/U(3))$ и является стабильной. В работе [16] показано, что эта группа тривиальна. □

Следствие (4.6) *Множество структур на M^{2n}, рассматриваемых с точностью до эквивариантной гомотопии и согласованных с данной положительной полиориентацией, может быть неканонически отождествлено с $\mathbb{Z}^{f_1(P)-f_0(P)+1}$. Здесь $f_1(P)$ – число ребер, $f_0(P)$ – число вершин многогранника P.*

□ Поскольку полиориентация положительна, на M^{2n} есть хотя бы одна T^n-инвариантная почти комплексная структура J_0. Предположим, что J_1 – другая структура на M^{2n}, согласованная с той же полиориентацией. В силу леммы (4.22) мы можем считать, что J_1 и J_2 согласованы с одной инвариантной метрикой, в силу леммы (4.25) – что J_1 и J_2 совпадают на $\pi^{-1}(sk_1(P))$. С другой стороны, предыдущее следствие гарантирует, что если J_0 и J_1 совпадают на $\pi^{-1}(sk_2(P))$, то они эквивариантно гомотопны.

Мы знаем, что препятствующие коцепи $\sigma^2_{J_0}$ и $\sigma^2_{J_1}$ обе являются нулевыми. Поэтому различающая коцепь $d^2(J_0, J_1)$ является коциклом. С другой стороны, если фиксировать структуру J_0 и некоторый коцикл $\beta \in C^2(P, \pi_2(SO(4)/U(2))) = C^2(P, \mathbb{Z})$, то в силу леммы (4.21) можно изменить структуру J_0, "подкрутив" соответствующие отображения двумерных граней G_j в $\mathbb{J}(\tau(M_{G_j}))$ на гомотопические классы $\beta(G_j)$. Условие $\delta\beta = 0$, гарантирует то, что препятствующая коцепь останется нулевой.

Это означает, что после того, как мы фиксировали структуру J_0, искомое множество всех структур может быть отождествлено с группой $\operatorname{Ker}\delta_2$, где $\delta_2 : C^2(P, \mathbb{Z}) \to C^3(P, \mathbb{Z})$ – стандартный дифференциал в коцепном комплексе. Группа $\operatorname{Ker}\delta_2$ – свободная абелева. Поскольку P ацикличен как цепной комплекс, размерность этой группы легко вычисляется – она равна $f_1(P) - f_0(P) + 1$. □

Следствие (4.7) *На любом квазиторическом многообразии $M^{2n}, n > 1$ с положительной полиориентацией существует бесконечное количество эквивариантно негомотопных друг другу T^n-инвариантных почти комплексных структур.*

$\square$ Поскольку $f_1(P) = \frac{n}{2} f_0(P)$, имеем $f_1(P) - f_0(P) + 1 = f_0(P)\frac{n-2}{2} + 1$. Это число всегда положительно при $n > 1$. $\square$

В качестве простейшего иллюстрирующего примера мы можем рассмотреть многообразие $\mathbb{C}P^2$. На нем имеется бесконечно много попарно эквивариантно негомотопных структур, которые становятся эквивалентными, если разрешить неэквивариантную гомотопию.

4.5 Связь с комбинаторикой многогранника. Инвариант $i(P)$

Теорема (4.1) показывает, что существование T-инвариантной почти комплексной структуры на полиориентированном квазиторическом многообразии M^{2n} равносильно положительности его полиориентации. Предположим теперь, что полиориентация на M^{2n} не является положительной. Верно ли, что можно всегда изменить ориентации характеристических подмногообразий так, чтобы получить положительную полиориентацию? Ответ на этот вопрос отрицательный, как показывает пример многообразия $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$. Более того, имеет место следующее утверждение.

Предложение 4.30. *Для каждого целого положительного числа $n \geqslant 2$ существует квазиторическое многообразие M^{2n}, не обладающее ни одной положительной полиориентацией (и следовательно, не допускающее никакой T^n-инвариантной почти комплексной структуры).*

$\square$ Рассмотрим многогранник $P = \Delta^{n-1} \times I$ и построим над ним характеристическую функцию λ_n, для которой знаки всех вершин, кроме одной, положительны. Это несложно сделать: достаточно рассмотреть матрицу размера $n \times (n+2)$, имеющую вид единичной матрицы, к которой приписаны два столбца – один целиком состоящий из минус единиц, во втором минус единицы стоят на всех позициях, кроме одной, где стоит единица.

Докажем индукцией по n, что на рассмотренном многообразии нельзя сменить полиориентацию так, чтобы получить во всех вершинах одинаковые знаки. Для $n = 2$ утверждение верно, так как многогранник P является квадратом, и число отрицательных знаков при любой замене полиориентации будет оставаться нечетным. Отметим, что случай $n = 2$ соответствует многообразию $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$.

Сведем теперь задачу для функции λ_n к λ_{n-1} по индукции. Предположим, что удалось изменить ориентации некоторых характеристических многообразий на P так, что знаки всех вершин стали одинаковыми. Пусть v – та единственная вершина, знак которой изначально был отрицателен. Назовем гипергрань отрицательной, если ее новая ориентация не совпадает с прежней.

Если $w \in P$ – некоторая вершина, то знак w должен был измениться, если к w примыкает нечетное число отрицательных гиперграней.

Рассмотрим теперь произвольную гипергрань $F \subset P$ вида $\Delta^{n-2} \times I$, содержащую вершину v. Назовем теперь гипергрань $G \subset F$ (являющуюся гранью коразмерности 2 в P) отрицательной, если G является в P пересечением F с отрицательной гипергранью. Теперь рассмотрим саму грань $F = \Delta^{n-2} \times I$ как многогранник и заметим, что четность числа отрицательных граней, примыкающих к v и к любой другой вершине, различны.

Получаем, что для многогранника F и характеристической функции λ_{n-1} можно так поменять ориентации характеристических подмногообразий, что все знаки станут одинаковы. $\square$

Проблема 4.31. Найти эффективный критерий существования положительной полиориентации на квазиторическом многообразии. Под эффективностью понимается полиномиальная сложность соответствующего алгоритма по числу гиперграней многогранника (и по другим компонентам f-вектора).

Предположим теперь, что на квазиторическом многообразии M^{2n} есть хотя бы одна положительная полиориентация o. Если M^{2n} с полиориентацией o соответствует паре (P, Λ), то тогда определен гомоморфизм

$$\phi_P : \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2^l,$$

где m – число гиперграней, l – число вершин P (мы предполагаем, что оба множества упорядочены). Гомоморфизм ϕ_P устроен очень просто. Фиксируем ориентацию многообразия M^{2n}. Тогда каждой полиориентации, множество которых теперь может быть отождествлено с группой $\mathbb{Z}_2^m$, соответствует l-мерный вектор знаков вершин P. Ядро этого гомоморфизма соответствует положительным полиориентациям M^{2n}. Обозначим его размерность за $i(P)$. Это – комбинаторный инвариант многогранника P.

Из доказанного следствия (4.4) о неэквивариантной эквивалентности структур на M^{2n} вытекает следующее утверждение.

Следствие 4.32. *Число T^n-инвариантных почти комплексных структур на многообразии M^{2n}, задаваемом комбинаторными данными (P, Λ), не превосходит $2^{i(P)+1}$. Структуры здесь рассматриваются с точностью до гомотопии, не обязательно являющейся эквивариантной.*

Неравенство в следствии нестрогое, поскольку структуры, соответствующие различным полиориентациям, могут также быть неэквивариантно эквивалентны. Отметим, что необходимым и достаточным условием их совпадения является совпадение классов Черна соответствующих структурам комплексных расслоений. Это следует из того, что многообразие M^{2n} имеет клетки лишь в четных размерностях, и характер Черна, следовательно, определяет мономорфное вложение комплексного K-функтора M^{2n} в пространство четных рациональных когомологий.

При $n = 2$, очевидно, $i(P)$ всегда равно 1, поскольку P – многоугольник. Уже в случае $n = 3$ вычисление инварианта $i(P)$ представляет интерес. Оказывается, что имеет место следующая оценка на $i(P)$, зависящая только от размерности многогранника.

Предложение 4.33. $i(P) \leqslant n - 1$.

$\square$ Пусть $F_1, \ldots, F_{n-1}$ – произвольные гиперграни P, имеющие общую вершину v. Предположим, что знаки гиперграней $F_1, \ldots, F_{n-1}$ уже заданы. Покажем тогда, что можно не более, чем одним способом, определить знаки остальных гиперграней так, чтобы знаки *вершин* были положительны (знак вершины – это произведение знаков гиперграней, в ней сходящихся).

Перейдем к двойственному многограннику P' и переформулируем теперь задачу следующим образом:

В симплициальном n-мерном многограннике P' покрашена $n-1$ вершина некоторого симплекса размерности $n-1$. Если для гиперграни A выполнено условие, что все ее вершины, кроме одной, покрашены, то разрешается покрасить и оставшуюся вершину. Доказать, что все вершины можно покрасить.

Решение этой задачи таково: на каждом шаге будем красить наряду с вершиной и гиперграни-симплексы по очевидному правилу: гипергрань покрашена, если все ее n вершин покрашены. После первого шага в P' покрашены n вершин и одна гипергрань. Далее по индукции поступаем так: если еще не все вершины на данном шаге покрашены, то тогда в P' найдутся покрашенная и непокрашенная гипергрань B и C, находящиеся по соседству. Следовательно, мы можем покрасить гипергрань C вместе с ее оставшейся вершиной. $\square$

Следствие (теорема 4.8). На квазиторическом многообразии M^{2n} существует не более 2^n инвариантных почти комплексных структур.

4.6 Характеристические числа

4.6.1 Обзор результатов в неэквивариантном случае

Вопрос о том, какие характеристические числа в принципе достижимы на данном классе многообразий ("география характеристических чисел"), хорошо известен. Мы будем иметь дело исключительно с характеристическими классами и числами Черна. Для их определения необходимо, чтобы многообразие было гладким и замкнутым, а в его касательном расслоении была введена комплексная, почти комплексная или стабильно комплексная структура.

Наиболее общим классом является класс многообразий со стабильно комплексной структурой в касательном расслоении, порождающий кольцо комплексных кобордизмов.

При помощи методов спектральной последовательности Адамса было доказано ([18], [19]), что это кольцо изоморфно $\mathbb{Z}[a_1, a_2, \ldots]$, где $(a_1, a_2, \ldots)$ – классы кобордизмов некоторых стабильно комплексных многообразий вещественной размерности $2, 4, \ldots,$ соответственно. В частности, любое нечетномерное стабильно комплексное многообразие комплексно кобордантно нулю.

Основное утверждение, связывающее теорию комплексных кобордизмов с характеристическими числами, таково.

Теорема 4.34. *([18],[19]). Два стабильно комплексных многообразия комплексно кобордантны, если и только если их наборы характеристических чисел совпадают.*

При этом не каждый набор целых чисел может служить набором характеристических чисел некоторого стабильно комплексного многообразия – существуют различные ограничения на их делимость. Например, в вещественной размерности 2 единственное характеристическое число $c_1(M)$ обязано быть четным. В вещественной размерности 4 сумма характеристических чисел $c_1^2(M)$ и $c_2(M)$ обязана делиться на 12 – это вытекает из целочисленности рода Тодда, о котором мы еще скажем ниже.

Гораздо интереснее задача становится, если ограничить ее на класс неособых комплексных алгебраических многообразий. Если дополнительно потребовать связность многообразия, то уже в комплексной размерности 1 появляется новое ограничение: теперь $c_1(M) \leqslant 2$.

В комплексной размерности 2 также имеется ограничение – неравенство Богомолова-Мияока-Яо $c_1(M)^2 \leqslant 3c_2(M)$ для связных комплексных поверхностей. Обобщение этого неравенства на высшие размерности выглядит следующим образом ([25], стр. 376):

$$(-1)^n c_2(M)c_1(M)^{n-2} \geqslant \frac{(-1)^n n}{2(n+1)} c_1(M)^n$$

Тем не менее, полное описание множества характеристических чисел связных алгебраических многообразий до сих пор не получено. Эта задача известна как проблема Хирцебруха.

Если же убрать требование связности алгебраического многообразия, то в этом случае все ограничения, кроме делимостей, пропадают.

Предложение 4.35. *Набор чисел Черна любого стабильно комплексного многообразия является также и набором чисел Черна некоторого неособого комплексного алгебраического многообразия, возможно, несвязного.*

Доказательство можно найти в [21]. Оно существенно опирается на следующий результат Милнора, вытекающий из свойств гиперповерхностей $H_{r,t}$ ([18]).

Теорема 4.36. *Набор полиномиальных образующих в кольце комплексных кобордизмов может быть выбран в классе несвязных комплексных алгебраических многообразий.*

Отсюда очевидно следует тот факт, что любой класс комплексных кобордизмов представим почти комплексным многообразием, не обязательно связным.

Теорема 4.37. *Любой класс комплексных кобордизмов вещественной размерности более трех представим связным почти комплексным многообразием.*

Доказательство можно найти в работе [12]. Основная часть – доказательство существования операции "суммы" в классе почти комплексных многообразий. Более точно, имеет место следующее утверждение.

Предложение 4.38. *Пусть M^{2n} и N^{2n} – почти комплексные многообразия. Тогда многообразие $X^{2n} = M^{2n}\#(S^2 \times S^{2n-2})\#N^{2n}$ также допускает почти комплексную структуру, причем соответствующий ей класс комплексных кобордизмов равен сумме классов $[M]$ и $[N]$.*

Доказательство последнего утверждения основано на теории препятствий.

4.6.2 Полиориентированные квазиторические многообразия

Онсовной результат, связывающий теорию квазиторических многообразий и характеристических чисел, был получен в работе [6].

Теорема 4.39 ([6]). *Любой класс комплексных кобордизмов в размерности более двух реализуется квазиторическим многообразием, стабильно комплексная структура на котором определена его полиориентацией.*

Доказательство состоит из двух основных частей:

1. Конструкция эквивариантной связной суммы ([9],[6]). Пусть M_1 и M_2 – квазиторические многообразия, P_1 и P_2 – соответствующие им простые многогранники. Если v_1 и v_2 – неподвижные точки действия тора на M_1 и M_2 соответственно, то тогда определено квазиторическое многообразие $M_1\#_{v_1v_2}M_2$, диффеоморфное связной сумме M_1 и M_2, причем фактор по действию тора изоморфен связной сумме многогранников P_1 и P_2.

   Более того, полиориентации M_1 и M_2 допускают продолжение на $M_1\#_{v_1v_2}M_2$ – здесь существенно, что знаки неподвижных точек v_1 и v_2 различны. В силу формулы для классов Черна полиориентированного квазиторического многообразия ([5]) мы заключаем, что класс кобордизмов $[M_1\#_{v_1v_2}M_2]$ равен сумме классов $[M_1]$ и $[M_2]$.

   Отсюда следует, что множество классов кобордизмов, реализуемое квазиторическими многообразиями, образует подгруппу в кольце $U_*(pt)$. Взятие обратного элемента соответствует обращению ориентации многообразия. Если M_1 и M_2 – многообразия, все неподвижные точки которых имеют один знак, то для взятия эквивариантной связной суммы можно применить следующий трюк: взять в качестве промежуточного многообразия квазиторическое многообразие $S^2 \times \ldots \times S^2$ с полиориентацией, соответствующей произведению S^2 с тривиальной стабильно комплексной структурой. Это многообразие имеет неподвижные точки обоих знаков и кобордантно нулю в $U_*(pt)$.

2. Как известно, система полиномиальных образующих в комплексных кобордизмах может быть описана следующим образом. В каждой размерности соответствующая полиномиальная образующая a_n может быть реализована алгебраическим многообразием, не обязательно связным. Это многообразие является дизъюнктным объединением некоторого количества проективных пространств $\mathbb{C}P^n$ и гиперповерхностей Милнора $H_{r,t}, r+t=n+1$ ([19]). Многообразие $H_{r,t}$ квазиторическим при $r>1, t>1$ не является (см. [5]). Но оказывается, что башня Ботта $B_{r,t}$ допускает отображение степени 1 на $H_{r,t}$ и имеет то же значение "числа Милнора"$s_{(n)}$, что и $H_{r,t}$. Поэтому в каждой размерности n существует представитель, являющийся несвязным объединением квазиторических многообразий. Теперь достаточно применить конструкцию эквивариантной связной суммы.

Таким образом, в размерности больше двух можно наблюдать следующую картину: любой класс кобордизмов реализуется с одной стороны, некоторым полиориентированным квазиторическим многообразием, с другой – связным почти комплексным.

Оказывается, тот факт, что любой класс реализуется почти комплексным квазиторическим многообразием, неверен. Одно из тривиальных ограничений, которое этому препятствует – положительность старшего числа Черна c_n. Действительно, для почти комплексных многообразий старшее число Черна совпадает с эйлеровой характеристикой. Эйлерова характеристика квазиторических многообразий совпадает с числом неподвижных точек действия и, следовательно, положительна.

Менее тривиальным ограничением является положительность рода Тодда, которая следует из явных комбинаторных формул, полученных Т.Е.Пановым в работе [20].

Приведем полное описание характеристических чисел почти комплексных квазиторических многообразий в размерности 4.

Предложение 4.40. *Любая пара целых чисел (p, q), удовлетворяющая условию делимости $12|(p+q)$ и неравенству $12-q \leqslant p \leqslant 5q-6$, является парой характеристических чисел $(c_1^2(M), c_2(M))$ некоторого* *почти комплексного четырехмерного квазиторического многообразия M.*

$\square$ Докажем сперва необходимость обоих условий. Пусть b_2^+ и b_2^- – число положительных и отрицательных квадратов в диагонализации формы пересечений M. Поскольку M односвязно, имеем

$$\chi(M) = 2 + b_2^+ + b_2^-$$

$$\operatorname{sign}(M) = b_2^+ - b_2^-$$

Получаем, что $td(M) = \frac{1+b_2^+}{2}$, откуда следует, что на полиориентированном квазиторическом многообразии число b_2^+ нечетно. В частности, $b_2^+ \geqslant 1$. Кроме того, очевидно, $b_2^- \geqslant 0$. Оба числа $\chi(M)$ и $\operatorname{sign}(M)$ выражаются через числа Черна M следующим образом: $\chi(M) = c_2(M), \operatorname{sign}(M) = \frac{c_1^2(M)-2c_2(M)}{3}$. Отсюда следует, что $c_1^2(M) + c_2(M) \geqslant 12$ и $c_1^2(M) \leqslant 5c_2(M) - 6$. Условие делимости – это в точности условие целочисленности рода Тодда.

Достаточность удобнее всего доказывать в терминах чисел b_2^+ и b_2^-. Прежде всего отметим, что условие целочисленности рода Тодда в точности эквивалентно тому, что число b_2^+ нечетно. Нужно теперь доказать, что любая пара целых чисел (a, b), где b – положительное, a – нечетное положительное, может служить парой чисел (b_2^+, b_2^-) для некоторого четырехмерного почти комплексного квазиторического многообразия.

Для случая $b_2^- = 0$ искомые многообразия являются связной суммой нечетного числа $\mathbb{C}P^2$. Действительно, многообразие $\mathbb{C}P^2$ допускает положительную полиориентацию, так как является торическим, а многообразие $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ – полиориентацию, в которой знаки всех вершин, кроме одной, положительны. Отсюда при помощи конструкции эквивариантной связной суммы получаем, что связная сумма нечетного числа $\mathbb{C}P^2$ допускает положительную полиориентацию.

От квазиторического многообразия, соответствующего паре $(b_2^+, 0)$, можно перейти к многообразию с (b_2^+, b_2^-) при помощи (b_2^-) операций раздутия неподвижной точки. Заметим, что раздутие – локальная операция, и для ее проведения достаточно ввести T^2-инвариантную комплексную структуру в окрестности неподвижной точки действия. На топологическом же уровне раздутие четырехмерного многообразия соответствует взятию связной суммы с $\overline{\mathbb{C}P^2}$ – это завершает доказательство. $\square$

Список литературы

[1] Michael F. Atiyah. Convexity and commuting Hamiltonians. Bull. London Math. Soc. 14 (1982), no. 1, 1-15.

[2] Michéle Audin. The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds. Progress in Mathematics 93. Birkhäuser, Basel, 1991.

[3] Frédéric Bosio and Laurent Meersseman. Real quadrics in $\mathbb{C}^n$, complex manifolds and convex polytopes. Acta Math. 197 (2006), no. 1, 53-127.

[4] Glen E. Bredon. Introduction to compact transformation groups. Academic Press, New York-London, 1972. [Русский перевод: Г. Бредон, Введение в теорию компактных групп преобразований, М.: Наука, 1980.]

[5] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. Торические действия в топологии и комбинаторике. Издательство МЦНМО, Москва, 2004.

[6] Victor M. Buchstaber, Taras E. Panov and Nigel Ray. Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds. Moscow Math. J. 7 (2007), no. 2, 219-242; arXiv:math.AT/0609346.

[7] David A. Cox. The homogeneous coordinate ring of a toric variety. J. Algebraic Geom. 4 (1995), no. 1, 17-50; arXiv:alg-geom/9210008.

[8] Michael W. Davis. Smooth G-manifolds as collections of fiber bundles. Pacific J. Math., 77 (1978), 315-363.

[9] Michael W. Davis and Tadeusz Januszkiewicz. Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions. Duke Math. J., 62 (1991), no. 2, 417-451.

[10] K.E.Feldman. Hirzebruch genera of manifolds equipped with a Hamiltonian circle action. arXiv:math/0110028v2

[11] William Fulton. Introduction to Toric Varieties. Ann. of Math. Studies 131, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1993.

[12] H. Geiges. Chern numbers of almost complex manifolds. Proc. AMS, Volume 129, Number 12, Pages 3749-3752.

[13] Victor Guillemin. Moment Maps and Combinatorial Invariants of Hamiltonian T^n-spaces. Progress in Mathematics 122. Birkhaúser, Boston, 1994.

[14] А. А. Кустарев. Эквивариантные почти комплексные структуры на квазиторических многообразиях. УМН, 2009, 64:1(385), 153-154.

[15] А. А. Кустарев. Эквивариантные почти комплексные структуры на квазиторических многообразиях Тр. МИАН, 2009, 266, 140-148.

[16] W. Massey. Obstructions to the existence of almost complex structures. Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961) 559-564.

[17] Mikiya Masuda. Unitary toric manifolds, multi-fans and equivariant index. Tohoku Math. J. 51 (1999), no. 2, 237-265.

[18] J. Milnor. On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue, I. Amer. J. Math. 82 (1960).

[19] С. П. Новиков. Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов. Изв. АН СССР, сер. матем. 31 (1967), вып. 4, стр. 855-951.

[20] Т. Е. Панов. Роды Хирцебруха многообразий с действием тора. Известия РАН, сер. матем. 65 (2001), вып. 3, стр. 123-138; arXiv:math.AT/9910083.

[21] Robert E. Stong. Notes on Cobordism Theory. Princeton Univ. Press, Princeton, 1968. [Русский перевод: Р. Стонг, Заметки по теории кобордизмов (с приложением В. М. Бухштабера) М.: Мир, 1973.]

[22] R. H. Szczarba. On tangent bundles of fibre spaces and quotient spaces. Amer. J. Math. 86 (1964), 685-697.

[23] C.H.Taubes. The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms // Math. Res. Lett. 1994. V.1. P.809-822.

[24] Emery Thomas. Complex structures on real vector bundles. Amer. J. Math. 89 (1967), 887-908.

[25] Международный конгресс математиков в Киото 1990 г.: Избранные доклады (сост. Тихомиров В.М.).

[26] А.Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.

[27] W.-T. Wu. Sur le classes caractéristique des structures fibros sphériques // Actualites Sci. Industr. 1183 (1952).

[28] Gúnter M. Ziegler. Lectures on polytopes. Graduate Texts in Mathematics, vol. 152, Springer-Verlag, New York, 1995.