ФГБОУ ВПО “МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА”
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Лимонченко Иван Юрьевич

КОМБИНАТОРНАЯ КОММУТАТИВНАЯ АЛГЕБРА И ТОПОЛОГИЯ МОМЕНТ-УГОЛ КОМПЛЕКСОВ

01.01.04 - геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор Т. Е. Панов

Москва - 2014

Оглавление

Введение

Актуальность темы

В настоящее время на основе классических результатов комбинаторной коммутативной алгебры, алгебраической топологии, выпуклой геометрии, симплектической геометрии и топологии, теории компактных групп преобрзований, активно развивается торическая топология. В то же время, актуальным разделом алгебраической геометрии стала торическая геометрия, изучающая свойства торических многообразий. Каждому выпуклому многограннику в $\mathbb{R}^n$ с рациональными координатами вершин можно сопоставить алгебраическое многообразие с действием алгебраического тора $(\mathbb{C}^*)^n$, являющееся эквивариантной компактификацией тора $(\mathbb{C}^*)^n$ относительно его стандартного действия. С одной стороны, эта конструкция дает обширный класс примеров алгебраических многообразий, свойства которых можно эффективно описывать в терминах комбинаторных данных. С другой стороны, конструкция торического многообразия позволяет доказывать сильные результаты о комбинаторике многогранников при помощи методов алгебраической геометрии. Одним из таких результатов является классическая g-теорема, дающая полную характеризацию f-векторов простых многогранников [24].

М. Дэвис и Т. Янушкиевич в работе [42] ввели понятие квазиторического многообразия, являющееся топологическим аналогом торического многообразия. На квазиторическом многообразии M^{2n} определено действие компактного тора T^n, локально изоморфное стандартному действию T^n на $\mathbb{C}^n$, а пространством орбит этого действия является выпуклый простой многогранник P^n. Квазиторические многообразия представляют обширный класс примеров топологических пространств с богатой геометрией и топологией, причем их свойства можно описывать в комбинаторных терминах. В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов и Н. Рэй [14, 33] показали, что в размерностях, больших двух, каждый класс комплексных кобордизмов содержит связное квазиторическое многообразие с естественной стабильно комплексной структурой, согласованной с действием тора.

Для определения квазиторического многообразия над простым многогранником P^n с m гипергранями М. Дэвису и Т. Янушкиевичу потребовалась конструкция $(m+n)$-мерного многообразия $\mathcal{Z}_P$ с каноническим действием тора T^m, для которого P является пространством орбит. Каждое квазиторическое многообразие над простым многогранником P, в случае если они существуют, гомеоморфно фактор-пространству многообразия $\mathcal{Z}_P$ по свободному действию некоторого подтора $T^{m-n} \subset T^m$. В. М. Бухштабер и Т. Е. Панов предложили рассматривать многообразия $\mathcal{Z}_P$ в качестве основного объекта исследований в торической топологии и развили различные подходы к изучению этих пространств, названных ими *момент-угол многообразиями* [10, 11, 13, 33].

В работе [11] показано, что существует более общая алгебро-топологическая конструкция, сопоставляющая каждому симплициальному комплексу K на m вершинах клеточное пространство – *момент-угол комплекс* $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$ с действием тора T^m. При помощи канонического разбиения простого многогранника на кубы В. М. Бухштабер и Т. Е. Панов показали, что для простого многогранника P момент-угол многообразие $\mathcal{Z}_P$ эквивариантно гомеоморфно момент-угол комплексу $\mathcal{Z}_{\partial P^*}(D^2, S^1)$, где ∂P^* — граница двойственного к P симплициального многогранника [11].

Термин «момент-угол комплекс» отсылает к клеточному разбиению пространства $\mathcal{Z}_K$, которое может быть получено как результат склейки произведений полидисков и торов, причем последние параметризуются симплексами комплекса K. Момент-угол комплексы были введены в работах [30], [31] как клеточные разбиения торических пространств, возникающих в некоторых конструкциях алгебраической геометрии, симплектической геометрии и комбинаторной топологии, на первый взгляд, не связанных между собой. Среди них

- Пересечения специального вида вещественных и эрмитовых квадрик, изучавшиеся в топологии и голоморфной динамике, см. [34], [59], [60], [25];

- Множества уровня отображения моментов, возникающие в конструкции гамильтоновых торических многообразий при помощи симплектической редукции, см. [55], [20];
- Ряд конструкций пространств орбит $P \times G/\sim$, где P – многогранник, а G – конечная группа или тор, источником которых является теория групп Кокстера [76], [41], [42];
- Дополнения конфигураций координатных подпространств в комплексном пространстве, возникающие в конструкции торических многообразий как алгебраических факторов [39], и также изученные в общей теории конфигураций плоскостей [49], [58].

Исходя из существования естественной клеточной структуры на пространстве $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$ В. М. Бухштабер и Т. Е. Панов [11] вычислили кольцо когомологий над $\mathbb{Z}$ момент-угол комплексов и момент-угол многообразий простых многогранников. Они показали также, что для произвольного симплициального комплекса K на m вершинах имеет место изоморфизм

$$H^*(\mathcal{Z}_K(D^2, S^1); \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbb{Z}[K], \mathbb{Z}),$$

где $\mathbb{Z}[K]$ — алгебра Стенли–Райснера (кольцо граней) симплициального комплекса K. Их подход к исследованию когомологий получил развитие в работах И. В. Баскакова [3, 4].

В диссертации исследована связь между комбинаторной структурой (частично упорядоченным множеством граней) простого многогранника P (или произвольного комплекса K, уже необязательно являющегося многогранной сферой $K = K_P = \partial P^*$), комбинаторно-алгебраическими и гомологическими свойствами алгебры Стенли–Райснера $\mathbb{Z}[K]$ и топологической структурой момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K$. В общем случае топология $\mathcal{Z}_K$ чрезвычайно сложна, но в ряде примеров классических выпуклых простых многогранников удается описать (по крайней мере аддитивную) структуру кольца когомологий $H^*(\mathcal{Z}_K(D^2, S^1); \mathbb{Z})$, а в некоторых случаях и получить описание топологического типа $\mathcal{Z}_K$.

Теория момент-угол комплексов тесно связана с торической геометрией. Торическое алгебраическое многообразие, соответствующее выпуклому рациональному многограннику, можно определить при помощи конструкции

Батырева–Кокса [39]. А именно, рациональному многограннику P с m гипергранями ставится в соответствие пространство $\mathbb{C}^m \setminus A_P$ — дополнение до конфигурации координатных подпространств, а торическое многообразие определяется как категорный фактор этого дополнения по действию некоторой алгебраической подгруппы некомпактного тора $(\mathbb{C}^*)^m$. Алгебраическое многообразие $\mathbb{C}^m \setminus A_P$ является алгебраическим аналогом момент-угол пространства $\mathcal{Z}_P$. Между конфигурациями координатных подпространств пространства $\mathbb{C}^m$ и симплициальными комплексами на m вершинах имеется естественная биекция, которая сопоставляет симплициальному комплексу K конфигурацию $\{L_I \,|\, I \notin K\}$, где $L_I = \{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid z_i = 0 \text{ при } i \in I\}$. При такой биекции конфигурации плоскостей A_P из конструкции Батырева–Кокса соответствует нерв-комплекс K_P.

Согласно результатам [11, 42], когомологии и эквивариантные когомологии момент-угол пространства $\mathcal{Z}_P$ выражаются в терминах алгебры Стенли–Райснера нерв-комплекса K_P. Алгебры Стенли–Райснера, введенные в работе [71], являются классическим объектом изучения в комбинаторной коммутативной алгебре. Произвольному конечному симплициальному комплексу K ставится в соответствие градуированная алгебра Стенли–Райснера над полем $\Bbbk$. Такое сопоставление позволило изучать комбинаторные свойства симплициальных комплексов в терминах свойств их алгебр Стенли–Райснера при помощи развитой техники коммутативной и гомологической алгебры. В случае обобщенных многогранников усечения в диссертации дается описание их идеала Стенли–Райснера и вычисляются все их биградуированные (алгебраические) числа Бетти. Биградуированными числами Бетти называются ранги модулей свободной резольвенты,

$$\beta^{-i,2j}(K) = \operatorname{rk} \operatorname{Tor}^{-i,2j}_{\Bbbk[v_1,\ldots,v_m]}(\Bbbk[K], \Bbbk).$$

Согласно теореме Хохстера [54], биградуированные числа Бетти определяются топологией полных подкомплексов:

$$\beta^{-i,2j}(K) = \sum_{J \subseteq [m], |J| = j} \operatorname{rk} \widetilde{H}^{j-i-1}(K_J; \Bbbk).$$

В работах В. М. Бухштабера и Т. Е. Панова было приведено новое доказательство этой формулы, основанное на интерпретации Tor-алгебры как алгебры когомологий момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$. И. В. Баскаковым [3] было описано умножение в Tor-алгебре в терминах полных подкомплексов симплициального комплекса K. Вычисление биградуированных чисел Бетти момент-угол комплексов дает возможность оценить ранги групп гомологий момент-угол комплексов и многообразий и вместе с этим дать оценку на дефект (разность между левой и правой частями неравенства) в известной гипотезе Гальперина о торическом ранге для конечномерных клеточных пространств с почти свободным действием тора, доказанной для момент-угол пространств в [19].

В работах А. Постникова [69] и Е. Фейхтнер и Б. Штурмфельса [43] был введен важный класс простых многогранников, называемых *нестоэдрами*. Как было показано А. Зелевинским [77], любой нестоэдр является многогранником Дельзанта. Наиболее известными и важными в геометрических и практических приложениях из них являются пермутоэдры, стеллаэдры, ассоциаэдры (или многогранники Сташефа) и циклоэдры (или многогранники Ботта–Таубса). В диссертации приводится общее определение нестоэдров как сумм Минковского симплексов, а также дается вычисление некоторых биградуированных чисел Бетти вида $\beta^{-i,2(i+1)}$ и доказывается обращение их в нуль, начиная с некоторого $i = i_{max}$, имеющего геометрическое описание. Также в диссертации будет показано, что серии пермутоэдров и стеллаэдров дают примеры момент-угол многообразий, в кольце когомологий которых может быть произвольно сложное кручение, причем оценка на минимальную размерность, в которой возникает элемент данного конечного порядка, может быть получена, если известны минимальные триангуляции пространств с соответствующим кручением в гомологиях (например, пространства Мура, линзовые пространства и надстройки над ними). В то же время, целочисленные когомологии $\mathcal{Z}_P$ для некоторых граф-ассоциаэдров и других классов простых многогранников свободны от кручений. В диссертации также исследован вопрос о нетривиальных произведениях Масси в когомологиях 3-мерных граф-ассоциаэдров, где применяется конструкция Баскакова [4].

С помощью результатов [48] в диссертации показано, что в классе обобщенных многогранников усечения топологическая эквивалентность момент-угол многообразия связной сумме произведений сфер, с двумя сферами в каждом произведении, равносильна минимальной неголодовости алгебры Стенли–Райс–

нера $\Bbbk[P]$. Понятие кольца Голода возникло первоначально в гомологической алгебре в работе Е. С. Голода [15] для нетеровых локальных колец. Теорема Бухштабера и Панова о кольце когомологий $\mathcal{Z}_P$ показывает, что свойство голодовости алгебры $\Bbbk[K]$ равносильно над полем тривиальности умножения Колмогорова-Александера и всех высших произведений Масси в кольце когомологий $H^*(\mathcal{Z}_K(D^2, S^1); \Bbbk)$ над любым полем $\Bbbk$. Понятие минимальной неголодовости комплекса K (если основное поле $\Bbbk$ фиксировано) введено в работе А.Берглунда и М.Йолленбека [23], где доказана минимальная неголодовость границ многогранников пирамидальной надстройки (двойственных к многогранникам усечения). С помощью методов и результатов торической топологии и комбинаторной коммутативной алгебры в диссертации обобщен этот результат и получен критерий минимальной неголодовости колец граней в случае срезок произвольного числа вершин произведений симплексов любых размерностей.

Легко показать, что любой выпуклый простой n-мерный многогранник с $m = n + 2$ гипергранями проективно эквивалентен прямому произведению двух симплексов. Таким образом, первый нетривиальный случай возникает, когда $m = n + 3$. Полная комбинаторная классификация таких многогранников была получена в книге Б. Грюнбаума [53] при помощи так называемых «звездных» диаграмм, а также М. Перлесом на основе диаграмм Гейла, который также получил формулу для числа комбинаторных типов. Результаты В. М. Бухштабера и Т. Е. Панова [33] позволяют применить теорему Лопез де Медрано [59] о пересечении квадрик к момент-угол многообразиям и получить, что для многогранника P^n с $m = n + 3$ многообразие $\mathcal{Z}_P$ является либо прямым произведением трех сфер нечетной размерности, либо связной суммой прямых произведений сфер по две сферы в каждом произведении, причем количество сфер и их размерности определяются диаграммой Гейла многогранника. В диссертации исследованы кольца граней таких многогранников и получен критерий, когда они обладают свойством голодовости или минимальной неголодовости.

Последняя часть диссертации посвящена доказательству замкнутости класса минимально неголодовских комплексов относительно некоторых симплициальных операций, для которых в свою очередь имеется описание перестроек и изменения топологического типа момент-угол многообразий. Рассмотрения этой части диссертации мотивированы гипотезой С.Гитлера и С.Лопез де Медрано о том, что если многообразие $\mathcal{Z}_P$ гомеоморфно связной сумме произведений сфер, с двумя сферами в каждом произведении, то это же верно и для произвольной срезки вершин многогранника P [48]. Вначале мы приводим примеры, которые показывают, что для срезок граней положительной размерности это неверно. Основным результатом этой части является доказательство того, что операции срезки вершин и, более общая, связной суммы двух простых многогранников, не выводит кольцо Стенли–Райснера из класса минимально неголодовских градуированных колец. Наконец, мы приводим пример голодовского симплициального комплекса, свободного от кручений в гомологиях, момент-угол комплекс которого не является гомотопическим букетом сфер. Поскольку связная сумма произведений сфер получается из букета сфер приклеиванием диска максимальной размерности по итерированному отображению Уайтхеда, этот результат связан с поиском алгебраической аппроксимации случая связной суммы произведений сфер. Он показывает, в частности, что требование минимальной неголодовости и отсутствия кручений в целочисленных гомологиях полных подкомплексов K является необходимым, но не достаточным условием для того, чтобы $\mathcal{Z}_K$ было связной суммой произведений сфер.

Цель диссертации

Целью работы является изучение связи, существующей между комбинаторно-алгебраическими свойствами выпуклых многогранников и симплициальных комплексов, коммутативно-алгебраическими свойствами их колец Стенли–Райснера и топологическими свойствами их момент-угол комплексов.

Методы исследования

В работе используются методы торической топологии, алгебраической топологии, теории многогранников, комбинаторики и алгебры.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и заключаются в следующем:

1. Дано описание биградуированных чисел Бетти граф-ассоциаэдров, в частности, пермутоэдров, стеллаэдров, ассоциаэдров и циклоэдров.
   Пусть $P = P_\Gamma$ – граф-ассоциаэдр на связном графе Γ. Тогда $\beta^{-i,2(i+1)}(P) = 0$ для $i > i_{max}$. Число i_{max} есть максимальное число связных подграфов в графе Γ, которое может нетривиально пересекать данный связный подграф. Последнее означает, что у двух подграфов Γ_1 и Γ_2 либо есть общая вершина (но ни один из них не лежит в другом), либо подграф на объединении их вершин снова связен. Назовем такой подграф выделенным. Число $\beta^{-i_{max},2(i_{max}+1)}(P)$ равно числу выделенных подграфов в Γ.
   Для четырех классических серий граф-ассоциаэдров мы имеем:

   - Пусть $P = As^n$ есть n-мерный ассоциаэдр, $n \geq 3$. Биградуированные числа Бетти многогранника P удовлетворяют соотношениям

     $$\beta^{-q,2(q+1)}(P) = \begin{cases} n+3, & \text{если } n \text{ четно;} \\ \frac{n+3}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно;} \end{cases}$$
     $$\beta^{-i,2(i+1)}(P) = 0 \quad \text{для } i \geq q+1,$$

     где $q = q(n)$ определено так:

     $$q = q(n) = \begin{cases} \frac{n(n+2)}{4}, & \text{если } n \text{ четно;} \\ \frac{(n+1)^2}{4}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

   - Пусть $P = Cy^n$ есть n-мерный циклоэдр, $n \geq 3$. Биградуированные числа Бетти многогранника P удовлетворяют соотношениям

     $$\beta^{-q,2(q+1)}(P) = \begin{cases} 2n+2, & \text{если } n \text{ четно;} \\ n+1, & \text{если } n \text{ нечетно;} \end{cases}$$
     $$\beta^{-i,2(i+1)}(P) = 0 \quad \text{для } i \geq q+1,$$

где $q = q(n)$ определено так:

$$q = q(n) = \begin{cases} \frac{n(n+2)-2}{2}, & \text{если } n \text{ четно;} \\ \frac{(n+1)^2-2}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

- Пусть $P = Pe^n$ есть n-мерный пермутоэдр, $n \geq 3$. Биградуированные числа Бетти многогранника P удовлетворяют соотношениям

$$\beta^{-q,2(q+1)}(P) = \binom{n+1}{[\frac{n+1}{2}]}$$

$$\beta^{-i,2(i+1)}(P) = 0 \quad \text{для } i \geq q+1,$$

где $q = q(n) = 2^{n+1} - 2^{[\frac{n+1}{2}]} - 2^{[\frac{n-1}{2}]} + 1$

- Пусть $P = St^n$ есть n-мерный стеллаэдр, $n \geq 3$. Биградуированные числа Бетти многогранника P удовлетворяют соотношениям

$$\beta^{-q,2(q+1)}(P) = \binom{n}{[\frac{n}{2}]}$$

$$\beta^{-i,2(i+1)}(P) = 0 \quad \text{для } i \geq q+1,$$

где $q = q(n) = 2^n - 2^{[\frac{n}{2}]} - 2^{[\frac{n+1}{2}]} + [\frac{n+3}{2}]$.

2. Доказан критерий минимальной неголодовости колец граней для ряда важных классов простых многогранников, таких как симплексы и их произведения, четномерные двойственные к смежностным многогранники, а также простые многогранники с малым числом гиперграней.

   Пусть $\mathbb{k}$ – поле. Скажем, что кольцо Стенли–Райснера $\mathbb{k}[P]$ голодовское, если умножение и все высшие произведения Масси в его тор-алгебре тривиальны (над любым полем $\mathbb{k}$). Кольцо (или нерв-комплекс $K_P = \partial P^*$) называется минимально неголодовским, если оно не голодовское, но ограничение комплекса на все вершины, кроме одной произвольной, дает голодовское кольцо граней.

   - Показано, что кольцо Стенли–Райснера обобщенного многогранника усечения $P = vc^k(\Delta^{n_1} \times \ldots \times \Delta^{n_r})$ является минимально неголодовским тогда и только тогда, когда либо $r = 1, k \geq 1$, либо $r = 2$. Это обобщает результат Берглунда и Йолленбека [23] о минимальной неголодовости нерв-комплексов срезок симплекса.

- В классе четномерных смежностных многогранников P получен критерий минимальной неголодовости их колец Стенли–Райснера: для минимальной неголодовости $\Bbbk[P]$ необходимо и достаточно, чтобы P был отличен от симплекса. С помощью конструкции С.Гитлера и С.Лопез де Медрано [48] показано, что в случае обобщенного многогранника усечения с $r = 2$ момент-угол многообразие $\mathcal{Z}_P$ диффеоморфно связной сумме произведений сфер по 2 сферы в каждом произведении.

- В случае n-мерного простого многогранника P с $m = n + 3$ гипергранями доказан критерий минимальной неголодовости кольца Стенли–Райснера. А именно, кольцо граней $\Bbbk[P]$ минимально неголодовское тогда и только тогда, когда многогранник P отличен от произведения 3 симплексов. Последний случай изучен в разделе об обобщенных многогранниках усечения.

3. Вычислено кольцо целочисленных когомологий $\mathcal{Z}_P$ для всех обобщенных многогранников усечения P. Это обобщает результат о вычислении биградуированных чисел Бетти в работе Н.Тераи и Т.Хиби [75]. В частности, для биградуированных чисел Бетти многогранника P получен следующий результат.

   Пусть P есть $(k; n_1, \ldots, n_r)$-многогранник с $r \geq 1$. Обозначим через a число единичных элементов в наборе $\{n_1, \ldots, n_r\}$. Тогда биградуированные числа Бетти многогранника P даются следующими формулами: $(1 \leq i \leq k + r - 1, 1 < l < d - 1)$.

   (a) $\beta^{-i,2(i+l)}(P) = \sum\limits_{\{n_{i_1},\ldots,n_{i_s}\}\subset\{n_1,\ldots,n_r\}:\, l=n_{i_1}+\ldots+n_{i_s}} \binom{k}{i-s}.$

   (b) $\beta^{-i,2(i+1)}(P) = \beta^{-(k+r-i),2(d+k+r-i-1)}(P) =$
   $= k\binom{k+r-1}{i} - \binom{k}{i+1} + a\binom{k}{i-1}.$

   (c) $\beta^{0,0}(P) = \beta^{-(m-d),2m}(P) = 1.$

   Остальные биградуированные числа Бетти равны **нулю** (мы полагаем $\binom{b}{c} = 0$ при $b < c$ или, если одно из чисел отрицательно).

4. Доказано, что свойство голодовости сохраняется при склейках симплициальных комплексов по общим симплексам. Это связано с топологическим результатом Е.Грбич и С.Терио о том, что результат склейки по общему симплексу σ двух комплексов, дающих гомотопические букеты сфер в качестве момент-угол комплексов, также дает (гомотопически) букет сфер в качестве момент-угол комплекса. Доказано также, что если многогранная сфера – минимально неголодовский комплекс, то она остается такой же после итерации пирамидальной надстройки.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов по торической и комбинаторной топологии, теории многогранников и коммутативной алгебре.

Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на следующих научно- исследовательских семинарах и научных конференциях:

1. Семинар «Алгебраическая топология и ее приложения» им. М. М. Постникова под руководством чл.-корр. РАН В. М. Бухштабера, проф. А. В. Чернавского, проф. И. А. Дынникова, проф. Т. Е. Панова, доц. Л. А. Алания и доц. Д. В. Миллионщикова; кафедра высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета МГУ – неоднократно с 2011 по 2014 год;

2. Семинар «Дифференциальная геометрия и приложения» под руководством акад. РАН А.Т.Фоменко; кафедра дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета МГУ – неоднократно с 2011 по 2014 год;

3. Семинар «Геометрия в целом» под руководством проф. И. Х. Сабитова; кафедра математического анализа Механико-математического факультета МГУ – в 2012 году;

4. Семинар «Geometry and topology seminar» под руководством проф. М.Масуды; Университет г.Осака, Япония – в 2011 и 2014 годах;
5. Семинар «Algebraic topology seminar» под руководством проф. Е.Грбич и проф. С.Терио; Саутгемптонский университет, Великобритания – в 2014 году;
6. Семинар «Topology seminar» под руководством проф. Н.Рэя; Манчестерский университет, Великобритания – в 2014 году;
7. Международная конференция «Ломоносов 2011», г. Москва, 11-15 апреля 2011 года, МГУ.
8. Русско-японская конференция «Торическая топология в Осаке 2011», г. Осака, Япония, 27-30 ноября 2011 года.
9. Русско-японская конференция «Торическая топология в Осаке 2012», г. Осака, Япония, 16-19 ноября 2012 года.
10. Международная конференция «Ломоносов 2013», г. Москва, 8-12 апреля 2013 года, МГУ.
11. Международная конференция «Алгебраическая топология и абелевы функции», постерный доклад, г. Москва, 18-22 июня 2013 года.
12. Международная конференция «Торические действия: топология, геометрия и теория чисел», г. Хабаровск, 2-7 сентября 2013 года.
13. Русско-японская конференция «Торическая топология в Осаке 2014», г. Осака, Япония, 21-24 января 2014 года.
14. Международная конференция «Ломоносов 2014», г. Москва, 7-11 апреля 2014 года, МГУ.
15. Международная конференция «13-й Сербский Конгресс Математиков», г. Врнячка Баня, Сербия, 22-25 мая 2014 года.
16. Международная конференция «18-й Геометрический Семинар», г. Врнячка Баня, Сербия, 25-28 мая 2014 года.

17. сателлитная конференция Международного Конгресса Математиков в Сеуле «Топология действий тора и приложения к геометрии и комбинаторике», г. Тэджон, республика Корея, 7-11 августа 2014 года.

18. Международная конференция «Геометрия, топология и интегрируемость», Сколково, 20-27 октября 2014 года.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 8 работах [79-86], список которых приведен в конце диссертации.

Структура и объем

Диссертация состоит из введения, пяти глав и дополнения. Текст диссертации изложен на 107 страницах и содержит 1 рисунок. Список литературы включает 86 наименований.

Содержание работы

Здесь мы кратко опишем структуру работы. Диссертация разбита на главы, главы — на разделы. Теоремы, предложения, примеры, замечания и т.д. нумеруются в пределах раздела. В конце введения мы приводим список часто встречающихся обозначений.

Глава 1. Обзор основных конструкций и понятий

В этой главе приведен обзор определений и известных результатов, которые используются в работе. Разделы 1.1 и 1.2 содержат общую информацию о симплициальных комплексах, выпуклых многогранниках, а также определение и простейшие свойства момент-угол комплексов и полиэдральных степеней. Определений, приведенных в этих разделах, достаточно для понимания глав 2 и 3 диссертации. В разделе 1.3 приведены определение кольца Стенли–Райснера симплициального комплекса $\Bbbk[K]$, его тор-алгебры $\mathrm{Tor}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K], \Bbbk)$

и биградуированных (алгебраических) чисел Бетти $\beta^{-i,2j}(K)$. Показано также, как связаны алгебраические числа Бетти комплекса (или простого многогранника) с топологическими числами Бетти соответствующего момент-угол пространства.

Глава 2. Граф-ассоциаэдры, их кольца граней и момент-угол многообразия

В главе 2 вводится геометрический объект – нестоэдр – класс простых многогранников, получивший название обобщенных пермутоэдров в конце прошлого века и объединивший в себе ряд классических многогранников, таких как пермутоэдр, многогранник Сташефа, многогранник Ботта–Таубса и др. Их единообразное определение в терминах графического производящего множества и сумм Минковского симплексов дается в разделе 2.1.

В следующем разделе доказывается точная оценка на число нулей в последовательности биградуированных чисел Бетти $\beta^{-i,2(i+1)}$, имеющих, благодаря классическому результату Хохстера из гомологической алгебры, естественное комбинаторно-геометрическое описание. Кроме того, согласно результату Теоремы 4.3 [50] $\sum_{i=1}^{m-n}\beta^{-i,2(i+1)}(K)$ есть мощность минимального набора мультипликативных образующих в алгебре Понтрягина $H_*(\Omega\mathcal{Z}_K;\Bbbk)$ для всякого флагового комплекса K. Граф-ассоциаэдры доставляют классическую серию простых флаговых многогранников.

В разделе 2.3 доказывается, что кольцо целочисленных когомологий момент-угол многообразия в случае граф-ассоциаэдров на связном графе может содержать произвольное кручение, равно как и быть свободным от кручений. Также показывается, что в этих кольцах есть нетривиальные тройные произведения Масси. Случай несвязного графа получается из связного, поскольку в этом случае граф-ассоциаэдр P_Γ является прямым произведением граф-ассоциаэдров, соответствующих максимальным по включению связным подграфам в Γ.

Глава 3. Обобщенные многогранники усечения, их кольца граней и момент-угол многообразия

Глава 3, наряду с главой 4, является центральной главой диссертации. В разделе 3.1 приведено исследование алгебраических чисел Бетти многогранников усечения с точки зрения торической топологии, независимое от результатов Н.Тераи и Т.Хиби [75]. Приведено также описание топологического типа момент-угол многообразий $\mathcal{Z}_P$, восходящее к статье Д.МакГаврана [63] (в терминах пересечений квадрик впервые у Ф.Босио и Л.Меерсманна [25]).

В разделе 3.2 приводится описание колец когомологий момент-угол многообразий $\mathcal{Z}_P$ для произвольных обобщенных многогранников усечения. В частности, из вычисления их алгебраических чисел Бетти следует, что набор последних однозначно определяет топологический тип (но не комбинаторный) момент-угол многообразия в этом классе многогранников.

Наконец, в разделе 3.3 приводятся результаты о биградуированных числах Бетти, позволяющие вычислять их для произвольных произведений обобщенных многогранников усечения, тем самым ставить вопрос о структуре их колец когомологий и топологических типах соответствующих момент-угол многообразий. Частичный ответ на эти вопросы дается в последующих главах.

Глава 4. Минимально неголодовские симплициальные комплексы и их момент-угол комплексы

Глава 4 посвящена исследованию минимальной неголодовости колец Стенли–Райснера симплициальных комплексов.

Раздел 4.1 содержит определения понятий голодовости и минимальной неголодовости кольца граней, а также описание И. В. Баскаковым умножения в $H^*(\mathcal{Z}_P)$ в терминах полных подкомплексов.

В следующем разделе доказывается критерий минимальной неголодовости обобщенных многогранников усечения и приводятся примеры, когда удается явно указать топологический тип $\mathcal{Z}_P$.

В разделе 4.3 аналогично изучаются многогранники из класса четномерных (двойственно) смежностных. Для них результаты [48] дают нам описание гладкого типа $\mathcal{Z}_P$. Случай нечетномерных смежностных многогранников аналогичен. Однако для топологических типов в этом случае мы имеем в той же работе только связную сумму тотальных пространств расслоений над сферой со слоем сфера.

В последнем разделе этой главы изучаются простые многогранники с минимально возможными числами гиперграней $n+1 \leq m \leq n+3$. В этом случае доказывается двумя способами критерий минимальной неголодовости соответствующих колец Стенли–Райснера, попутно мы используем связь с уже рассмотренным случаем четномерных циклических многогранников, а также конструкцией подстановки комплексов в комплекс, излагаемой в общем виде в Дополнении А.

Глава 5. Связные суммы произведений сфер как момент-угол комплексы

В главе 5 исследуется свойство сохранения минимальной неголодовости комплексов при некоторых симплициальных операциях (раздел 5.2), а также приводятся гомологическая (свойство Голода) и топологическая (связные суммы произведений сфер) характеризации случая $m = n + 3$, рассматривается случай 1-мерных симплициальных комплексов. В последнем разделе 5.3 мы доказываем, что минимальная триангуляция $\mathbb{C}P^2$ с 9 вершинами является голодовским комплексом, свободным от кручений в гомологиях, но его момент-угол комплекс не гомотопически эквивалентен букету сфер.

Дополнение А. Операции на симплициальных комплексах

В дополнении приведено определение полиэдральных операций, введенное А.А.Айзенбергом [1] и независимо А.Бари, М.Бендерски, Ф.Коэном и С.Гит–лером [21], обобщающее операции джойна и толстого джойна на симплициальных комплексах. Эта конструкция используется в главе 4 при работе с простыми многогранниками с числом гиперграней $m = n + 3$. Доказывается также, что свойство минимальной неголодовости комплекса K сохраняется при подстановке в него границ симплексов (операция подстановки в многогранник, симплициальный букет).

Соглашения и обозначения

- Все симплициальные комплексы имеют конечное множество вершин.

- Мы не различаем абстрактные симплициальные комплексы и их геометрические реализации там, где это не вызывает путаницы. Так, например, если K и L — два симплициальных комплекса, то запись $K \simeq L$ означает гомотопическую эквивалентность геометрических реализаций этих комплексов.

- Все многогранники предполагаются выпуклыми.

- Буква m обозначает число вершин симплициального комплекса K или число гиперграней простого многогранника P.

- $[m] = \{1, \ldots, m\}$ — множество из m элементов. Если $J \subseteq [m]$, то символ $\widehat{J}$ обозначает дополнительное подмножество $[m] \setminus J$.

- Символ $\Bbbk$ обозначает основное поле. Результаты, которые остаются верными при $\Bbbk = \mathbb{Z}$, специально оговариваются.

- $\Bbbk[m] = \Bbbk[v_1, \ldots, v_m]$ — градуированная алгебра многочленов. Градуировка в алгебре многочленов четная: $\deg v_i = 2$. $\Lambda[u_1, \ldots, u_m]$ — внешняя алгебра от m переменных, $\deg u_i = 1$.

- Символ $H^*(X; \Bbbk)$ обозначает сингулярные когомологии пространства X или симплициальные когомологии симплициального комплекса X. Если поле $\Bbbk$ зафиксировано и понятно из контекста, то будем для краткости писать $H^*(X)$. То же замечание относится к гомологиям $H_*(X)$ и их приведенным версиям $\widetilde{H}^*$ и $\widetilde{H}_*$.

- Если $[m] = I \sqcup J$ — разбиение множества индексов на два подмножества, а X, Y — топологические пространства, то запись $X^I \times Y^J$ обозначает пространство $Z_1 \times \ldots \times Z_m$, где $Z_i = X$, если $i \in I$ и $Z_i = Y$, если $i \in J$.

- Если компактная топологическая группа G действует на пространстве X, то эквивариантными когомологиями пространства X называются когомологии конструкции Бореля: $H_G(X; \Bbbk) = H(EG \times_G X; \Bbbk)$.

Приведем теперь список основных обозначений.

$\lvert A\rvert$	мощность множества A.
2^A	множество всех подмножеств множества A.
$B \subset A$	множество B содержится в множестве A и не совпадает с ним.
$B \subseteq A$	множество B содержится в множестве A и, быть может, совпадает с ним.
$\mathbb{R}_{\geqslant}$	множество неотрицательных вещественных чисел.
$V(K)$	множество вершин симплициального комплекса K.
K_A	полный подкомплекс на множестве вершин A симплициального подкомплекса K.
Δ^n	n-мерный симплекс без уточнения множества вершин.
$\lvert K\rvert$	геометрическая реализация симплициального комплекса, либо частично упорядоченного множества.
$\mathbb{Z}_2$	группа из двух элементов $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
$\mathbb{F}_2$	поле из двух элементов.
$\mathbf{1}$	ненулевой элемент поля $\mathbb{F}_2$.
rk	ранг модуля или векторного пространства над $\Bbbk$.
pt	точка.
$\mathbb{I}$	отрезок $[0,1]$.
$*$	операция джойна топологических пространств, симплициальных комплексов или многогранников.
S^1, D^2	единичная окружность и круг в $\mathbb{C}$.
T^m	компактный m-мерный тор, $T^m \cong (S^1)^m$.
S^n	n-мерная сфера.
$\simeq$	гомотопическая эквивалентность.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Тарасу Евгеньевичу Панову за постановку задач, за неоценимую помощь и советы на всех этапах написания работы. Автор благодарен чл.-корр. РАН, профессору Виктору Матвеевичу Бухштаберу за постоянный интерес, советы и многочисленные обсуждения. К.ф.-м.н. А. А. Айзен–берга и к.ф.-м.н. Н. Ю. Ероховца автор благодарит за полезные обсуждения и помощь при подготовке диссертации. Автор глубоко признателен всему коллективу кафедры высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета МГУ за творческую атмосферу, постоянную поддержку и внимание.

Глава 1

Обзор основных понятий и конструкций

1.1 Симплициальные комплексы и простые многогранники

Здесь мы сформулируем определения и основные комбинаторно-геометрические свойства симплициальных комплексов и простых многогранников. Пусть V — конечное множество.

Определение 1.1.1. *(Абстрактным) симплициальным комплексом мы будем называть такое множество K подмножеств V, что вместе с каждым подмножеством $I \in K$ множество K содержит все подмножества множества I. В таком случае элементы K называются симплексами симплициального комплекса K.*

Если некоторая вершина (одноэлементное подмножество) не является симплексом, то назовем ее *призрачной*. Будем предполагать, что симплициальные комплексы не имеют призрачных вершин, если не оговорено противное. Иными словами, будем предполагать, что $\{i\} \in K$ для всех вершин $i \in V$. Ситуации, когда возникают симплициальные комплексы с призрачными вершинами будут специально оговариваться. Множество вершин симплициального комплекса K обозначим через $V(K)$. Таким образом, все симплициальные комплексы у нас имеют конечное множество вершин: $V(K) = [m] = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Для произвольного подмножества $J \subseteq [m]$ символ $|J|$ обозначает мощность множества J. В частности, определена мощность $|I|$ любого симплекса $I \in K$, которая равна количеству вершин симплекса. Размерностью $\dim I$

симплекса $I \in K$ называется число $|I|-1$. Таким образом, имеем $\dim\varnothing = -1$. Размерность симплициального комплекса определяется естественным образом $\dim K = \max\{\dim I \mid I \in K\}$.

Если $J \in [m]$, то символом $\widehat{J}$ мы будем обозначать дополнительное множество: $\widehat{J} = [m] \setminus J$. Если L и K — два симплициальных комплекса, $V(L) \subseteq V(K)$ и из условия $I \in L$ следует $I \in K$, то L называется подкомплексом симплициального комплекса K.

Определение 1.1.2. *Пусть K — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Линком симплекса $J \in K$ называется подкомплекс $\mathrm{link}_K J = \{I \in K \mid I \cap J = \varnothing, I \cup J \in K\}$ на множестве вершин $V(\mathrm{link}_K J) = \{i \in K \mid i \notin J, \{i\} \cup J \in K\}$. Звездой симплекса $J \in K$ называется подкомплекс $\mathrm{star}_K J = \{I \in K \mid I \cup J \in K\}$ на множестве вершин $V(\mathrm{star}_K J) = \{i \in K \mid \{i\} \cup J \in K\}$. Джойном симплициальных комплексов K_1 и K_2 называется симплициальный комплекс $K_1 * K_2$ на множестве вершин $V(K_1) \sqcup V(K_2)$, симплексы которого имеют вид $\{I_1 \sqcup I_2 \mid I_1 \in K_1, I_2 \in K_2\}$.*

Важнейшим для дальнейших рассмотрений является следующее понятие полного подкомплекса в комплексе K.

Определение 1.1.3. *Пусть K — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$ и $J \subseteq [m]$. Полным подкомплексом K_J на множестве вершин J называется симплициальный комплекс $K_J = \{I \in K \mid I \subseteq J\}$.*

В свете сказанного выше, символ $K_{\widehat{J}}$ обозначает полный подкомплекс на дополнении к множеству вершин J. Таким образом, $K_{\widehat{J}}$ получается из комплекса K отбрасыванием всех симплексов, содержащих хотя бы одну вершину из множества J.

Заметим, что, если K — чистый (т.е все максимальные симплексы имеют одинаковую размерность) симплициальный комплекс размерности n и $I \in K$, то $\mathrm{link}_K I$ является чистым симплициальным комплексом размерности $n - |I| = n - \dim I - 1$.

Определение 1.1.4. *Пусть K и N — симплициальные комплексы на множествах вершин $V(K)$ и $V(N)$ соответственно. Симплициальным отображением $f\colon K \to N$ называется такое отображение $f\colon V(K) \to V(N)$,* *что $f(I) \in N$, если $I \in K$. Невырожденным симплициальным отображением называется такое симплициальное отображение $f\colon K \to N$, что для всякого симплекса $I \in K$ выполнено $|f(I)| = |I|$.*

Таким образом, невырожденное отображение переводит симплексы в симплексы той же размерности. Очевидным образом определяется композиция двух симплициальных отображений. Композиция невырожденных отображений является невырожденным отображением.

Если $f\colon K \to L$ — отображение, для которого существует обратное, то f называется изоморфизмом симплициальных комплексов. Изоморфизм, очевидно, является невырожденным отображением. Мы не будем различать изоморфные симплициальные комплексы и считаем их равными.

Приведем теперь основные конструкции и определения из теории выпуклых многогранников. Подробный обзор этих конструкций вместе с доказательствами корректности определений можно найти в монографиях [52, 78].

Определение 1.1.5. *Выпуклым многогранником называется пересечение конечного числа полупространств в $\mathbb{R}^n$, являющееся ограниченным множеством. Пусть*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_i, x\rangle + b_i \geqslant 0\} \tag{1.1.1}$$

— многогранник, заданный системой аффинных неравенств. Здесь $a_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, m$ — нормальные векторы к гиперграням многогранника, $b_i \in \mathbb{R}$.

Мы предполагаем, что среди неравенств в выражении (1.1.1) нет лишних, т.е. подмножество

$$\mathcal{F}_j = P \cap \{x \mid \langle a_j, x\rangle = b_j\}$$

является гипергранью многогранника (гранью коразмерности 1). Также предполагается, что многогранник имеет размерность n, совпадающую с размерностью объемлющего евклидова пространства.

Всевозможные пересечения гиперграней задают грани многогранника; частично упорядоченное множество непустых граней многогранника P, пополненное самим многогранником P, будем обозначать $\mathcal{P}$. Если два многогранника имеют изоморфные частично упорядоченные множества граней, то такие многогранники называются *комбинаторно эквивалентными*.

Для выпуклого многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ можно определить полярное множество $P^* \subset (\mathbb{R}^n)^*$ по правилу $P^* = \{l \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle l, x\rangle \geqslant -1$ для всех $x \in P\}$. Если 0 лежит во внутренности многогранника P, то P^* является выпуклым многогранником. Кроме того, в этом случае частично упорядоченное множество собственных граней многогранника P^* изоморфно частично упорядоченному множеству собственных граней многогранника P с обращенным порядком. Многогранник P^* называется двойственным к P многогранником. Отношение двойственности является корректно определенным на классах комбинаторной эквивалентности многогранников [78, 52].

(Комбинаторный) многогранник P^n называется *простым*, если каждая его вершина содержится ровно в n гипергранях (отсюда следует, что каждая i-мерная грань содержится в $n-i$ гипергранях). (Комбинаторный) многогранник P называется *симплициальным*, если каждая его собственная грань является симплексом. Двойственным к простому многограннику является симплициальный многогранник и наоборот.

На множестве всех (комбинаторных) многогранников также определены следующие операции.

Определение 1.1.6. *(1) Произведением многогранников $P_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ и $P_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ называется декартово произведение $P_1 \times P_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_1+n_2}$. (2) Расположим многогранники P_1, P_2 в скрещивающихся аффинных плоскостях и рассмотрим их выпуклую оболочку. Полученный многогранник $P_1 * P_2$ размерности $n_1 + n_2 + 1$ называется джойном многогранников P_1 и P_2.*

Определение 1.1.7 (связная сумма)**.** *Пусть P^n и Q^n – простые многогранники, у которых фиксированы вершины $v \in P, w \in Q$ и порядки гиперграней в этих вершинах. Выберем проективные преобразования, переводящие выбранные вершины на бесконечность так, чтобы у получившихся многогранников выбранные гиперграни образовали бесконечный цилиндр с одинаковым ортогональным сечением – симплексом Δ^{n-1}. Отрежем получившиеся цилиндры ортогональными плоскостями и склеим оставшиеся многогранники по общему симплексу Δ^{n-1} в соответствии с порядками гиперграней. Получившийся многогранник называется связной суммой многогранников P и Q. Вообще говоря, он зависит от геометрических реализаций многогранников, выбора преобразований и срезки, но комбинаторный тип определяется* *только комбинаторными многогранниками P и Q, вершинами v и w и порядками гиперграней в них. Обозначим комбинаторный тип связной суммы через $P\#_{v,w}Q$. Если выбор определяется контекстом или же результат не зависит от этого выбора, то будем использовать сокращенное обозначение $P\#Q$.*

Многогранник $P^{n_1} * Q^{n_2}$ имеет размерность $n_1 + n_2 + 1$ и его грани являются джойнами граней многогранников P и Q. Отметим, что в этом случае допускаются грани $\varnothing * G$ и $F * \varnothing$. Для джойнов удобно считать $\varnothing$ гранью многогранника, а в случае операции прямого произведения удобно рассматривать только непустые грани.

Пример 1.1.8. Имеем $\Delta^n = \mathrm{pt} * \Delta^{n-1}$. Таким образом $\Delta^n = \underbrace{\mathrm{pt} * \mathrm{pt} * \cdots * \mathrm{pt}}_{n+1}$.

Определение 1.1.9 (флаговый многогранник)**.** *Простой многогранник P называется флаговым, если любой набор его гиперграней $F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}$, которые попарно пересекаются: $F_{i_s} \cap F_{i_t} \neq \varnothing$, имеет непустое пересечение: $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k} \neq \varnothing$. Простой многогранник P называется k-флаговым, если любой набор его гиперграней, из которых любые k пересекаются, имеет непустое пересечение.*

Введенные операции корректно определены на комбинаторных многогранниках. Например, это следует из описания частично упорядоченных множеств граней многогранников $P_1 \times P_2$ и $P_1 * P_2$. Важность операции джойна и связь двух рассмотренных операций была подробно изучена в работах В. М. Бухштабера и Н. Ю. Ероховца [8, 9].

Произведение простых многогранников и любая грань простого многогранника являются снова простыми многогранниками. Если P — простой многогранник, то, как уже отмечалось выше, двойственным к нему будет симплициальный многогранник P^*. Граница ∂P^* является симплициальной сферой. Если P имеет m гиперграней, то двойственный многогранник P^* имеет m вершин. Значит, симплициальный комплекс ∂P^* также имеет m вершин.

Определение 1.1.10. *Определим симплициальный комплекс K_P на множестве $[m]$ следующим образом: $\{i_1, \ldots, i_k\} \in K_P$ тогда и только тогда,* *когда* $\mathcal{F}_{i_1} \cap \ldots \cap \mathcal{F}_{i_k} \neq \varnothing$ *в многограннике* P*. Симплициальный комплекс* K_P *назовем нерв-комплексом многогранника* P*.*

Предложение 1.1.11. *Если* $\dim K_P = \dim P - 1$*, то многогранник* P *— простой.*

Доказательство очевидно из определения.

Предложение 1.1.12. *Если* P *— простой многогранник, то симплициальный комплекс* K_P *изоморфен комплексу* ∂P^**.*

Доказательство вытекает из определения двойственного симплициального многогранника.

Лемма 1.1.13. *Пусть* P_1 *и* P_2 *— произвольные многогранники. Тогда, если оба многогранника не равны точке, то*

$$K_{P_1 \times P_2} = K_{P_1} * K_{P_2}.$$

Доказательство этого утверждения следует из описания гиперграней многогранников $P_1 \times P_2$ и определения комплекса K_P. Гиперграни прямого произведения $P_1 \times P_2$ имеют вид $\mathcal{F}_1 \times P_2, \ldots, \mathcal{F}_{m_1} \times P_2, P_1 \times \mathcal{F}'_1, \ldots, P_1 \times \mathcal{F}'_{m_2}$, где $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{m_1}$ — гиперграни многогранника P_1, а $\mathcal{F}'_1, \ldots, \mathcal{F}'_{m_2}$ — гиперграни многогранника P_2

Замечание 1.1.14. Каждому рациональному многограннику P можно сопоставить нормальный веер Σ_P и соответствующее этому вееру торическое многообразие X_P (см. [46, 40]). Имеется конструкция Батырева–Кокса [39], описывающая многообразие X_P как категорный фактор дополнения к координатной конфигурации $\mathbb{C}^m \setminus A_P$ по действию некоторой алгебраической подгруппы тора $(\mathbb{C}^*)^m$. Здесь, как и ранее m — число гиперграней многогранника P. По определению

$$A_P = \{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid \text{ для каждого конуса } I \in \Sigma_P : \prod_{i \notin I} z_i = 0\}$$

Для точки $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ положим $\sigma(z) = \{i \in [m] \mid z_i = 0\}$. Тогда $z \in A_P$ в том и только том случае, когда $\sigma(z)$ не является подмножеством одномерных конусов никакого конуса $I \in \Sigma_P$, что эквивалентно условию $\bigcap_{i\in\sigma(z)}\mathcal{F}_i = \varnothing$. Значит $z \in A_P \Leftrightarrow \sigma(z) \notin K_P$. Следовательно $z \in \mathbb{C}^m \setminus A_P \Leftrightarrow \sigma(z) \in K_P$. Таким образом дополнение до координатной конфигурации $\mathbb{C}^m \setminus A_P$ совпадает с пространством $\mathcal{Z}_{K_P}(\mathbb{C},\mathbb{C}^*)$.

1.2 Момент-угол многообразия и полиэдральные степени

Основным объектом нашего исследования будет простой n-мерный многогранник P. Каждой его гиперграни $F_i \in F$ соответствует одномерная координатная подгруппа T^{F_i} в торе

$$T^F = T^m = \{(e^{2\pi i\varphi_1},\ldots,e^{2\pi i\varphi_m}) \in \mathbb{C}^m, \varphi_i \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m.$$

Грани G сопоставим координатную торическую подгруппу $T^G = \prod_{F_i\supseteq G} T^{F_i}$. Для каждой точки $q \in P$ обозначим через $G(q)$ наименьшую грань, содержащую q, то есть $G(q) = \bigcap\limits_{F_i \ni q} F_i$, если $q \in \partial P$ и $G(q) = P$, если $q \in \mathrm{intP}$.

Определение 1.2.1. *Пусть P^n – простой многогранник. Момент-угол многообразием называется факторпространство*

$$\mathcal{Z}_P = (T^F \times P^n)/\sim$$

где $(t_1,p)\sim(t_2,q) \Leftrightarrow p = q$ и $t_1t_2^{-1} \in T^{G(p)}$.

На пространстве $\mathcal{Z}_P$ имеется каноническое действие тора T^m, индуцированное очевидным действием тора T^m на $T^m \times P^n$. При этом $\mathcal{Z}_P/T^m = P$ и стабилизатор точки $[(t,q)]$ есть $T^{G(q)}$.

Легко видеть, что эквивариантный топологический тип момент-угол многообразия зависит только от комбинаторного типа многогранника. Из определения легко получить следующее утверждение.

Предложение 1.2.2. *Имеет место эквивариантный гомеоморфизм*

$$\mathcal{Z}_{P\times Q} \simeq \mathcal{Z}_P \times \mathcal{Z}_Q.$$

Пусть $P \in \mathbb{R}^n$ — многогранник размерности n с m гипергранями, заданный выражением (1.1.1). Рассмотрим аффинное отображение $j_P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$$j_P(x) = (y_1, \ldots, y_m), \quad \text{где } y_i = \langle a_i, x\rangle + b_i. \tag{1.2.1}$$

Образ многогранника при этом вложении лежит в неотрицательном конусе $\mathbb{R}^m_{\geqslant}$. Более того, имеем $j_P(P) = j_P(\mathbb{R}^n) \cap \mathbb{R}^m_{\geqslant}$, а отображение j_P имеет максимальный ранг, равный n. Значит образ многогранника задается как пересечение n-мерной плоскости с неотрицательным конусом. Плоскость $j_P(\mathbb{R}^n)$ зададим системой $m-n$ аффинных уравнений:

$$\begin{multline} j_P(\mathbb{R}^n) = \{y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mid \\ \mid c_{j1}y_1 + c_{j2}y_2 + \ldots + c_{jm}y_m = d_j; j = 1, \ldots, m-n\}. \end{multline} \tag{1.2.2}$$

Тогда пространство $\mathcal{Z}_P$ может быть определено как обратный образ в следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z}_p \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{C}^m \arrow[d, "\mu"'] \\ P \arrow[r, hook, "j_P"] & \mathbb{R}^m_{\geqslant} \end{tikzcd} \tag{1.2.3}$$

то есть $\mathcal{Z}_P = \mu^{-1}(j_P(P))$. Вертикальная стрелка есть отображение моментов, которое задается формулой $\mu\colon (z_1, \ldots, z_m) \mapsto (|z_1|^2, \ldots, |z_m|^2)$. Пространство $\mathcal{Z}_P$ называется *момент-угол пространством* многогранника P [33], [2].

Согласно (1.2.2) имеем

$$\begin{multline} \mathcal{Z}_P = \{z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid \\ \mid c_{j1}|z_1|^2 + c_{j2}|z_2|^2 + \ldots + c_{jm}|z_m|^2 = d_j; j = 1, \ldots, m-n\}, \end{multline} \tag{1.2.4}$$

то есть момент-угол пространство $\mathcal{Z}_P$ задается как пересечение вещественных квадрик в $\mathbb{C}^m$.

На пространстве $\mathbb{C}^m$ определено каноническое покоординатное действие тора $T^m = \{(t_1, \ldots, t_m) \mid t_i \in \mathbb{C}, |t_i| = 1\}$:

$$(t_1, \ldots, t_m)(z_1, \ldots, z_m) = (t_1 z_1, \ldots, t_m z_m).$$

Фактор-пространством $\mathbb{C}^m/T^m$ является неотрицательный конус $\mathbb{R}^m_{\geqslant}$. Подпространство $\mathcal{Z}_P$ инвариантно относительно указанного действия тора. Таким образом, определено каноническое действие тора T^m на пространстве $\mathcal{Z}_P$. Из диаграммы (1.2.3) видно, что фактором этого действия является сам многогранник P.

Аналогичным образом вещественное момент-угол пространство ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Z}_P$ определяется как обратный образ в соответствующей диаграмме, то есть ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Z}_P = \mu_{\mathbb{R}}^{-1}(j_P(P))$. Вертикальная стрелка в этой диаграмме обозначает вещественный аналог отображения моментов: $\mu_{\mathbb{R}}\colon (z_1, \dots, z_m) \mapsto (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2)$.

Согласно (1.2.2) имеем

$$
{}_{\mathbb{R}}\mathcal{Z}_P = \{z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m \mid \\
\mid c_{j1}|z_1|^2 + c_{j2}|z_2|^2 + \dots + c_{jm}|z_m|^2 = d_j; j = 1, \dots, m-n\}, \quad (1.2.5)
$$

то есть момент-угол пространство ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Z}_P$ задается как пересечение квадрик в $\mathbb{R}^m$.

На пространстве $\mathbb{R}^m$ определено каноническое действие группы $\mathbb{Z}_2^m$ покоординатными инволюциями:

$$
(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)(z_1, \dots, z_m) = (\varepsilon_1 z_1, \dots, \varepsilon_m z_m).
$$

Фактор-пространством $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}_2^m$ также является неотрицательный конус $\mathbb{R}^m_{\geqslant}$. Подпространство ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Z}_P$ инвариантно относительно указанного действия этих инволюций. Таким образом, определено каноническое действие группы $\mathbb{Z}_2^m$ на пространстве ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Z}_P$. Фактор-пространством этого действия является сам многогранник P.

Пример 1.2.3. Пусть $\triangle^n \subset \mathbb{R}^n$ — n-мерный выпуклый симплекс, заданный неравенствами

$$
\triangle^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0,\, x_1 + \dots + x_n \leqslant 1\}.
$$

Всего имеется $m = n+1$ гиперграней и определено отображение $j_{\triangle^n}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, заданное согласно (1.2.1) формулой

$$
j_{\triangle^n}((x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_n, 1 - x_1 - \dots - x_n).
$$

Плоскость $j_{\triangle^n}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ задается единственным уравнением: $j_{\triangle^n}(\mathbb{R}^n) = \{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_1 + \dots + y_{n+1} = 1\}$. Таким образом, $\mathcal{Z}_{\triangle^n} = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 = 1\} \cong S^{2n+1}$ и, аналогично, ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Z}_{\triangle^n} = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 = 1\} \cong S^n$.

Теорема 1.2.4 (Бухштабер–Панов [33]). *Если P — простой многогранник, то пересечения квадрик в выражениях (1.2.4) и (1.2.5) невырождены. Пространство $\mathcal{Z}_P$ является гладким $(m+n)$-мерным подмногообразием в $\mathbb{C}^m$ с тривиальным нормальным расслоением, а пространство ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Z}_P$ — гладким n-мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^m$ с тривиальным нормальным расслоением. Действие тора T^m на ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Z}_P$ является гладким.*

Теория момент-угол пространств возникла в работе Дэвиса и Янушкиевича [42] и получила дальнейшее развитие в работах В. М. Бухштабера и Т. Е. Панова [11],[33],[13]. Во всех этих работах исследовался случай простых многогранников, который является наиболее важным для торической топологии. Невырожденные пересечения квадрик типа (1.2.4) исследовались с точки зрения комплексной геометрии в работах Босио и Меерсмана [25]. Конструкция (1.2.3) для простых многогранников была предложена в работе [33] и в связи с теоремой 1.2.4 момент-угол пространства назывались момент-угол многообразиями.

С другой стороны, как обобщение этих конструкций, в работе [2] было предложено рассмотреть конструкцию (1.2.3) в том числе и для непростых многогранников. В этой ситуации пространства $\mathcal{Z}_P$ и ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Z}_P$ уже не являются многообразиями, поэтому для них был предложен термин момент-угол пространство.

В [42] показано, что эквивариантный топологический тип момент-угол пространства зависит от комбинаторного типа многогранника, но не зависит от его конкретной геометрической реализации (1.1.1), и потому корректно определен для комбинаторного многогранника.

Рассмотрим теперь общую конструкцию полиэдральной степени (или K-степени). Каждому симплициальному комплексу K и паре топологических пространств $Y \subseteq X$ можно сопоставить новое топологическое пространство $\mathcal{Z}_K(X,Y)$. В литературе встречаются различные названия этого пространства: K-степень, обобщенный момент-угол комплекс, полиэдральная степень и различные обозначения.

Определение 1.2.5. *Пусть (X,Y) — топологическая пара, $Y \subseteq X$, а K — симплициальный комплекс на множестве $[m]$. Для каждого симплекса $I \in K$ определим подмножество $(X,Y)^I = Z_1 \times Z_2 \times \ldots \times Z_m \subseteq X^m$, где*

$Z_i = X$, если $i \in I$, и $Z_i = Y$, если $i \notin I$. Тогда полиэдральной степенью пары (X, Y) называется пространство

$$\mathcal{Z}_K(X,Y) = \bigcup_{I \in K} (X,Y)^I \subseteq X^m.$$

Наиболее важными для торической топологии примерами полиэдральных степеней являются момент-угол комплексы.

Определение 1.2.6. *Момент-угол комплексом симплициального комплекса K называется пространство $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$. Вещественным момент-угол комплексом симплициального комплекса K называется пространство $\mathcal{Z}_K(D^1, S^0)$.*

Предложение 1.2.7 ([13]). *Имеет место эквивариантный гомеоморфизм $\mathcal{Z}_P \simeq \mathcal{Z}_{K_P}$.*

Пример 1.2.8. Пусть симплициальный комплекс K — граница треугольника $\partial\Delta^2$. Тогда $\mathcal{Z}_{\partial\Delta^2}(D^2, S^1) = (D^2 \times D^2 \times S^1) \cup (D^2 \times S^1 \times D^2) \cup (S^1 \times D^2 \times D^2) = \partial(D^2 \times D^2 \times D^2) \cong S^5$. Аналогично, $\mathcal{Z}_{\partial\Delta^2}(D^1, S^0) = \partial(D^1 \times D^1 \times D^1) \cong S^2$.

Диск D^2 можно рассматривать как единичный диск в $\mathbb{C}$. Каноническое действие окружности $T^1 = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1\}$ на $\mathbb{C}$, очевидно, сохраняет единичный диск. Таким образом, на топологической паре (D^2, S^1) естественным образом определено действие окружности. Это действие индуцирует покоординатное действие тора T^m на полидиске $(D^2)^m$. Нетрудно видеть, что пространство $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1) \subseteq (D^2)^m$ инвариантно относительно этого покоординатного действия. Таким образом определено действие ω тора T^m на пространстве $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$.

Пример 1.2.9. Пусть как и ранее $K = \partial\Delta^2$. Поскольку пара точек $\{1, 2\}$ является симплексом комплекса K, то точка $(0, 0, 1) \in D^2 \times D^2 \times S^1$ лежит в пространстве $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$. С другой стороны, стабилизатором этой точки относительно покоординатного действия тора T^3 является подгруппа $T^1 \times T^1 \times \{1\} \subset T^3$. Это наблюдение показывает, что действие ω не является свободным.

Аналогично определяется действие группы $\mathbb{Z}_2^m$ на вещественном момент-угол комплексе. Группа $\mathbb{Z}_2^m$ действует покоординатными инволюциями на кубе $(D^1)^m$, при этом подмножество $\mathcal{Z}_K(D^1,S^0) \subseteq (D^1)^m$ инвариантно относительно этого действия. Значит, определено действие $\omega_{\mathbb{R}}$ группы $\mathbb{Z}_2^m$ на пространстве $\mathcal{Z}_K(D^1,S^0)$. Это действие также не является свободным.

Исторически понятия момент-угол пространств многогранников и момент-угол комплексов симплициальных комплексов появились одновременно в связи со следующим результатом.

Теорема 1.2.10 (Бухштабер–Панов [11, 33])**.** *Пусть P — простой многогранник с m гипергранями, а ∂P^* — симплициальный комплекс, являющийся границей двойственного к P симплициального многогранника. Тогда многообразие $\mathcal{Z}_P$ эквивариантно гомеоморфно момент-угол комплексу $\mathcal{Z}_{\partial P^*}(D^2,S^1)$ относительно действия тора T^m. Многообразие ${}_{\mathbb{R}}\mathcal{Z}_P$ эквивариантно гомеоморфно комплексу $\mathcal{Z}_{\partial P^*}(D^1,S^0)$ относительно действия группы $\mathbb{Z}_2^m$.*

В качестве следствия получаем, что для простого многогранника P момент-угол комплексы $Z_{\partial P^*}(D^2,S^1)$ и $\mathcal{Z}_{\partial P^*}(D^1,S^0)$ являются замкнутыми топологическими многообразиями. Верен также более общий результат: пространства $\mathcal{Z}_K(D^2,S^1)$ и $\mathcal{Z}_K(D^1,S^0)$ являются замкнутыми топологическими многообразиями, если K — симплициальная сфера [11, Лемма 3.2.2].

При помощи общего определения полиэдральной степени можно задавать дополнения к конфигурациям координатных подпространств. Пусть K — симплициальный комплекс на множестве $[m]$. Каждому множеству $J \subseteq [m]$ сопоставим координатное подпространство $L_J = \{(z_1,\ldots,z_m) \in \mathbb{C}^m \mid z_i = 0$ при $i \in J\}$. Симплициальному комплексу K сопоставлена конфигурация координатных пространств $\bigcup_{J \notin K} L_J$. Несложно проверить, что дополнение $\mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{J\notin K} L_J$ совпадает с полиэдральной степенью $\mathcal{Z}_K(\mathbb{C},\mathbb{C}^*)$. На пространстве $\mathcal{Z}_K(\mathbb{C},\mathbb{C}^*)$ покоординатно действует компактный тор T^m. Согласно [12, Лемма 2.13], дополнение к координатной конфигурации $\mathcal{Z}_K(\mathbb{C},\mathbb{C}^*)$ эквивариантно гомотопически эквивалентно момент-угол комплексу $\mathcal{Z}_K(D^2,S^1)$.

1.3 Кольца Стенли-Райснера

В этом разделе приведены основные определения из комбинаторной коммутативной алгебры, используемые для исследования комбинаторики симплициальных комплексов и ассоциированных с ними пространств.

Пусть $\mathbb{k}$ — основное поле. Некоторые результаты этой работы верны при $\mathbb{k} = \mathbb{Z}$, но эти случаи будут оговариваться отдельно. В тексте предполагается, что все алгебры и модули градуированы целыми числами и конечно-порождены. Алгебры являются (градуированно) коммутативными и связными, то есть $A^0 \cong \mathbb{k}$.

Пусть K — симплициальный комплекс на m вершинах, $\dim K = n - 1$. Обозначим через $\mathbb{k}[m] = \mathbb{k}[v_1, \ldots, v_m]$ градуированную алгебру многочленов от m переменных с коэффициентами в $\mathbb{k}$ и градуировкой $\deg v_i = 2$.

Определение 1.3.1 (Алгебра Стенли–Райснера)**.** *Алгеброй Стенли–Райснера называется факторалгебра $\mathbb{k}[m]/I_{SR}$, где I_{SR} — идеал, порожденный мономами без квадратов $v_{i_1} \ldots v_{i_k}$ при $\{i_1, \ldots, i_k\} \notin K$ (индексы $i_1, \ldots, i_k$ здесь — попарно различны).*

Кольца Стенли–Райснера являются удобным и хорошо изученным средством для исследования комбинаторики симплициальных комплексов. Согласно теореме Брунса–Губеладзе [28] симплициальный комплекс однозначно определяется своим кольцом Стенли–Райснера. Иными словами, если существует изоморфизм алгебр $\mathbb{k}[K] \cong \mathbb{k}[L]$ (не обязательно сохраняющий градуировку), то симплициальные комплексы K и L изоморфны.
Алгебры Стенли–Райснера возникают естественным образом также в топологии как алгебры эквивариантных когомологий момент-угол комплексов.

Теорема 1.3.2 (Теорема Дэвиса–Янушкиевича [42, Th.4.8])**.** *Пусть K — симплициальный комплекс на множестве $[m]$, а $\mathbb{k}$ — поле, либо кольцо $\mathbb{Z}$. Тогда имеет место изоморфизм градуированных алгебр*

$$H^*_{T^m}(\mathcal{Z}_K(D^2, S^1); \mathbb{k}) \cong \mathbb{k}[K].$$

Кольца Стенли–Райснера также позволяют описывать неэквивариантные когомологии момент-угол комплексов, что составляет содержание оставшейся части этого параграфа.

Естественное отображение проекции $p\colon \Bbbk[m] \to \Bbbk[K]$ снабжает алгебру $\Bbbk[K]$ структурой градуированного $\Bbbk[m]$-модуля.

Пусть M — градуированный конечно-порожденный модуль над градуированной коммутативной конечно-порожденной связной алгеброй A над полем $\Bbbk$. Рассмотрим свободную резольвенту

$$\ldots \to R^{-i} \to \ldots \to R^{-1} \to R^0 \to M \to 0, \tag{1.3.1}$$

в которой R^{-i} является свободным градуированным модулем над алгеброй A. Пусть N — другой градуированный A-модуль. Применяя функтор $\otimes_A N$ к цепному комплексу

$$\ldots \to R^{-i} \to \ldots \to R^{-1} \to R^0 \to 0, \tag{1.3.2}$$

получим цепной комплекс

$$\ldots \to R^{-i} \otimes_A N \to \ldots \to R^{-1} \otimes_A N \to R^0 \otimes_A N \to 0, \tag{1.3.3}$$

градуированных A-модулей. Градуированный модуль $(-i)$-х когомологий полученного комплекса обозначается $\mathrm{Tor}_A^{-i}(M,N) = \bigoplus_j \mathrm{Tor}_A^{-i,j}(M,N)$. Стандартная теорема гомологической алгебры (см., например, [61]) гласит, что биградуированный модуль $\mathrm{Tor}_A(M,N) = \bigoplus\limits_{i,j} \mathrm{Tor}_A^{-i,j}(M,N)$ не зависит от выбора свободной резольвенты (1.3.1).

Нас будет интересовать частный случай этой конструкции, когда $A = \Bbbk[m]$, $M = \Bbbk[K]$ — модуль Стенли–Райснера, а $N = \Bbbk$, где поле $\Bbbk$ снабжено структурой $\Bbbk[m]$-модуля при помощи естественной сюръекции $\Bbbk[m] \to \Bbbk$, $v_i \mapsto 0$. Для $\Bbbk[m]$-модуля $\Bbbk[K]$ в таком случае определен Tor-модуль:

$$\mathrm{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K],\Bbbk) = \bigoplus_{i,j=0}^{m} \mathrm{Tor}^{-i,2j}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K],\Bbbk),$$

где градуировка $2j$ индуцирована четной градуировкой в модуле Стенли–Райснера, а градуировка $-i$ соответствует членам резольвенты.

Известная теорема гомологической алгебры [61] утверждает, что

$$\mathrm{Tor}^{*,*}_A(M,N) \cong \mathrm{Tor}^{*,*}_A(N,M).$$

Таким образом, $\mathrm{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K],\Bbbk) \cong \mathrm{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk,\Bbbk[K])$. У $\Bbbk[m]$-модуля $\Bbbk$ имеется каноническая резольвента, называемая резольвентой Кошуля. Ниже приведен обзор этой конструкции.

Рассмотрим внешнюю $\Bbbk$-алгебру $\Lambda[u_1,\dots,u_m]$ от образующих степени 1, которая определена соотношениями $u_i^2=0$ и $u_iu_j=-u_ju_i$. Превратим тензорное произведение $E_m=\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\Bbbk[v_1,\dots,v_m]$ в биградуированную дифференциальную алгебру, полагая

$$\operatorname{bideg} u_i=(-1,2),\quad \operatorname{bideg} v_i=(0,2),\quad du_i=v_i,\quad dv_i=0, \tag{1.3.4}$$

и требуя, чтобы дифференциал d удовлетворял градуированному тождеству Лейбница. Дифференциальная биградуированная алгебра $[E_m,d]$ определяет коцепной комплекс $\Bbbk[m]$-модулей

$$\begin{aligned}0\to\Lambda^m[u_1,\dots,u_m]\otimes\Bbbk[v_1,\dots,v_m]\xrightarrow{d}\dots\\ \dots\xrightarrow{d}\Lambda^1[u_1,\dots,u_m]\otimes\Bbbk[v_1,\dots,v_m]\xrightarrow{d}\Bbbk[v_1,\dots,v_m]\xrightarrow{\epsilon}\Bbbk\to 0,\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

где $\Lambda^i[u_1,\dots,u_m]$ — подпространство в $\Lambda[u_1,\dots,u_m]$, порожденное мономами длины i. Утверждается (см., например, [13, Констр.3.13]) что коцепной комплекс (1.3.5) является точной последовательностью свободных $\Bbbk[m]$-модулей, а значит является свободной резольвентой $\Bbbk[m]$-модуля $\Bbbk$. Резольвента (1.3.5) называется резольвентой Кошуля.

Имеем $\mathrm{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk,\Bbbk[K])\cong H^{*,*}((\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\Bbbk[m])\otimes_{\Bbbk[m]}\Bbbk[K],d)=H^{*,*}(\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\Bbbk[K],d)$. Таким образом, $\mathrm{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K],\Bbbk)$ является биградуированной алгеброй, изоморфной биградуированной алгебре $H^{*,*}(\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\Bbbk[K],d)$, дифференциал и градуировка которой определены равенствами (1.3.4). Биградуированная алгебра $\mathrm{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K],\Bbbk)$ называется Tor-алгеброй симплициального комплекса K.

Опишем клеточную структуру на $\mathcal{Z}_K$. Пусть K — симплициальный комплекс на множестве $[m]$. Рассмотрим клеточную структуру на паре (D^2,S^1), состоящую из нульмерной клетки c_0, одномерной клетки c_1 и двумерной c_2. Эта клеточная структура индуцирует клеточную структуру на полидиске $(D^2)^m$ и его подмножестве $\mathcal{Z}_K(D^2,S^1)$. Общая клетка комплекса $\mathcal{Z}_K(D^2,S^1)$ имеет вид

$$\alpha_1\times\dots\times\alpha_m, \tag{1.3.6}$$

где $\alpha_i=c_0,c_1$ либо c_2, причем $\{i\in[m]\mid\alpha_i=c_2\}\in K$. Чтобы задать общую клетку комплекса $\mathcal{Z}_K(D^2,S^1)$ необходимо указать на каких позициях в (1.3.6) стоят клетки c_2, а на каких — c_1. Пусть $I \in K$ и $J \subseteq [m]$, причем $J \cap I = \varnothing$. Определим клетку $c(I,J) = \alpha_1 \times \ldots \times \alpha_m$, где $\alpha_i = c_2$ при $i \in I$, $\alpha_i = c_1$ при $i \in J$ и $\alpha_i = c_0$ при $i \notin I \sqcup J$. Все клетки момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$ описываются таким образом. Пусть $C^*(\mathcal{Z}_K(D^2, S^1))$ — коцепной комплекс над полем $\Bbbk$, индуцированный указанным клеточным разбиением. Снабдим этот коцепной комплекс двойной градуировкой, задав ее на образующих $\operatorname{bideg} c(I,J)^* = (-|J|, 2|I| + 2|J|)$, где $c(I,J)^*$ — коцепь, двойственная к клетке $c(I,J)$. Можно проверить, что стандартный когомологический дифференциал является однородным бистепени $(1,0)$, значит такая двойная градуировка индуцирует двойную градуировку на кольце когомологий: $H^{*,*}(\mathcal{Z}_K(D^2, S^1); \Bbbk)$.

Теорема 1.3.3 (Бухштабер–Панов [13, Теор.8.6])**.** *Пусть K — симплициальный комплекс на m вершинах, а $\Bbbk$ — поле или кольцо $\mathbb{Z}$. Тогда имеет место изоморфизм биградуированных алгебр*

$$H^{*,*}(\mathcal{Z}_K(D^2, S^1); \Bbbk) \cong \operatorname{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K], \Bbbk).$$

Определение 1.3.4. *Определим биградуированные числа Бетти симплициального комплекса K как*

$$\beta^{-i,2j}(K) = \operatorname{rk}_{\Bbbk} \operatorname{Tor}^{-i,2j}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K], \Bbbk) = \operatorname{rk}_{\Bbbk} H^{-i,2j}(\mathcal{Z}_K(D^2, S^1); \Bbbk).$$

Определим также $\beta^{-i}(K) = \operatorname{rk}_{\Bbbk} \operatorname{Tor}^{-i,*}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K], \Bbbk) = \sum_j \beta^{-i,2j}(K)$.

Замечание 1.3.5. Вообще говоря, биградуированные числа Бетти симплициального комплекса зависят от основного поля. Мы не используем запись $\beta^{-i,2j}_{\Bbbk}(K)$ ввиду ее громоздкости. Далее в работе везде предполагается, что числа Бетти рассматриваются над фиксированным полем $\Bbbk$.

Для биградуированных чисел Бетти верно следующее утверждение [13, Лемма 8.13].

Предложение 1.3.6. *Пусть K — непустой симплициальный комплекс с m вершинами размерности $n-1$. Тогда*

1) $\beta^{-i,2j}(K) = 0$ при $j > m$ или $i > j$;

2) $\beta^{-i,2j}(K) = 0$ при $i \geqslant j > 0$ или $j - i > n$;

3) $\beta^{0,2j}(K) = 0$ при $j > 0$; $\beta^{0,0}(K) = 1$

Теорема 1.3.7 (Хохстер). *Имеет место формула*

$$\beta^{-i,2j}(K) = \sum_{J\subseteq[m],|J|=j} \operatorname{rk}_{\Bbbk} \widetilde{H}^{j-i-1}(K_J;\Bbbk),$$

где K_J — полный подкомплекс в K на множестве вершин J. Здесь принято соглашение $\widetilde{H}^{-1}(\varnothing;\Bbbk)=\Bbbk$.

Первое доказательство этой формулы содержится в работе [54] и использует комбинаторную и алгебраическую технику. В. М. Бухштабером и Т. Е. Пановым [13] было дано другое доказательство этой формулы, а Баскаковым [3, Теор.1], кроме того, было описано умножение в Tor-алгебре комплекса K в терминах топологии полных подкомплексов комплекса K.

Определение 1.3.8. *Определим биградуированные числа Бетти многогранника P соотношением*

$$\beta^{-i,2j}(P) \;=\; \beta^{-i,2j}(K_P).$$

Имеется формулировка теоремы Хохстера 1.3.7 для многогранников.

Предложение 1.3.9 (Теорема Хохстера для выпуклых многогранников). *Пусть $\mathcal{F}_1,\dots,\mathcal{F}_m$ — гиперграни многогранника P. Тогда*

$$\beta^{-i,2j}(P) = \sum_{J\subseteq[m],|J|=j} \operatorname{rk}_{\Bbbk} \widetilde{H}^{j-i-1}(F_J;\Bbbk),$$

где $\mathcal{F}_J=\bigcup_{i\in J}\mathcal{F}_i\subseteq P$. Здесь и далее принято соглашение $\operatorname{rk}\widetilde{H}^{-1}(\varnothing;\Bbbk)=1$.

Доказательство. Из определения и формулы Хохстера для симплициальных комплексов получаем

$$\beta^{-i,2j}(P) = \beta^{-i,2j}(K_P) = \sum_{\omega\subseteq[m],|J|=j} \operatorname{rk}_{\Bbbk} \widetilde{H}^{j-i-1}((K_P)_J;\Bbbk).$$

Утверждается, что симплициальный комплекс $(K_P)_J$ гомотопически эквивалентен пространству $\mathcal{F}_J$. Действительно, имеем локально стягиваемое покрытие пространства $\mathcal{F}_J=\bigcup_{i\in J}\mathcal{F}_i\subseteq P$ подмножествами $\mathcal{F}_i$. Легко видеть, что нервом этого покрытия является симплициальный комплекс $(K_P)_J$. Следовательно, $(K_P)_J\simeq\mathcal{F}_J$ и $\widetilde{H}^{j-i-1}((K_P)_J;\Bbbk)\cong\widetilde{H}^{j-i-1}(\mathcal{F}_J;\Bbbk)$, что завершает доказательство. $\square$

Из теоремы 1.3.3 следует соотношение

$$\operatorname{rk} H^p(\mathcal{Z}_P, \Bbbk) = \operatorname{rk} H^p(\mathcal{Z}_{K_P}(D^2, S^1), \Bbbk) = \sum_{-i+2j=p} \beta^{-i,2j}(P). \tag{1.3.7}$$

А.А.Айзенберг [1] ввел β-многочлен комплекса K:

$$\beta_K(s,t) = \sum_{i,j} \beta^{-i,2j}(K) s^{-i} t^{2j} \in \mathbb{Z}[s^{-1}, t^2]$$

и доказал следующее важное для нас утверждение:

Предложение 1.3.10. *Пусть K и L — симплициальные комплексы. Тогда*

$$\beta_{K*L}(s,t) = \beta_K(s,t)\beta_L(s,t)$$

Доказательство. Утверждение следует из мультипликативности биградуированных чисел Бетти (это можно доказать напрямую с помощью резольвенты модуля $\Bbbk[K*L] = \Bbbk[K] \otimes \Bbbk[L]$). $\square$

Глава 2

Граф-ассоциаэдры, их кольца граней и момент-угол многообразия

2.1 Нестоэдры: граф-ассоциаэдры

Более полную информацию о нестоэдрах можно найти в работе [70]. В этой части мы кратко излагаем основные факты о нестоэдрах и граф–ассоциаэдрах.

Определение 2.1.1. *Пусть $S = \{1, 2, \dots, n+1\}$. Производящим множеством называется система подмножеств $B = \{B_k \subseteq S\}$, такая что:*

1) $\{i\} \in B$ для всех $i = 1, \dots, n+1$.

2) Если $B_i \cap B_j \neq \varnothing$, то $B_i \cup B_j \in B$.

Примером производящего множества является множество всех подмножеств B_k множества вершин графа Γ без кратных ребер и петель, таких что индуцированный подграф $\Gamma|_{B_k}$ связен. Такие производящие множества мы будем обозначать $B(\Gamma)$.

Каждому множеству B_k сопоставим выпуклую оболочку соответствующих базисных векторов $\Delta_{B_k} = conv\{e_j | j \in B_k\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Определение 2.1.2. *Нестоэдром называется выпуклый многогранник - сумма Минковского симплексов $P_B = \sum\limits_{B_k \in B} \Delta_{B_k}$.*

Рассмотрим один пример.

Определение 2.1.3. *Для чисел $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$ пермутоэдром $P(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ называется многогранник*

$$conv\{(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(n+1)}) | \sigma \in S_{n+1}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Пермутоэдр является простым n-мерным многогранником, его вершины - это в точности точки $a_\sigma = (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots, a_{\sigma(n+1)})$, причем вершины a_σ и a_ω соединены ребром тогда и только тогда, когда $\omega = (i, i+1)\sigma$ для некоторого i.

Оказывается, сумма Минковского всех ребер симплекса $\Delta_S = \Delta^n$ есть пермутоэдр $P(0, 1, 2, \ldots, n)$ (таким образом, пермутоэдр является примером зонотопа, т.е суммы Минковского отрезков), а для полного графа K_{n+1} с $n+1$ вершиной нестоэдр $P_{B(K_{n+1})}$ является пермутоэдром $P(1, 2, 2^2, \ldots, 2^n)$.

Заметим, что все пермутоэдры, имеющие одинаковую размерность, комбинаторно эквивалентны между собой.

Всюду дальше мы будем считать, что $S \in B$. Такие производящие множества называются *связными*. Иначе $P_B = P_{B_1} \times P_{B_2} \times \cdots \times P_{B_s}$, где B_l, $l = 1, 2, \ldots, s$ - максимальные по включению множества, принадлежащие B. Заметим, что если $S \in B$, то нестоэдр P_B является n-мерным многогранником, так как он содержит в качестве слагаемого Δ^n и лежит в гиперплоскости $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i = C$, где C – количество элементов в множестве B.

Гиперграни многогранника P взаимно однозначно соответствуют множествам $B_k \in B \setminus B_{\max}$, где $B_{\max}$ - набор всех максимальных по включению множеств из производящего множества B. При этом набор гиперграней, отвечающих множествам $B_{i_1}, \ldots, B_{i_s}$ пересекается тогда и только когда, когда множества удовлетворяют условиям:

(1) Для любых двух множеств B_{i_k}, B_{i_l} либо они не пересекаются, либо одно лежит в другом;

(2) Если множества $B_{i_{k_1}}, B_{i_{k_2}}, \ldots, B_{i_{k_l}}, l \geqslant 2$ попарно не пересекаются, то их объединение не принадлежит производящему множеству B.

Предложение 2.1.4 ([69], Теорема 7.4). *Нестоэдр P_B является простым многогранником.*

С точки зрения торической геометрии особенно интересно следующее свойство нестоэдров:

Предложение 2.1.5 ([77], §5). *Нестоэдр P_B может быть реализован как многогранник Дельзанта.*

Оно означает, что существует такая реализация нестоэдра, что его нормальный веер неособый, а это значит, что соответствующее ему проективное торическое многообразие X_P также неособое. Его числа Бетти четной размерности равны соответствующим компонентам h-вектора нестоэдра P: $\beta^{2k}(X_P) = h_k(P)$. На соответствующем момент-угол многообразии Z_P свободно действует торическая подгруппа ранга $m-n$, где m – число гиперграней P, n – его размерность.

Пример 2.1.6. (числа Штифеля–Уитни) Из определения момент-угол многообразия, как пространства, делающего коммутативной диаграмму с отображением моментов, следует, что нормальное расслоение вложения момент-угол многообразия в $\mathbb{C}^m$ тривиально. Значит, момент-угол многообразие $\mathcal{Z}_P$ всегда является границей гладкого многообразия. Как известно, это равносильно отсутствию ненулевых характеристических чисел Штифеля–Уитни. С другой стороны, легко видеть, что число $w_n(X_P)$ равно четности числа вершин $f_0(P)$ простого дельзантова многогранника P. Таким образом, числа Штифеля–Уитни торических многообразий могут не обращаться в нуль (например, если P – 2-мерный пермутоэдр), но могут и все обращаться в нуль. Например, это так для случая нечетномерных циклоэдров, как показали Х.Абе и М.Хатанака (не опубликовано).

Нестоэдр является флаговым многогранником тогда и только тогда, когда условие (2) пересечения гиперграней можно заменить условием (2'): для любых двух множеств B_{i_k}, B_{i_l}, таких что $B_{i_k} \cap B_{i_l} = \varnothing$, множество $B_{i_k} \cup B_{i_l}$ не лежит в производящем множестве B. То есть гиперграни, соответствующие множествам $B_{i_1}, \dots, B_{i_s} \in B \setminus B_{\max}$, пересекаются тогда и только тогда, когда выполнены условия (1) и (2'). Несложно заметить, что любой нестоэдр, построенный по графу, является флаговым многогранником.

Как показывает следующая лемма, нестоэдр может быть получен из симплекса последовательной срезкой его граней. Пусть $B_0 \subset B_1$ два связных производящих множества на $[n+1]$. Определим разложение элемента S из B_1 по элементам из B_0 как минимальный набор элементов из B_0, попарно не пересекающихся и дающих в объединении S. Тогда имеет место следующий факт.

Предложение 2.1.7. *[32] Тогда P_{B_1} может быть получен из P_{B_0} последо-*

вательностью срезок граней $G_i = \cap_{j=1}^{k_i} F_{S^i_j}$, соотвествующим разложениям $S^i = S^i_1 \sqcup \ldots \sqcup S^i_{k_i}$, занумерованным в порядке, обратном включению.

Для флаговых нестоэдров В. М. Бухштабер и В. Д. Володин [7] доказали следующее утверждение.

Предложение 2.1.8. *В обозначениях предыдущего предложения, если нестоэдр P флаговый, то он может быть получен (с точностью до комбинаторной эквивалентности) последовательностью срезок граней только коразмерности 2 из куба.*

Граф-ассоциаэдры – центральный объект изучения в этой главе. Впервые они появились в работе М.Карра и С.Девадосса [35] в связи с комплексами Кокстера.

Определение 2.1.9. *Графическое производящее множество $B(\Gamma)$ для данного графа Γ имеет совими элементами все подмножества вершин,такие,что индуцированный на них граф связен. Граф-ассоциаэдром P_Γ называется нестоэдр, построеный по графическому производящему множеству.*

Пример 2.1.10.

- Пусть Γ – полный граф на $[n+1]$. Тогда мы получаем пермутоэдр $P_\Gamma = Pe^n$ (иную аффинную реализацию, как было указано в начале параграфа).

- Пусть Γ – звезда, т.е граф с одной выделенной вершиной (например, $\{n+1\}$), все ребра которого суть исходящие из выделенной вершины в каждую из n оставшихся вершин. Тогда P_Γ – стеллаэдр St^n.

- Пусть Γ – цикл на множестве $[n+1]$ вершин. Тогда P_Γ – циклоэдр Cy^n или многогранник Ботта-Таубса. Он впервые возник в работе [27] в связи с изучением инвариантов зацеплений.

- Пусть Γ – цепь на множестве $[n+1]$ вершин, тогда мы получаем в качестве P_Γ ассоциаэдр или многогранник Сташефа As^n, впервые возникший в работе Дж.Сташефа [74] как пространство параметров для высшей ассоциативности $(n+2)$-местных произведений в $H-$пространстве. Об этом многограннике и его момент-угол многообразии мы будем подробно говорить в следующем параграфе.

2.2 Биградуированные числа Бетти граф-ассоциаэдров

Теорема Бухштабера–Панова о кольце когомологий момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$, а также формула Хохстера для биградуированных чисел Бетти, показывают, что топологические числа Бетти $\mathcal{Z}_P$, а значит, аддитивная структура кольца когомологий (если группы когомологий свободны) полностью определяется биградуированными числами Бетти многогранника P. В общем случае, эти последние зависят от приведенных когомологий всех полных подкомплексов (т.е индуцированных комплексов в K_P на всевозможных подмножествах вершин $I \subset [m]$). Поэтому найти все биградуированные числа Бетти в случае произвольного простого многогранника P как правило эффективно не удается.

Легко видеть однако, что алгебраические числа Бетти вида $\beta^{-i,2(i+1)}(P)$ зависят только от чисел компонент связности объединений гиперграней многогранника P. Так наборы гипергрнаней, дающие связное множество в объединении, не дают вклада в соответствующее алгебраическое число Бетти. Таким образом, числа $\beta^{-i,2(i+1)}$ с одной стороны дают оценки на числа Бетти момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$, а с другой стороны отражают комбинаторно-геометрическую структуру многогранника P (точнее, его ч.у.м. граней). Этими последними мы и будем интересоваться в этом подразделе.

Сформулируем основной результат этого параграфа и следствия из него.

Теорема 2.2.1. *Пусть $P = P_\Gamma$ – граф-ассоциаэдр на связном графе Γ. Тогда $\beta^{-i,2(i+1)}(P) = 0$ для $i > i_{max}$. Число i_{max} есть максимальное число связных подграфов в графе Γ, которое может нетривиально пересекать (в смысле описания «гнездового комплекса» в работе А.Зелевинского [77]) данный связный подграф. Таким образом, этот подграф либо нетривиально пересекает данный подграф, либо у них нет общих вершин, но подграф на объединении их вершин связен. Назовем такой подграф выделенным. Число $\beta^{-i_{max},2(i_{max}+1)}(P)$ равно числу выделенных подграфов в Γ.*

Для четырех классических серий граф-ассоциаэдров, определенных в конце предыдущего параграфа, мы имеем:

Следствие 2.2.2. • *Пусть $P = As^n$ есть n-мерный ассоциаэдр, $n \geq 3$. Биградуированные числа Бетти многогранника P удовлетворяют соотношениям*

$$\beta^{-q,2(q+1)}(P) = \begin{cases} n+3, & \text{если } n \text{ четно;} \\ \frac{n+3}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно;} \end{cases}$$
$$\beta^{-i,2(i+1)}(P) = 0 \quad \text{для } i \geq q+1,$$

где $q = q(n)$ определено так:

$$q = q(n) = \begin{cases} \frac{n(n+2)}{4}, & \text{если } n \text{ четно;} \\ \frac{(n+1)^2}{4}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

• *Пусть $P = Cy^n$ есть n-мерный циклоэдр, $n \geq 3$. Биградуированные числа Бетти многогранника P удовлетворяют соотношениям*

$$\beta^{-q,2(q+1)}(P) = \begin{cases} 2n+2, & \text{если } n \text{ четно;} \\ n+1, & \text{если } n \text{ нечетно;} \end{cases}$$
$$\beta^{-i,2(i+1)}(P) = 0 \quad \text{для } i \geq q+1,$$

где $q = q(n)$ определено так:

$$q = q(n) = \begin{cases} \frac{n(n+2)-2}{2}, & \text{если } n \text{ четно;} \\ \frac{(n+1)^2-2}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

• *Пусть $P = Pe^n$ есть n-мерный пермутоэдр, $n \geq 3$. Биградуированные числа Бетти многогранника P удовлетворяют соотношениям*

$$\beta^{-q,2(q+1)}(P) = \binom{n+1}{[\frac{n+1}{2}]}$$
$$\beta^{-i,2(i+1)}(P) = 0 \quad \text{для } i \geq q+1,$$

где $q = q(n) = 2^{n+1} - 2^{[\frac{n+1}{2}]} - 2^{[\frac{n-1}{2}]} + 1$

- *Пусть $P = St^n$ есть n-мерный стеллаэдр, $n \geq 3$. Биградуированные числа Бетти многогранника P удовлетворяют соотношениям*

$$\beta^{-q,2(q+1)}(P) = \binom{n}{[\frac{n}{2}]}$$
$$\beta^{-i,2(i+1)}(P) = 0 \quad \text{для } i \geq q+1,$$

где $q = q(n) = 2^n - 2^{[\frac{n}{2}]} - 2^{[\frac{n+1}{2}]} + [\frac{n+3}{2}]$.

Мы предъявим комбинаторно-геометрическое построение в случае ассоциаэдра, из которого будет ясен общий случай с помощью результата А.Фенна [44], который мы приведем в конце параграфа, арифметические выкладки мы опускаем. Для большей наглядности геометрической природы границы i_{max} мы пользуемся одним из эквивалентных комбинаторных определений многогранника Сташефа.

Различные выпуклые реализации многогранников Сташефа были найдены Дж.Милнором и другими, см. [29].

Мы обозначаем n-мерный многогранник Сташефа через As^n. Тогда i-мерные грани As^n $(0 \leq i \leq n-1)$ взаимно-однозначно соответствуют множествам из $n-i$ попарно не пересекающихся диагоналей в $(n+3)$-угольнике G_{n+3} (мы считаем здесь, что диагонали, исходящие из одной вершины, не пересекаются). Грань H содержится в грани H' тогда и только тогда, когда множество диагоналей, соответствующее H, содержит множество диагоналей, соответствующее H'.

Так, вершины As^n соответствуют полным триангуляциям G_{n+3} диагоналями, а гиперграни As^n соответствуют диагоналям G_{n+3}. Таким образом, мы отождествляем множество диагоналей G_{n+3} с множеством гиперграней $\{F_1, \ldots, F_m\}$ многогранника As^n и отождествляем оба этих множества с $[m]$, когда это удобно. Нам понадобится выпуклая реализация As^n из [29, Lecture II, Th. 5.1]:

Предложение 2.2.3. *Многогранник As^n может быть представлен как пересечение параллелепипеда*

$$\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon 0 \leq y_j \leq j(n+1-j) \quad \text{для } \ 1 \leq j \leq n\right\}$$

с полупространствами

$$\left\{y \in \mathbb{R}^n \colon y_j - y_k + (j-k)k \geq 0\right\}$$

для $1 \leq k < j \leq n$.

Предложение 2.2.4. *Имеем:*

$$b^3(\mathcal{Z}_{As^n}) = \beta^{-1,4}(As^n) = \binom{n+3}{4}.$$

Доказательство. Число $\beta^{-1,4}(P)$ равно количеству мономов $v_i v_j$ в идеале Стенли–Райснера многогранника P, см. [13, §3.3], а также количеству пар непересекающихся гиперграней P. В случае $P = As^n$, последнее равно количеству пар пересекающихся диагоналей $(n+3)$-угольника G_{n+3}, см. [29, Lecture II, Cor 6.2]. Остается заметить, что для каждой четверки вершин многоугольника G_{n+3} существует в точности одна пара пересекающихся диагоналей, концами которых будут эти 4 вершины. □

Вычисление, проведенное выше, может быть проделано, также, при помощи общей формулы $\beta^{-1,4}(P) = \binom{f_0}{2} - f_1$, см. [13, Лемма 8.13], где f_i есть число $(n-i-1)$-граней многогранника P. Числа f_i для As^n хорошо известны, см. [29, Lecture II].

В дальнейшем мы предполагаем, что никакие 3 диагонали многоугольника G_{n+3} не проходят через одну точку, что может быть достигнуто малым шевелением его вершин. Выберем и фиксируем циклический порядок на вершинах G_{n+3} так, что 2 последовательные вершины соединены ребром многоугольника. Будем называть диагонали G_{n+3}, соединяющие i-ую и $(i+2)$-ую вершины (modulo $n+3$) для $i = 1, \ldots, n+3$ *короткими*; остальные диагонали — *длинными*.

Назовем точки пересечения диагоналей, находящиеся внутри G_{n+3}, *отмеченными точками*, а всякий отрезок диагонали, соединяющий 2 отмеченные точки, лежащие на этой диагонали, назовем *отмеченным отрезком.* Наконец, будем называть *отмеченным треугольником* треугольник, вершинами которого являются 3 отмеченных точки, а сторонами — 3 отмеченных отрезка.

Предложение 2.2.5. *Имеем:*

$$b^4(\mathcal{Z}_{As^n}) = \beta^{-2,6}(As^n) = 5\binom{n+4}{6}$$

Доказательство. Нам нужно найти число порождающих 4-ой группы когомологий $H\big[\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes \big[K_P],d\big]$, см. Теорему 4.1.3 (заметим, что здесь $m = \frac{(n+3)n}{2}$ — число диагоналей G_{n+3}). Эта группа порождена когомологическими классами коциклов вида $u_iu_jv_k$, где все 3 индекса попарно различны, и u_iv_k, u_jv_k суть 3-коциклы. Эти 3-коциклы соответствуют парам $\{i,k\}$ и $\{j,k\}$ пересекающихся диагоналей многоугольника G_{n+3}, а также, паре отмеченных точек, лежащих на k-ой диагонали. Таким образом, всякий коцикл $u_iu_jv_k$ представляется отмеченным отрезком. Равенство $d(u_iu_ju_k) = u_iu_jv_k - u_iv_ju_k + v_iu_ju_k$ показывает, что когомологические классы, представленные коциклами, стоящими в его правой части, являются линейно зависимыми. Каждое такое равенство взаимно-однозначно соответствует отмеченному треугольнику.

Таким образом, мы получили, что $\beta^{-2,6}(As^n) = S_{n+3} - T_{n+3}$, где S_{n+3} есть число отмеченных отрезков, а T_{n+3} есть число отмеченных треугольников внутри G_{n+3}. Эти два числа находятся при помощи следующих трех лемм.

Лемма 2.2.6. *Число отмеченных треугольников внутри G_{n+3} есть*

$$T_{n+3} = \binom{n+3}{6}$$

Доказательство. Заметим, что для 6-угольника существует ровно один отмеченный треугольник (см. Рис. 2.1); таким образом, всякие 6 вершин многоугольника G_{n+3} дают нам ровно один отмеченный треугольник. □

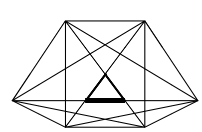

Рис. 2.1:

Пусть d есть диагональ G_{n+3}; обозначим через $p(d)$ число отмеченных точек, лежащих на d. Определим *длину* диагонали d как наименьшее из двух чисел, равных количеству вершин G_{n+3}, лежащих в одной из двух открытых полуплоскостей, определяемых диагональю d, соответственно. Таким образом, короткие диагонали имеют длину 1, и все диагонали имеют длины $\le \frac{n+1}{2}$. Будем называть диагонали максимальной длины *максимальными.* Очевидно, что $p(d)$ зависит только от длины диагонали d, поэтому мы обозначим через $p(j)$ число отмеченных точек на диагонали длины j.

Лемма 2.2.7. *Если $n = 2k-1$ — нечетное число, то*

$$S_{n+3} = \frac{n+3}{2}\sum_{l=1}^{k-1}\Big(4l^2k^2 - 2k(2l^3+l)\Big) + \frac{n+3}{4}k^2(k^2-1).$$

Если $n = 2k-2$ — четное число, то

$$S_{n+3} = \frac{n+3}{2}\sum_{l=1}^{k-1}\Big(4l^2k^2 - 2k(2l^3+2l^2+l) + (l^4+2l^3+2l^2+l)\Big).$$

Доказательство. Предположим, сначала, что $n = 2k-1$. Тогда:

$$\begin{aligned} S_{n+3} &= \sum_d \frac{p(d)(p(d)-1)}{2} = \\ &= (n+3)\left(\sum_{j=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{p(j)(p(j)-1)}{2}\right) - \left(\frac{n+3}{2}\right)\frac{p(\frac{n+1}{2})(p(\frac{n+1}{2})-1)}{2}, \end{aligned}$$

поскольку число отмеченных отрезков на максимальных диагоналях посчитано в сумме дважды.

Обозначим через v $(n+3)$-ю (для определенности) вершину многоугольника G_{n+3} и занумеруем диагонали, исходящие из v, их длинами. Будем обозначать через $c(i,j)$ суммарное число точек пересечения j-ой диагонали, исходящей из v, с диагоналями, исходящими из i-ой вершины для $1 \le i \le j \le \frac{n+1}{2}$. Положим,также, $c(i,j) = 0$ при $i > j$. Тогда будем иметь:

$$p(j) = \sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} c(i,j), \tag{2.1}$$

Для того, чтобы вычислить $c(i,j)$, заметим, что:

$$\begin{aligned} &c(1,1) = n; \\ &c(i,j-1) = c(i,j) + 1 \quad \text{для } 1 \le i < j \le \frac{n+1}{2}; \\ &c(i+1,j+1) = c(i,j) - 1 \quad \text{для } 1 \le i \le j \le \frac{n-1}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что:

$$c(i,j) = c(1, j-i+1) - (i-1) = c(1,1) - (j-i) - (i-1) = n - j + 1, \quad (2.2)$$

при $i \le j$. Заметим, что $c(i,j)$ не зависит от i. Подставляя это в (2.1) а затем, подставляя результирующее выражение для $p(j)$ в сумму для S_{n+3} выше, мы получаем требуемую формулу в этом случае.

Случай $n = 2k-2$ рассматривается аналогично. Единственное различие заключается в том, что теперь из каждой вершины исходят две максимальные диагонали G_{n+3}, так что вычитание в сумме для S_{n+3} не требуется. $\square$

Лемма 2.2.8. *Число отмеченных отрезков внутри G_{n+3} есть*

$$S_{n+3} = (n+3)\binom{n+3}{5}.$$

Доказательство. Это может быть получено из Леммы 2.2.7 суммированием, если использовать известные формулы для сумм Σ_n n-ых степеней первых $(k-1)$ натуральных чисел:

$$\Sigma_1 = \frac{k(k-1)}{2}, \qquad \Sigma_2 = \frac{k(k-1)(2k-1)}{6},$$
$$\Sigma_3 = \frac{k^2(k-1)^2}{4}, \qquad \Sigma_4 = \frac{k(k-1)(2k-1)(3k^2-3k-1)}{30}.$$

$\square$

Теперь утверждение предложения 2.2.5 следует из результатов Леммы 2.2.7 и Леммы 2.2.8. $\square$

Отметим следующий важный для дальнейшего факт (см. [29, Lecture II, Cor. 6.2]):

Предложение 2.2.9. *Две гиперграни F_1 и F_2 многогранника As^n не пересекаются тогда и только тогда, когда соответствующие диагонали d_1 и d_2 многоугольника G_{n+3} пересекаются (в отмеченной точке).*

Лемма 2.2.10. *Число отмеченных точек на максимальной диагонали многоугольника G_{n+3} равно*

$$q = q(n) = \begin{cases} \frac{n(n+2)}{4}, & \text{если } n \text{ четно;} \\ \frac{(n+1)^2}{4}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Доказательство. В случае $n = 2$ утверждение очевидно. Если n нечетно, полагая $j = \frac{n+1}{2}$ в (2.1) и используя (2.2) получим

$$p(j) = \sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} c\Big(i, \frac{n+1}{2}\Big) = \frac{(n+1)^2}{4}.$$

Если n четно, то максимальная диагональ имеет длину $j = \frac{n}{2}$. Легко видеть, что в этом случае $p(j) = \sum_{i=1}^{n/2} c(i,j)$ вместо (2.1), а соотношение (2.2) сохраняется. Поэтому,

$$p(j) = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} c\Big(i, \frac{n}{2}\Big) = \frac{n(n+2)}{4}.$$

$\square$

Будем доказывать теорему для As^n индукцией по n. База индукции $n = 3$ проверяется непосредственным вычислением, см. таблички биградуированных чисел Бетти ниже. По следствию из теоремы Хохстера, для того, чтобы вычислить $\beta^{-i,2(i+1)}(P)$, мы должны найти все подмножества $I \subset [m]$, $|I| = i + 1$, для которых соответствующие P_I имеют более одной связной компоненты. В случае $i = q$, мы докажем, что $cc(P_I) \leq 2$ для $|I| = q + 1$, и опишем явно все I, для которых $cc(P_I) = 2$. В случае $i > q$, мы докажем, что $cc(P_I) = 1$ для $|I| = i + 1$. Эти утверждения будут доказаны как отдельные леммы; переход индукции будет следовать из них в конце рассуждения.

Будем нумеровать вершины G_{n+3} целыми числами от 1 до $n + 3$. Тогда всякая диагональ d соответствует упорядоченной по возрастанию паре (i, j) целых чисел таких, что $i < j - 1$. Нам будет удобно рассматривать диагональ, соответствующую паре (i, j), как целочисленный отрезок $[i, j]$ внутри отрезка $[1, n + 3]$ на вещественной прямой. Тогда Предложение 2.2.9 может быть переформулировано следующим образом:

Предложение 2.2.11. *Гиперграни F_1 и F_2 многогранника $P = As^n$ не пересекаются тогда и только тогда, когда соответствующие отрезки $[i_1, j_1]$ и $[i_2, j_2]$ перекрываются, т.е*

$$F_1 \cap F_2 = \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad i_1 < i_2 < j_1 < j_2 \quad \textit{или} \quad i_2 < i_1 < j_2 < j_1.$$

Пусть I есть множество диагоналей многоугольника G_{n+3} (или целочисленных отрезков на $[1, n+3]$), а P_I — соответствующее множество (1.4). Мы будем писать $I = I_1 \sqcup I_2$, как только P_I имеет в точности две связные компоненты, соответствующие I_1 и I_2. Обозначим, также, через $e(I)$ множество концов отрезков из набора I; это есть подмножество целых чисел от 1 до $n+3$.

Предложение 2.2.12. *Если $I = I_1 \sqcup I_2$, то подмножества $e(I_1)$ и $e(I_2)$ не пересекаются.*

Доказательство. Непосредственное следствие Предложения 2.2.11. □

Для данного целого числа $m \in [1, n+3]$ и набора отрезков I, обозначим через $c_I(m)$ число отрезков из I, исходящих из m (эквивалентно, число диагоналей из I, исходящих из вершины m). Тогда $0 \leq c_I(m) \leq n$.

Предложение 2.2.13. *Если $I = I_1 \sqcup I_2$, то существует m такое, что $c_I(m) \leq \frac{n+1}{2}$.*

Доказательство. Предположим противное. Выберем целые точки $m_1 \in e(I_1)$ и $m_2 \in e(I_2)$. Поскольку $c_I(m_1) > \frac{n+1}{2}$, $c_I(m_2) > \frac{n+1}{2}$ и $e(I_1)$, $e(I_2)$ не пересекаются по предыдущему предложению, мы получаем, что общее число элементов в множестве $e(I)$ больше, чем $2 + \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} = n+3$. Противоречие. □

Лемма 2.2.14. *Имеем $cc(P_I) \leq 2$ при $|I| > l(n) = \frac{n(n+2)}{4}$.*

Доказательство. Докажем эту лемму индукцией по n.

Положим $n = 3$ и докажем наше утверждение от противного, т.е предположим, что существует множество $I = I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3 \sqcup \ldots$ диагоналей G_6, $|I| \geq 4$, такое, что $cc(P_I) \geq 3$. Поскольку многоугольник G_6 имеет лишь 3 максимальных диагонали, найдчтся короткая диагональ $d \in I$; пусть $d \in I_1$. Так как $cc(P_I) \geq 3$, любые диагонали $e \in I_2$ и $f \in I_3$ пересекают d. Поэтому, e и f исходят из общей вершины A многоугольника G_6. Мы получили противоречие с тем, что $e(I_2)$ и $e(I_3)$ не пересекаются (см. Предложение 2.2.12).

Пусть теперь $n > 3$ и предположим, что существует множество $I = I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3 \sqcup \ldots$ диагоналей G_{n+3}, $|I| > \frac{n(n+2)}{4}$, такое, что $cc(P_I) \geq 3$.

Если найдется целая точка $m \in [1, n+3]$ такая, что $c_I(m) = 0$, то мы можем считать, что m есть первая вершина и рассматривать I как множество диагоналей G_{n+2} (отрезок $[2, n+3]$ не может принадлежать I, поскольку иначе $cc(P_I) = 1$). Так как $l(n) > l(n-1)$, применение предположения индукции завершает доказательство леммы в этом случае.

Пусть $c_I(m) \geq 1$ для всякой целой точки $m \in [1, n+3]$. Тогда рассуждение, аналогичное приведчнному в доказательстве Предложения 2.2.13, показывает, что существует точка m такая, что $c_I(m) \leq \frac{n}{3}$. Рассмотрим 2 случая:
1. Найдется точка $m_0 \in e(I_k)$, для некоторого $1 \leq k \leq cc(P_I)$, с минимальным значением $c_I(m) \leq \frac{n}{3}$, такая, что $|I_k| > c_I(m_0)$.

Можно считать, что одна из таких m_0 является первой вершиной. Выбрасывая из I все отрезки, исходящие из 1, мы получаем новое множество $\tilde{I}$ отрезков внутри $[2, n+3]$ (отрезок $[2, n+3]$ не может принадлежать I, т.к иначе $cc(P_I) \leq 2$). Имеем:

$$|\tilde{I}| = |I| - c_I(1) > \frac{n(n+2)}{4} - \frac{n}{3} > \frac{(n-1)(n+1)}{4} = l(n-1).$$

По предположению индукции, $2 \geq cc(P_{\tilde{I}}) \geq cc(P_I) \geq 3$. Противоречие.
2. Для всякой вершины m_0 с минимальной величиной $c_I(m) \geq 1$ имеем $|I_k| = c_I(m_0)$, где $m_0 \in e(I_k)$.

Снова мы можем считать, что одна из таких m_0 является первой вершиной $1 \in I_k$. Тогда $c_I(1) = 1$, т.к иначе найдется ≥ 2 целых точек m внутри $[2, n+3]$, которые принадлежат $e(I_k)$ и имеют $c_I(m) = 1$ (напомним, что $|I_k| = c_I(m_0)$).

Без потери общности рассуждения можно считать, что $k = 1$. Тогда

$$|I| = 1 + |I_2| + |I_3| + \ldots \leq 1 + (1 + q(n-1)) \leq 2 + \frac{n^2}{4} \leq \frac{n(n+2)}{4}.$$

Первое из неравенств выше имеет место, т.к $\tilde{I} = I_2 \sqcup I_3 \sqcup \ldots$ есть набор диагоналей G_{n+2} (отрезок $[2, n+3]$ не может принадлежать I, поскольку $cc(P_I) \geq 3$), и мы можем применить к набору $\tilde{I}$ предположение индукции в доказательстве основной Теоремы 2.2.1, что дает нам $|\tilde{I}| \leq 1 + q(n-1)$. Получили противоречие с предположением $|I| > \frac{n(n+2)}{4}$. □

Лемма 2.2.15. *Пусть $I = I_1 \sqcup I_2$, $|I| \geq q+1$, $|I_1| \geq 2$ и $|I_2| \geq 2$. Тогда найдется другой набор I' такой, что $I' = I'_1 \sqcup I'_2$, $|I'_1| = 1$ и $|I'| > |I|$.*

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по n. Случаи $n = 3, 4, 5$ проверяются непосредственным вычислением (см. таблички в конце этого раздела).

Изменяя, если необходимо, нумерацию вершин G_{n+3}, мы можем считать, что первая вершина имеет минимальное значение $c_I(m)$. Тогда $c_I(1) \le \frac{n+1}{2}$ по Предложению 2.2.13. Без потери общности можем считать, что $1 \notin e(I_1)$.

Докажем, что отрезок $[2, n+3]$ не принадлежит I. В самом деле, в противном случае $c_I(1) > 0$ (иначе $cc(P_I) = 1$), $1 \in e(I_2)$, $[2, n+3] \in I_1$. Если $c_I(1) \ge 2$, то найдчтся целая точка $m \in e(I_2)$ внутри $[2, n+3]$ такая, что $c_I(m) = 1 < c_I(1)$, что противоречит выбору первой вершины. Тогда $c_I(1) = 1$ и $[2, n+3] \in I_1$ дают нам $|I_2| = c_I(1) = 1$, что противоречит предположению $|I_2| \ge 2$ в утверждении леммы.

Выбрасывая из I все отрезки, исходящие из 1, мы получим новый набор $\tilde{I}$ целочисленных отрезков внутри $[2, n+3]$. Заметим, что

$$|\tilde{I}| = |I| - c_I(1) \ge |I| - \left[\tfrac{n+1}{2}\right]. \tag{2.3}$$

Мы хотим применить предположение индукции к набору $\tilde{I}$ целочисленных отрезков внутри $[2, n+3]$, рассматриваемых как диагонали $(n+2)$-угольника G_{n+2}. Чтобы сделать это, мы должны проверить предположения леммы для набора $\tilde{I}$.

Во-первых, мы утверждаем, что $\tilde{I} = \tilde{I}_1 \sqcup \tilde{I}_2$, т.е $P_{\tilde{I}}$ имеет в точности две связные компоненты. В самом деле, это множество, очевидно, имеет не менее двух компонент, и число компонент не может быть больше двух по Лемме 2.2.14, поскольку

$$|\tilde{I}| \ge |I| - \frac{n+1}{2} \ge q + 1 - \frac{n+1}{2} > \frac{(n+1)^2}{4} - \frac{n+1}{2} = l(n-1).$$

Во-вторых, $|\tilde{I}_1| = |I_1| \ge 2$ и $|I_2| \ge |\tilde{I}_2| \ge 1$. Если $|\tilde{I}_2| = 1$, то мы имеем либо $c_I(1) = 1$, либо $c_I(1) = 2$. (В самом деле, если $c_I(1) = 0$, то $|I_2| = |\tilde{I}_2| = 1$, что противоречит предположениям леммы, а $c_I(1)$ не может быть больше 2, т.к иначе $c_I(1)$ не является минимальным.) Таким образом, $|I_2| \le 3$. Мы, также, имеем $|I_1| = |\tilde{I}_1| \le p(d)$, где $d \in \tilde{I}_2 = \{d\}$, т.к d пересекает всякую диагональ из I_1. В силу Леммы 2.2.10, $p(d) \le q(n-1) \le \frac{n^2}{4}$. Поэтому,

$$|I| = |I_1| + |I_2| \le p(d) + 3 \le \frac{n^2}{4} + 3 \le \frac{(n+1)^2}{4} < q(n) + 1 \le |I|$$

при $n \ge 6$. Противоречие. Итак, $|\widetilde{I_2}| \ge 2$.

Осталось проверить, что $|\tilde{I}| \geq q(n-1)+1$. Если n нечетно, то

$$|\tilde{I}| \geq |I| - \frac{n+1}{2} \geq \frac{(n+1)^2}{4} + 1 - \frac{n+1}{2} = \frac{(n-1)(n+1)}{4} + 1 = q(n-1)+1.$$

Если n четно, то

$$|\tilde{I}| \geq |I| - \frac{n}{2} \geq \frac{n(n+2)}{4} + 1 - \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4} + 1 = q(n-1)+1.$$

Теперь, применяя предположение индукции к набору $\tilde{I}$, находим новый набор целочисленных отрезков $\tilde{J}$ внутри $[2, n+3]$ с $|\tilde{J}| > |\tilde{I}|$ и $|\tilde{J}_1| = 1$. Тогда $\tilde{J}_1 = \{d\}$, где d есть диагональ многоугольника G_{n+2}. Таким образом, $|\tilde{J}| = |\tilde{J}_1| + |\tilde{J}_2| \leq 1 + p(d)$. Имеем $p(d) \leq q(n-1)$, и равенство имеет место тогда и только тогда, когда $d = d_{max}$ есть максимальная диагональ в G_{n+2}. Поэтому, мы можем заменить $\tilde{J}$ набором $J' = J'_1 \sqcup J'_2$, где $J'_1 = \{d_{max}\}$ и J'_2 есть множество всех диагоналей G_{n+2}, которые пересекают d_{max} в еҷ отмеченных точках. Действительно, мы имеем

$$|J'| = 1 + q(n-1) \geq 1 + p(d) \geq |\tilde{J}| > |\tilde{I}|. \tag{2.4}$$

Выбирая в качестве d_{max} в G_{n+2} диагональ, соответствующую отрезку $[2, k]$, где $k = \left[\frac{n+7}{2}\right]$, мы замечаем, что она является, также, и максимальной диагональю для G_{n+3}. Теперь положим $I'_1 = \{d_{max}\}$ и берем в качестве I'_2 объединение J'_2 и всех диагоналей, исходящих из 1 и пересекающих d_{max}. Поскольку число внутренних целых точек на d_{max} есть $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, мы получаем из (2.4) и (2.3)

$$|I'| = 1 + |I'_2| = 1 + |J'_2| + \left[\tfrac{n+1}{2}\right] = |J'| + \left[\tfrac{n+1}{2}\right] > |\tilde{I}| + \left[\tfrac{n+1}{2}\right] \geq |I|,$$

что завершает переход индукции. □

Лемма 2.2.16. *Пусть $cc(P_I) = 2$, $I = I_1 \sqcup I_2$ и $|I| \geq q+1$. Тогда либо $|I_1| = 1$, либо $|I_2| = 1$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е $|I_1| \geq 2$ и $|I_2| \geq 2$. По Лемме 2.2.15, мы можем найти другой набор $I' = I'_1 \sqcup I'_2$ такой, что $|I'_1| = 1$ и $|I'| > |I| \geq q+1$. С другой стороны, $|I'_1| = 1$ дает $I'_1 = \{d\}$ и $|I'| \leq 1 + p(d) \leq 1 + q$. Противоречие. □

Лемма 2.2.17. *Пусть $cc(P_I) = 2$, $I = I_1 \sqcup I_2$ и $|I| = q+1$. Тогда I_1 состоит из одной максимальной диагонали d_{max}, а I_2 состоит из всех диагоналей G_{n+3}, пересекающих d_{max}.*

Доказательство. Согласно Лемме 2.2.16, мы можем считать, что I_1 состоит из одной диагонали d. Тогда

$$1 + q = |I| = |I_1| + |I_2| \leq 1 + p(d) \leq 1 + q,$$

что дает нам $p(d) = q$ и $|I_2| = p(d)$. □

Лемма 2.2.18. *Пусть $|I| > q + 1$. Тогда $cc(P_I) = 1$.*

Доказательство. Имеем $|I| > q + 1 > l(n)$. Поэтому, $cc(P_I) \leq 2$, в силу Леммы 2.2.14. Предположим, что $cc(P_I) = 2$ и $I = I_1 \sqcup I_2$. Тогда $|I_1| = 1$, по Лемме 2.2.16, т.е $I_1 = \{d\}$ и $|I| \leq 1 + p(d) \leq 1 + q$. Но это противоречит предположению $|I| > q + 1$. □

Теперь мы можем закончить переход индукции в доказательстве Теоремы 2.2.1. В силу следствия из теоремы Хохстера и Леммы 2.2.17, мы получаем, что число $\beta^{-q,2(q+1)}(P)$ равно количеству максимальных диагоналей многоугольника G_{n+3}. Последнее равно $n + 3$, если n четно, и $\frac{n+3}{2}$, если n нечетно. Тот факт, что $\beta^{-i,2(i+1)}(P)$ равно нулю при $i \geq q + 1$, вытекает из Леммы 2.2.18.

Приведем, также, результаты вычисления биградуированных чисел Бетти для ассоциэдров As^n при $n \leq 5$, полученные с использованием компьютерной программы *Macaulay 2*, см. [62].

Таблички ниже имеют $n - 1$ строк и $m - n - 1$ столбцов. Число, стоящее на пересечении k-ой строки и l-го столбца равно $\beta^{-l,2(l+k)}(As^n)$, где $1 \leq l \leq m - n - 1$ и $2 \leq l + k \leq m - 2$. Остальные биградуированные числа Бетти равны нулю, за исключением $\beta^{0,0}(As^n) = \beta^{-(m-n),2m}(As^n) = 1$, см. [**?**, Ch.8]. Биградуированные числа Бетти, которые даются Теоремой 2.2.1, отмечены жирным шрифтом.

1. $n = 2$, $m = 5$.

5	5

2. $n = 3$, $m = 9$.

15	35	24	**3**	**0**
0	**3**	24	35	15

3. $n = 4$, $m = 14$.

35	140	217	154	49	**7**	**0**	**0**	**0**
0	28	266	784	1094	784	266	28	0
0	**0**	**0**	**7**	49	154	217	140	35

4. $n = 5$, $m = 20$.

70	420	1089	1544	1300	680	226	44	**4**	**0**	**0**
0	144	1796	8332	20924	32309	32184	20798	8480	2053	264
0	0	12	264	2053	8480	20798	32184	32309	20924	8332
0	**0**	**0**	**0**	**0**	4	44	226	680	1300	1544

$\vdots$

Общий случай теперь получается переходом от ассоциаэдра к пермутоэдру и от последнего – к любому граф-ассоциаэдру, если применить результат А.Фенна [44]: (напомним, что для нестоэдра, построенного по связному производящему множеству, гиперграням взаимнооднозначно соответствуют собственные элементы производящего множества)

Предложение 2.2.19. *Пусть P – произвольный нестоэдр, σ – подмножество элементов его производящего множества B. Рассмотрим следующее множество*

$$\sigma' = \sigma \cup \{V \in [n+1] \setminus B | \exists \omega_1 \cup \ldots \cup \omega_k = V\},$$

где $\omega_i \in B$. Тогда $Pe^n_{\sigma'}$ и P^n_σ гомотопически эквивалентны.

2.3 Кручения и тройные произведения Масси в кольце когомологий момент-угол многообразий

Прежде всего заметим, что задача о наличии нетривиального кручения в кольце целочисленных когомологий $\mathcal{Z}_K$ эквивалентна задаче о поиске всех возможных кручений (конечных порядков) в группах приведенных когомологий полных подкомплексов K_I в $K = K_P$. Многогранники P, для которых кольцо когомологий $\mathcal{Z}_P$ свободно как абелева группа, будем называть свободными от кручения.

Предложение 2.3.1. *Многогранники размерности, не превосходящей 4, свободны от кручений.*

Доказательство. Нетривиальным является случай размерности 4. Но поскольку нерв-комплекс в случае многогранника есть симплициальная сфера, то наличие кручений в некотором подкомплексе K_I приводит к наличию кручений в гомологиях двойственного по Александеру комплекса, но эти гомологии свободны уже по размерностным соображениям $(n-1=3)$. Последнее можно также увидеть из формулы универсальных коэффициентов. □

Далее мы формулируем основной результат данного параграфа.

Предложение 2.3.2. *В целочисленных когомологиях момент-угол многообразия для граф-ассоциаэдра имеется кручение, начиная с размерности $n = 5$, если ограничение $B(\Gamma)$ на некоторое подмножество I из $|I| \geq 6$ элементов содержит все подмножества I.*

Следствие 2.3.3. *Серии пермутоэдров и стеллаэдров содержат произвольно сложное кручение.*

Заметим, что условие теоремы геометрически означает, что гиперграни граф-ассоциаэдра являются произведениями граф-ассоциаэдров меньших размерностей (это верно в силу результатов А.Фенна [44]), хотя бы один из которых – пермутоэдр. Докажем нашу теорему.

Воспользуемся Леммой о срезке граней симплекса из §3.1, чтобы получить нестоэдр P из симплекса той же размерности, последовательно срезая грани размерностей $0 \leq d \leq n-2$. Условие теоремы равносильно тому, что в границе двойственного комплекса одна из граней симплекса размерности $d \geq 2$ будет в конце концов барицентрически разбита. Но для любого симплициального комплекса K с m вершинами, его барицентрическое подразбиение можно вписать в барицентрическое подразбиение симплекса размерности $m-1$ так что, K' будет полным подкомплексом на своих вершинах в границе барицентрического подразбиения симплекса. Но последнее есть K_P, когда P – пермутоэдр. Таким образом взяв произвольную конечную (минимальную) триангуляцию K пространства с нужным нам конечным кручением, мы найдем по формуле Хохстера размерность группы когомолгий $\mathcal{Z}_P$ в которую она даст соответствующий вклад.

С.Чой и Х.Парк [38] доказали, что в кольце когомологий малых накрытий (вещественных аналогов квазиторических многообразий) над граф-ассоциаэдрами нет нечетных кручений и показали пример в классе нестоэдров, дающий такое кручение (вписали в нерв-комплекс многогранника триангуляцию пространства Мура $M(q,1)$, где q – нечетное положительное число с помощью конструкции симплициального букета, как полный подкомплекс).

Пример 2.3.4. Рассмотрим минимальную триангуляцию K проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$.
Мы можем вложить ее барицентрическое разбиение в качестве полного подкомплекса на $j = 6 + 15 + 10 = 31$ вершинах в границу барицентрического подразбиения Δ^5.
В случае $P = Pe^5$ мы имеем $m = 2^6 - 2 = 62$ и $n = 5$. По формуле Хохстера получаем 2-кручение в группе когомологий размерности $q = -i + 2j$, где $j = 31$ и $j - i - 1 = 2$.

Таким образом, существует 2-кручение в $H^*(\mathcal{Z}_{Pe^n})$ и $H^*(\mathcal{Z}_{St^{n+1}})$ при $n \geq 5$.

Перейдем теперь к вопросу о наличии нетривиальных тройных произведений Масси в когомологиях граф-ассоциаэдров. Наш основной результат таков:

Замечание 2.3.5. Заметим, что по теореме Данилова–Юркевича кольцо целочисленных сингулярных когомологий проективных торических многообразий V_P свободно от кручений. Таким образом, в случае флагового дельзантова многогранника P, удовлетоворяющего условию предложения, мы имеем пример гладкого 2-связного многообразия $\mathcal{Z}_P$ с произвольным кручением в целочисленных когомологиях и с эффективным, гладким действием компактного тора, такого что, после факторизации по действию максимального свободно действующего подтора, фактор-пространство V_P имеет свободные группы целочисленных когомологий.

Теорема 2.3.6. *Для любого связного графа* Γ *на [n+1] вершинах,* $n \geq 3$ *в когомологиях* $\mathcal{Z}_P$ *есть нетривиальные тройные произведения Масси.*

Доказательство. Вспомним, что по теореме Бухштабера и Володина любой флаговый нестоэдр, в том числе граф–ассоциаэдр, может быть комбинаторно получен как результат последовательной срезки граней коразмерности только 2 из куба соответствующей размерности. Воспользуемся конструкцией Баскакова [4] нетривиальных тройных произведений Масси в когомологиях $\mathcal{Z}_K$. Баскаков рассматривает джойн трех 1-сфер (окружностей) и в нем делает два 1-звездных преобразования, так чтобы звезды получившихся симплексов не пересекались. Затем в получившемся комплексе K берутся классы трчх исходных сфер и доказывается, что их произведение Масси не содержит тривиального когомологического элемента (нет кограниц). Но двойственный простой многогранник P получается в этом случае из 3-куба срезкой двух скрещивающихся ребер. В 3-мерном случае для связных графов на 4 вершинах утверждение проверяется на коциклах непосредственно (имеется всего 6 различных граф-ассоциаэдров в размерности 3 на связном графе). Для связного графа на ≥ 5 вершинах ограничение Γ на всякие 4 вершины, являющееся связным подграфом (оно очевидно существует) дает подкомплекс с нетривиальными 3-произведениями Масси в когомологиях $\mathcal{Z}_P$. $\square$

Примеры этой главы показывают, что топология момент-угол многообразий может быть чрезвычайно сложной, в общем случае она далека от полного эффективного описания. В следующей главе мы приведем пример семейства многогранников, для которых ситуация противоположна: они не флаговые, и кольцо когомологий (а в некоторых случаях и топологический тип $\mathcal{Z}_P$) могут быть описаны полностью.

Глава 3

Обобщенные многогранники усечения, их кольца граней и момент-угол многообразия

3.1 Многогранники усечения и их момент-угол многообразия

В этом параграфе мы развиваем алгебраическую и топологическую технику для работы со срезками вершин данного многогранника P. В этом параграфе это симплекс. Пусть P — простой n-мерный многогранник, и $v \in P$ — его вершина. Выберем гипергрань H такую, что H отделяет v от остальных вершин и v принадлежит положительному полупространству $H_{\geq}$, определяемому H. Тогда $P \cap H_{\geq}$ будет n-мерным симплексом, а $P \cap H_{\leq}$ — простым многогранником, который мы назовем *усечением* P. В том случае, если выбор срезаемой вершины ясен из контекста или неважен, мы будем использовать обозначение $\mathrm{vc}(P)$. Мы, также, будем обозначать через $\mathrm{vc}^k(P)$ многогранник, получающийся из P последовательным усечением, примененным k раз.

В качестве примера описанной выше процедуры рассмотрим многогранник $\mathrm{vc}^k(\Delta^n)$, где Δ^n есть n-мерный симплекс, $n \geq 2$. Будем называть $\mathrm{vc}^k(\Delta^n)$ *многогранником усечения*; у него, очевидно, $m = n+k+1$ гиперграней. Заметим, что комбинаторный тип $\mathrm{vc}^k(\Delta^n)$ зависит от выбора срезаемых вершин при $k \geq 3$, однако это обстоятельство не отразится на наших обозначениях.

Рассмотрим также симплициальный многогранник Q, двойственный к многограннику усечения $\mathrm{vc}^k(\Delta^n)$. Он известен под названием *многогранника пи-*

рамидальной надстройки и получается из Δ^n последовательным добавлением пирамид над гипергранями.

Числа Бетти для многогранников усечения были вычислены в [75], но градуировка, использованная там, отлична от нашей. Мы формулируем этот результат ниже и даем его доказательство с несколько отличающейся от [75] аргументацией, используя нашу топологическую градуировку и обозначения.

Теорема 3.1.1. *Пусть $P = \mathrm{vc}^k(\Delta^n)$ — многогранник усечения. Тогда для $n \geq 3$ биградуированные числа Бетти даются следующими формулами:*

$$\begin{aligned}
&\beta^{-i,2(i+1)}(P) = i\binom{k+1}{i+1},\\
&\beta^{-i,2(i+n-1)}(P) = (k+1-i)\binom{k+1}{k+2-i},\\
&\beta^{-i,2j}(P) = 0, \quad \textit{для } i+1 < j < i+n-1.
\end{aligned}$$

Остальные биградуированные числа Бетти — нулевые, кроме

$$\beta^{0,0}(P) = \beta^{-(m-n),2m}(P) = 1.$$

Замечание 3.1.2. Первая из формул выше была доказана в работе [37] комбинаторно.

Доказательство. Начнем с анализа поведения биградуированных чисел Бетти при одном усечении. Пусть P — произвольный простой многогранник и $P' = \mathrm{vc}(P)$. Обозначим через Q и Q' двойственные симплициальные многогранники, соответственно, а через K и K' — их граничные симплициальные комплексы. Тогда Q' получается с помощью добавления пирамиды с вершиной v над гипергранью F многогранника Q. Мы также введем обозначения V, V' и $V(F)$ для множества вершин Q, Q' и F соответственно, так что $V' = V \cup v$.

Доказательство первой формулы основано на следующей лемме:

Лемма 3.1.3. *Пусть P — простой n-мерный многогранник с m гипергранями, и $P' = \mathrm{vc}(P)$. Тогда:*

$$\beta^{-i,2(i+1)}(P') = \binom{m-n}{i} + \beta^{-(i-1),2i}(P) + \beta^{-i,2(i+1)}(P).$$

Доказательство. Применяя формулу Хохстера при $j=i+1$, мы получаем:

$$\begin{aligned}\beta^{-i,2(i+1)}(P') &= \sum_{W\subset V',\,|W|=i+1} \dim\,\widetilde{H}_0(K'_W)\\ &= \sum_{W\subset V',\,v\in W,\,|W|=i+1} \dim\,\widetilde{H}_0(K'_W)\\ &+ \sum_{W\subset V',\,v\notin W,\,|W|=i+1} \dim\,\widetilde{H}_0(K'_W).\end{aligned}$$

Вторая сумма равна $\beta^{-i,2(i+1)}(P)$ по той же формуле.

Для первой суммы получим: во множестве W имеется i «старых» вершин и одна «новая» v. Поэтому число связных компонент K'_W (на единицу большее размерности $\widetilde{H}_0(K'_W)$) либо остается тем же (если $W\cap F\neq\varnothing$), либо увеличивается на 1 (если $W\cap F=\emptyset$, и, в этом случае, новая связная компонента есть новая вершина v). Количество подмножеств W последнего типа равно числу способов выбрать i вершин из $m-n$ «старых» вершин, не лежащих в F. Первая сумма, таким образом, дается формулой

$$\sum_{W\subset V,|W|=i} \dim\,\widetilde{H}_0(K_W)+\binom{m-n}{i}=\beta^{-(i-1),2i}(P)+\binom{m-n}{i},$$

в которой мы снова использовали формулу Хохстера. □

Теперь первая из формул Теоремы 3.1.1 следует по индукции по числу усечений, если использовать тот факт, что, очевидно, $\beta^{-i,2(i+1)}(\Delta^n)=0$ для всех i и Лемму 3.2.2.

Вторая формула в утверждении основной теоремы вытекает из биградуированной двойственности Пуанкаре.

Доказательство третьей формулы основывается на следующей лемме:

Лемма 3.1.4. *Пусть P — многогранник усечения, K — симплициальный комплекс двойственного симплициального многогранника, V — множество вершин K, и W — непустое, собственное подмножество V. Тогда:*

$$\widetilde{H}_i(K_W)=0 \quad \textit{для } i\neq 0,n-2.$$

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по числу $m = |V|$ вершин комплекса K. Если $m = n+1$, то P — n-мерный симплекс, и K_W является стягиваемым для всякого непустого, собственного подмножества $W \subset V$.

Для того, чтобы сделать шаг индукции, рассмотрим $V' = V \cup v$, и $V(F)$ — то же, что и в начале доказательства основной Теоремы 3.1.1. Предположим, что утверждение доказано для V, и пусть W — непустое, собственное подмножество V'.

Рассмотрим следующие 5 возможных случаев.

Case 1: $v \in W$, $W \cap V(F) \neq \varnothing$.

Если $V(F) \subset W$, то K'_W подразбиение $K_{W-\{v\}}$.

Если же $W \cap V(F) \neq V(F)$, то имеем:

$$K'_W = K_{W-\{v\}} \cup K'_{W\cap V(F)\cup\{v\}}, \quad K_{W-\{v\}} \cap K'_{W\cap V(F)\cup\{v\}} = K_{W\cap V(F)},$$

а тогда и $K_{W\cap V(F)}$, и $K'_{W\cap V(F)\cup\{v\}}$ являются, очевидно, стягиваемыми. С помощью точной последовательности Майера–Вьеториса, получаем:

$$\widetilde{H}_i(K'_W) \cong \widetilde{H}_i(K_{W-\{v\}}).$$

Case 2: $v \in W$, $W \cap V(F) = \varnothing$.

В этом случае, легко видеть, что: $K'_W = K_{W-\{v\}} \sqcup \{v\}$. Отсюда имеем:

$$\widetilde{H}_i(K'_W) \cong \begin{cases} \widetilde{H}_i(K_{W-\{v\}}) \oplus \Bbbk, & \text{при } i = 0; \\ \widetilde{H}_i(K_{W-\{v\}}), & \text{при } i > 0. \end{cases}$$

Case 3: $W = V' - \{v\} = V$.

В этом случае, K'_W — симплициальный $(n-1)$-диск, и потому стягиваем.

Case 4: $v \notin W$, $V(F) \subset W$, $W \neq V$.

Мы имеем:

$$K_W = K'_W \cup F, \quad K'_W \cap F = \partial F,$$

где ∂F обозначает границу гиперграни F. Поскольку, очевидно, ∂F есть симплициальная $(n-2)$-сфера, а F есть симплициальный $(n-1)$-диск, точная последовательность Майера–Вьеториса дает:

$$\widetilde{H}_i(K'_W) \cong \begin{cases} \widetilde{H}_i(K_W), & \text{при } i < n-2; \\ \widetilde{H}_i(K_W) \oplus \Bbbk, & \text{при } i = n-2. \end{cases}$$

Case 5: $v \notin W$, $V(F) \not\subset W$. В этом случае мы получаем сразу, что $K'_W \cong K_W$.

Итак, во всех рассмотренных случаях мы получили:

$$\widetilde{H}_i(K'_W) \cong \widetilde{H}_i(K_{W-\{v\}}) = 0 \quad \text{для } 0 < i < n-2,$$

чем и заканчивается доказательство нашей леммы по принципу математической индукции. $\square$

Теперь третья из формул Теоремы 3.1.1 следует формулы Хохстера и Леммы 3.2.3.

Последнее утверждение Теоремы 3.1.1 следует из [13, След. 8.19]. $\square$

Для полноты изложения мы включили в этот раздел вычисление биградуированных чисел Бетти в случае $n = 2$, т.е., когда P есть многоугольник.

Предложение 3.1.5. *Если $P = \mathrm{vc}^k(\Delta^2)$ есть $(k+3)$-угольник, то*

$$\begin{aligned}
&\beta^{-i,2(i+1)}(P) = i\binom{k+1}{i+1} + (k+1-i)\binom{k+1}{k+2-i},\\
&\beta^{0,0}(P) = \beta^{-(k+1),2(k+3)}(P) = 1,\\
&\beta^{-i,2j}(P) = 0, \quad \textit{иначе.}
\end{aligned}$$

Доказательство. Это вычисление было проделано в [13, Пример 8.21]. Результат может быть получен, также, из рассмотрения точной последовательности Майера–Вьеториса, как в доказательстве Теоремы 3.1.1. $\square$

Следствие 3.1.6. *Биградуированные числа Бетти многогранников усечения $P = vc^k(\Delta^n)$ зависят только от их размерности и числа гиперграней P и не зависят от комбинаторного типа P. Более того, числа $\beta^{-i,2(i+1)}$ не зависят и от размерности n.*

Топологический тип соответствующих момент-угол многообразий $\mathcal{Z}_P$ описывается следующим образом:

Теорема 3.1.7 (см.[25, Theorem 6.3])**.** *Пусть $P = \mathrm{vc}^k(\Delta^n)$ есть многогранник усечения. Тогда соответствующее момент-угол многообразие $\mathcal{Z}_P$ диффеоморфно связной сумме произведений сфер:*

$$\mathop{\#}_{j=1}^{k} \left(S^{j+2} \times S^{2n+k-j-1}\right)^{\# j\binom{k+1}{j+1}},$$

где через $X^{\# k}$ обозначена связная сумма k копий X.

Легко видеть, что числа Бетти связной суммы, см. выше, согласованы с биградуированными числами Бетти многогранника P.

3.2 Обобщенные многогранники усечения: кольца когомологий момент-угол комплексов

Здесь мы значительно расширим класс многогранников, рассмотренный в предыдущем параграфе. Вначале напомним определение срезки вершины. Пусть P выпуклый простой многогранник размерности d и $v \in P$ – его вершина. Выберем гиперплоскость H такую, что H отделяет v от остальных вершин и v лежит в положительном полупространстве $H_{\geq}$, определенном H. Тогда $P \cap H_{\geq}$ является d-мерным симплексом, а $P \cap H_{\leq}$ – простым многогранником, который мы будем называть *усечением вершины (срезкой)* многогранника P. В случае, когда выбор срезаемой вершины ясен из контекста или неважен, мы используем обозначение $\mathrm{vc}(P)$. Мы также обозначаем через $\mathrm{vc}^k(P)$ многогранник, полученный из P последовательным применением операции срезки вершины k раз. Комбинаторный тип многогранника $\mathrm{vc}^k(P)$ может зависеть от выбора срезаемых вершин, но в данной работе это не играет роли.

Примером, иллюстрирующим эту конструкцию, является рассматриваемый нами далее многогранник $P = \mathrm{vc}^k(\Delta^{n_1} \times \ldots \times \Delta^{n_r})$, при $n_1 \geq \ldots \geq n_r \geq 1, r \geq 1, k \geq 0$, где Δ^n есть n-мерный симплекс. P является многогранником усечения (двойственным к многограннику пирамидальной надстройки) тогда и только тогда, когда $r = 1$ или $r = 2$, $n_2 = 1$, здесь мы называем P *обобщенным многогранником усечения типа* $(k; n_1, \ldots, n_r)$ или $(k; n_1, \ldots, n_r)$-многогранником; у него $m = n_1 + \ldots + n_r + r + k$ гиперграней и размерность равна $d = n_1 + \ldots + n_r$.

Как было указано в предыдущем параграфе, биградуированные числа Бетти многогранников усечения были впервые полностью вычислены в работе [75]. Мы начинаем этот раздел с теоремы, дающей полное вычисление биградуированных чисел Бетти в случае $r = 2$:

Теорема 3.2.1. *Для обобщенного многогранника усечения $P = vc^k(\Delta^{n_1} \times \Delta^{n_2})$ с $n_1 \geq n_2 > 1, k \geq 0$, биградуированные числа Бетти $\mathcal{Z}_P$ даются* *следующими формулами* $(1 \le i \le k+1)$.

(a) $\beta^{-i,2(i+n)}(P) = 2\binom{k}{i-1}$, *при* $n_1 = n_2 = n$

(b) $\beta^{-i,2(i+n_1)}(P) = \beta^{-i,2(i+n_2)}(P) = \binom{k}{i-1}$, *при* $n_1 > n_2$

(c) $\beta^{-i,2(i+1)}(P) = \beta^{-(k+2-i),2(k+1-i+n_1+n_2)}(P) = i\binom{k+2}{i+1} - \binom{k}{i-1}$

(d) $\beta^{0,0}(P) = \beta^{-(m-d),2m}(P) = 1$

Остальные биградуированные числа Бетти равны ***нулю***, *где m обозначает число гиперграней P, а d – его размерность.*

Доказательство. Чтобы воспользоваться индукцией по числу срезаемых вершин k, мы должны изучить изменение биградуированных чисел Бетти в случае срезки одной вершины. Пусть P есть произвольный простой многогранник и $P' = \mathrm{vc}(P)$. Обозначим через Q и Q' двойственные к ним симплициальные многогранники соответственно, а через K и K' – их граничные симплициальные комплексы. Тогда Q' получается добавлением пирамиды с вершиной v над гипергранью F многогранника Q. Обозначим также через V, V' и $V(F)$ множества вершин Q, Q' и F соответственно, так что $V' = V \cup v$.

Доказательство утверждения (c) основано на следующей лемме:

Лемма 3.2.2 ([75],[79]). *Пусть P простой d-мерный многогранник с m гипергранями и $P' = \mathrm{vc}(P)$. Тогда*

$$\beta^{-i,2(i+1)}(P') = \binom{m-d}{i} + \beta^{-(i-1),2i}(P) + \beta^{-i,2(i+1)}(P).$$

Доказательство. Прямое применение теоремы Хохстера при $j = i+1$. $\square$

Теперь формула (c) из теоремы 3.2.1 следует по индукции по числу срезаемых вершин, если воспользоваться тем фактом, что $\beta^{-i,2(i+1)}(\Delta^{n_1} \times \Delta^{n_2}) = 0$, $n_1 \ge n_2 > 1$ при всех i, леммой 3.2.2, а также биградуированной двойственностью Пуанкаре. Формула (d) имеет место для всех простых многогранников.

В формуле (b) первое равенство также следует из биградуированной двойственности Пуанкаре. Остается доказать (a) и второе равенство в утверждении (b). Для этого докажем следующую лемму:

Лемма 3.2.3. *Пусть P есть $(k;n_1,n_2)$-многогранник, K его граничный комплекс, V множество вершин K, а W непустое собственное подмножество V. Тогда*

(i) $\widetilde{H}_i(K_W)=0$, *при* $i\neq 0,n_1-1,n_2-1,d-2$;

(ii) При $i=n_1-1$ *или* n_2-1 *группа приведенных гомологий* $\widetilde{H}_i(K_W)$ *нетривиальна (и* $\cong \Bbbk$*) если и только если* $W=V(\Delta^{n_1})\cup NV_1$ *или* $W=V(\Delta^{n_2})\cup NV_2$, *где* $NV_t\subset NV$, $t=1,2$ *и* NV *есть множество «новых» вершин в двойственном симплициальном многогранике,* $|NV|=k$.

Доказательство. Индукция по числу k срезок вершин. Докажем утверждение (i).

При $k=0$ имеем $P=\Delta^{n_1}\times\Delta^{n_2}$, и $K_P=(\partial\Delta^{n_1})*(\partial\Delta^{n_2})\cong S^{n_1-1}*S^{n_2-1}\cong S^{n_1+n_2-1}$. Поэтому, по определению джойна, K_W является либо стягиваемым симплициальным комплексом, либо гомотопически эквивалентен сфере размерности n_1-1 или n_2-1, для всякого собственного подмножества $W\subset V$.

Чтобы доказать переход индукции, рассмотрим $V'=V\cup v$, $V_1=V(\Delta^{n_1})$, $V_2=V(\Delta^{n_2})$ и $V(F)$ – те же, что и в начале доказательства теоремы 3.2.1. Предположим, что наше утверждение доказано для V, и пусть W – собственное подмножество V'.

Рассмотрим следующие 5 случаев.

Случай 1: $v\in W$, $W\cap V(F)\neq\varnothing$.

Если $V(F)\subset W$, то K'_W есть подразбиение $K_{W-\{v\}}$. Следовательно $\widetilde{H}_i(K'_W)\cong\widetilde{H}_i(K_{W-\{v\}})$.

Если $W\cap V(F)\neq V(F)$, то мы имеем

$$K'_W=K_{W-\{v\}}\cup K'_{W\cap V(F)\cup\{v\}},\quad K_{W-\{v\}}\cap K'_{W\cap V(F)\cup\{v\}}=K_{W\cap V(F)},$$

и как $K_{W\cap V(F)}$, так и $K'_{W\cap V(F)\cup\{v\}}$ стягиваемы. Из точной последовательности

Майера–Вьеториса мы снова получим $\widetilde{H}_i(K'_W) \cong \widetilde{H}_i(K_{W-\{v\}})$.

Случай 2: $v \in W,\ W \cap V(F) = \varnothing$.

В этом случае легко видеть, что $K'_W = K_{W-\{v\}} \sqcup \{v\}$. Следовательно
$$\widetilde{H}_i(K'_W) \cong \begin{cases} \widetilde{H}_i(K_{W-\{v\}}) \oplus \Bbbk, & \text{при } i = 0; \\ \widetilde{H}_i(K_{W-\{v\}}), & \text{при } i > 0. \end{cases}$$
Случай 3: $W = V' - \{v\} = V$.

Тогда K'_W есть триангулированный $(d-1)$-мерный диск, и потому он стягиваем.

Случай 4: $v \notin W,\ V(F) \subset W,\ W \neq V$.

Мы имеем
$$K_W = K'_W \cup F, \quad K'_W \cap F = \partial F,$$
где через ∂F обозначена граница гиперграни F. Поскольку ∂F есть триангулированная $(d-2)$-мерная сфера, а F есть триангулированный $(d-1)$-мерный диск, гомологическая последовательность Майера–Вьеториса дает следующие изоморфизмы:
$$\widetilde{H}_i(K'_W) \cong \begin{cases} \widetilde{H}_i(K_W), & \text{при } i < d-2; \\ \widetilde{H}_i(K_W) \oplus \Bbbk, & \text{при } i = d-2. \end{cases}$$

Случай 5: $v \notin W,\ V(F) \not\subset W$.

В этом случае мы имеем $K'_W \cong K_W$.

Во всех случаях мы получаем
$$\widetilde{H}_i(K'_W) \cong \widetilde{H}_i(K_{W-\{v\}}) = 0 \quad \text{при } i \neq 0, n_1 - 1, n_2 - 1, d-2,$$
чем доказательство утверждения (i) и заканчивается по индукции.

Для доказательства утверждения (ii) заметим, что из доказательства (i) и определения джойна следует, что группа $\widetilde{H}_{n_1-1}(K_W)$ нетрививальна тогда и только тогда, когда $V(W) = V_1 \cup NV_1$ для некоторого подмножества $NV_1 \subset NV, |NV_1| \geq 0$, т.е, $V_1 \subset W$ и $V_2 \cap W = \varnothing$. В последнем случае $\widetilde{H}_{n_1-1}(K_W) \cong \Bbbk$. Случай приведенной (n_2-1)-мерной группы гомологий аналогичен. $\square$

Теперь утверждения (a) и (b) теоремы 3.2.1 следуют из теоремы Хохстера (если K_J имеет $j = i+n_1$ вершин, то, замечая, что $|V_1| = n_1+1$, получим, что любые $j - |V_1| = i-1$ **новых** вершин однозначно определяют такой полный подкомплекс K_J).

Обращение в нуль остальных биградуированных чисел Бетти в формулировке теоремы 3.2.1 следует из теоремы Хохстера и леммы 3.2.3. $\square$

Главный результат этого раздела дает полное вычисление биградуированных чисел Бетти для всех обобщенных многогранников усечения:

Теорема 3.2.4. *Пусть P есть $(k; n_1, \ldots, n_r)$-многогранник с $r \geq 1$. Обозначим через a число единичных элементов в наборе $\{n_1, \ldots, n_r\}$. Тогда биградуированные числа Бетти многогранника P даются следующими формулами: $(1 \leq i \leq k+r-1, 1 < l < d-1)$.*

(a) $\beta^{-i,2(i+l)}(P) = \sum\limits_{\{n_{i_1},\ldots,n_{i_s}\} \subset \{n_1,\ldots,n_r\}:\, l = n_{i_1}+\ldots+n_{i_s}} \binom{k}{i-s}$.

(b) $\beta^{-i,2(i+1)}(P) = \beta^{-(k+r-i),2(d+k+r-i-1)}(P) =$
$= k\binom{k+r-1}{i} - \binom{k}{i+1} + a\binom{k}{i-1}$.

(c) $\beta^{0,0}(P) = \beta^{-(m-d),2m}(P) = 1$.

Остальные биградуированные числа Бетти равны ***нулю*** *(мы полагаем $\binom{b}{c} = 0$ при $b < c$ или, если одно из чисел отрицательно).*

Доказательство. Мы используем обозначения из доказательства теоремы 3.2.1.

Чтобы доказать утверждение (a), сформулируем утверждение леммы 3.2.3 для общего случая следующим образом. Из доказательства леммы 3.2.3 и теоремы Хохстера ясно, что $\beta^{-i,2j}(P) = 0$ для всех $j : j-i \neq n_{i_1} + \ldots + n_{i_s}$, причем $\{n_{i_1}, \ldots, n_{i_s}\} \subset \{n_1, \ldots, n_r\}$. Для остальных значений $1 < l = j-i < d-1$, полные подкомплексы K_W с $W = V(\Delta^{n_p}) \cup NV_p$, $NV_p \subset NV$, для некоторого $1 \leq p \leq r$, а также **все их джойны** дают все нетривиальные группы гомологий вида $\widetilde{H}_{l-1}(K_W)$. Здесь мы пользуемся тем, что $S^p * S^q \cong S^{p+q+1}$. Отсюда следует, что $j = i + l = (n_1+1) + \ldots + (n_s+1) + (i-s)$ и, таким образом, всякие $(i-s)$ **новых** вершин дают вклад $+1$ в сумму из утверждения (a), где i и l фиксированы.

Чтобы доказать утверждение (b), заметим, что третье слагаемое в сумме появляется из соображений, аналогичных тем, которые использовались в доказательстве формулы (a) (мы имеем a слагаемых типа $\binom{k}{i-s}$ с $s=1$); первые два члена появляются, если применить лемму 3.2.2 и индукцию по числу срезаемых вершин k.

Оставшиеся утвердения теоремы 3.2.4 вытекают из теоремы Хохстера.

$\square$

Замечание 3.2.5. Формула 3.2.4 (b) в случае $a=0$, $r=2$ дает $\beta^{-i,2(i+1)}(P) = k\binom{k+r-1}{i} - \binom{k}{i+1} = i\binom{k+2}{i+1} - \binom{k}{i-1}$, что согласуется с результатом теоремы 3.2.1 (c).

Для удобства дальнейших ссылок, мы также приводим здесь результаты о биградуированных числах Бетти для многогранников усечения ($n \geq 3$) и для многоугольников ($n=2$):

Предложение 3.2.6. *Пусть $P = \mathrm{vc}^k(\Delta^n)$ есть многогранник усечения. Тогда при $n \geq 3$ биградуированные числа Бетти даются следующими формулами:*

(a) $\beta^{-i,2(i+1)}(P) = i\binom{k+1}{i+1}$,

(b) $\beta^{-i,2(i+n-1)}(P) = (k+1-i)\binom{k+1}{k+2-i}$,

(c) $\beta^{-i,2j}(P) = 0, \quad$ *при* $i+1 < j < i+n-1$.

(d) $\beta^{0,0}(P) = \beta^{-(m-n),2m}(P) = 1$.

Остальные биградуированные числа Бетти равны нулю.

Предложение 3.2.7 (см. [13, Пример 8.21]). *Пусть* $P = \mathrm{vc}^k(\Delta^2)$ *есть* $(k+3)$*-угольник, тогда*

(a) $\beta^{-i,2(i+1)}(P) = i\binom{k+1}{i+1} + (k+1-i)\binom{k+1}{k+2-i}$,

(b) $\beta^{0,0}(P) = \beta^{-(k+1),2(k+3)}(P) = 1$.

Остальные биградуированные числа Бетти равны нулю.

Следствие 3.2.8. *Биградуированные числа Бетти обобщенных многогранников усечения* P *зависят только от размерностей симплексов и количества гиперграней* P *и не зависят от его комбинаторного типа. Более того, числа* $\beta^{-i,2(i+1)}(P)$ *не зависят от размерности* d *многогранника* P.

Следствие 3.2.9. *В классе обобщенных многогранников усечения* P *всевозможных типов* $(k; n_1, \ldots, n_r)$ *множество всех биградуированных чисел Бетти* $\{\beta^{-i,2j}(P)\}$ *однозначно определяет топологический тип* $\mathcal{Z}_P$. *Для двух произвольных обобщенных многогранников усечения* P *и* Q *биградуированные кольца когомологий* $H^{*,*}(\mathcal{Z}_P)$ *и* $H^{*,*}(\mathcal{Z}_Q)$ *изоморфны тогда и только тогда, когда множества биградуированных чисел Бетти для* P *и* Q *совпадают.*

Пример 3.2.10. Рассмотрим простой многогранник $P = vc^1(\Delta^4 \times \Delta^3 \times \Delta^2)$, для которого $d = 9$, $m = 13$. Мы приводим здесь результат вычисления биградуированных чисел Бетти P, полученный с помощью пакета *Macaulay 2*, см. [62].

Таблица ниже состоит из $d-1$ строк и $m-d-1$ столбцов. Число, находящееся на пересечении l-ой строки и i-го столбца, равно $\beta^{-i,2(i+l)}(P)$, где $1 \le i \le m-d-1$ и $2 \le j = i+l \le m-2$. Остальные биградуированные числа Бетти равны нулю, за исключением $\beta^{0,0}(P) = \beta^{-(m-d),2m}(P) = 1$, см. [13, Гл.8]:

i, l	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$l=1$	3	3	1
$l=2$	1	1	0
$l=3$	1	1	0
$l=4$	1	1	0
$l=5$	0	1	1
$l=6$	0	1	1
$l=7$	0	1	1
$l=8$	1	3	3

Теорема Бухштабера–Панова, результат и доказательство теоремы 3.2.4, а также тот факт, что K_P свободно от кручений в гомологиях, дают нам полное описание кольца когомологий $\mathcal{Z}_P$ для всех $(k; n_1, \ldots, n_r)$-многогранников P. Мы используем этот результат в следующем разделе при изучении свойства минимальной неголодовости K_P и рассмотрим некоторые топологические свойства $\mathcal{Z}_P$ для обобщенных многогранников усечения.

3.3 Дальнейшие обобщения: биградуированные числа Бетти

Вначале напомним основное определение данного параграфа.

Определение 3.3.1. *Определим биградуированные числа Бетти многогранника P соотношением*

$$\beta^{-i,2j}(P) \ = \ \beta^{-i,2j}(K_P).$$

Имеется формулировка теоремы Хохстера 1.3.7 для произвольных многогранников.

Предложение 3.3.2 (Теорема Хохстера для выпуклых многогранников). *Пусть $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$ — гиперграни многогранника P. Тогда*

$$\beta^{-i,2j}(P) = \sum_{J\subseteq[m], |J|=j} \operatorname{rk}_{\Bbbk} \widetilde{H}^{j-i-1}(F_J; \Bbbk),$$

где $\mathcal{F}_J = \bigcup_{i\in J} \mathcal{F}_i \subseteq P$. Здесь и далее принято соглашение $\operatorname{rk} \widetilde{H}^{-1}(\varnothing; \Bbbk) = 1$.

Доказательство. Из определения и формулы Хохстера для симплициальных комплексов получаем

$$\beta^{-i,2j}(P) = \beta^{-i,2j}(K_P) = \sum_{\omega\subseteq[m],|J|=j} \mathrm{rk}_{\Bbbk}\, \widetilde{H}^{j-i-1}((K_P)_J;\Bbbk).$$

Утверждается, что симплициальный комплекс $(K_P)_J$ гомотопически эквивалентен пространству $\mathcal{F}_J$. Действительно, имеем локально стягиваемое покрытие пространства $\mathcal{F}_J = \bigcup_{i\in J}\mathcal{F}_i \subseteq P$ подмножествами $\mathcal{F}_i$. Легко видеть, что нервом этого покрытия является симплициальный комплекс $(K_P)_J$. Следовательно, $(K_P)_J \simeq \mathcal{F}_J$ и $\widetilde{H}^{j-i-1}((K_P)_J;\Bbbk) \cong \widetilde{H}^{j-i-1}(\mathcal{F}_J;\Bbbk)$, что завершает доказательство. □

Из теоремы 1.3.3 следует соотношение

$$\mathrm{rk}\, H^p(\mathcal{Z}_P,\Bbbk) = \mathrm{rk}\, H^p(\mathcal{Z}_{K_P}(D^2,S^1),\Bbbk) = \sum_{-i+2j=p} \beta^{-i,2j}(P). \tag{3.3.1}$$

Следуя А.А.Айзенбергу [1], введем β-многочлен комплекса K:

$$\beta_K(s,t) = \sum_{i,j} \beta^{-i,2j}(K) s^{-i} t^{2j} \in \mathbb{Z}[s^{-1},t^2]$$

и приведенный β-многочлен

$$\tilde{\beta}_K(s,t) = \beta_K(s,t) - 1.$$

Очевидно, что приведенный β-многочлен — это β-многочлен без свободного члена, так как $\beta^{0,0} = 1$ (предложение 1.3.6). Для многогранников β-многочлен определяется естественным образом $\beta_P(s,t) = \beta_{K_P}(s,t)$ и $\tilde{\beta}_P(s,t) = \tilde{\beta}_{K_P}(s,t)$.

Замечание 3.3.3. Введенные многочлены зависят от основного поля $\Bbbk$ (см. замечание 1.3.5).

Пример 3.3.4. Рассмотрим границу симплекса. Имеем $\beta_{\partial\Delta^n}(s,t) = 1 + s^{-1}t^{2(n+1)}$. Значит, если рассматривать многогранник $P = \triangle^n$, то $\beta_P(s,t) = \beta_{K_P}(s,t) = 1 + s^{-1}t^{2(n+1)}$.

Пример 3.3.5. Пусть $P = \mathrm{pt}$. Биградуированные числа Бетти многогранника pt равны биградуированным числам Бетти симплициального комплекса на одной призрачной вершине. Последние можно вычислить по определению, либо при помощи формулы Хохстера: $\beta^{0,0}(\mathrm{pt}) = \mathrm{rk}\,\widetilde{H}^{-1}(\varnothing;\Bbbk) = 1$, $\beta^{-1,2}(\mathrm{pt}) = \widetilde{H}^{-1}(\varnothing;\Bbbk) = 1$. Значит, $\beta_{\mathrm{pt}}(s,t) = 1 + s^{-1}t^2$.

Предложение 3.3.6. *Пусть K и L — симплициальные комплексы. Тогда*

$$\beta_{K*L}(s,t) = \beta_K(s,t)\beta_L(s,t)$$

Это утверждение позволяет вычислить биградуированные числа Бетти гораздо более общего семейства, чем рассмотренное ранее, а именно, мы можем рассмотреть многогранники, являющиеся конечными произведениями обобщенных многогранников усечения. Тогда предыдущее утверждение позволяет,пользуясь нашей основной теоремой, находить все их биградуированные числа Бетти $\beta^{-i,2j}$. Очевидно также, что нерв-комплексы K_P по-прежнему свободны от кручений в гомологиях. Однако топология (и гомологические свойства колец Стенли–Райснера) таких момент-угол многообразий уже достаточно сложны. В следующей главе мы сможем убедиться в этом.

Глава 4

Минимально неголодовские комплексы и их момент-угол комплексы

4.1 Основные конструкции и результаты

Эта глава одна из основных в диссертации и посвящена связи между гомологическими характеристиками кольца Стенли–Райснера $\Bbbk[P]$ и топологией момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$. Основное определение таково:

Определение 4.1.1. *Кольцо граней $\Bbbk[K]$ называется кольцом Голода или голодовским, если умножение и все высшие операции Масси в $\mathrm{Tor}_{\Bbbk[v_1,\ldots,v_m]}\big(\Bbbk[K],\Bbbk\big)$ тривиальны.*

В этом случае комплекс K мы также называем *голодовским*. Понятие кольца Голода первоначально введено в работе [15] для нетеровых локальных колец. Согласно согласно результату А.Берглунда и М.Йолленбека [23, Теорема 5.1] над любым полем $\Bbbk$ кольцо граней $\Bbbk[K]$ является голодовским тогда и только тогда, когда умножение в его Tor-алгебре тривиально.

Определение 4.1.2. *Если K не является голодовским, но удаление любой вершины v из K превращает индуцированный комплекс $K_{\widehat{v}} = K - v$ в голодовский, то $\Bbbk[K]$ и K называются минимально неголодовскими.*

Примерам таких комплексов будет посвящена эта глава. Сформулируем теперь теорему Бухштабера–Панова о кольце когомологий момент-угол комплекса, приводя одновременно описание Баскакова умножения в нем.

Теорема 4.1.3 ([13, Теорема 8.6] или [64, Теорема 4.7]). *Алгебра когомологий момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K$ дается изоморфизмом*

$$\begin{aligned} H^*(\mathcal{Z}_K;\Bbbk) &\cong \mathrm{Tor}_{\Bbbk[v_1,\ldots,v_m]}(\Bbbk[K],\Bbbk) \\ &\cong H\big[\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\Bbbk[K],d\big] \\ &\cong \bigoplus_{I\subset[m]}\widetilde{H}^*(K_I), \end{aligned}$$

где биградуировка и дифференциал в когомологиях дифференциальной биградуированной алгебры определены следующим образом:

$$\mathrm{bideg}\,u_i=(-1,2),\ \mathrm{bideg}\,v_i=(0,2);\quad du_i=v_i,\ dv_i=0.$$

В третьей строке $\widetilde{H}^*(K_I)$ обозначает приведенные симплициальные когомологии полного подкомплекса K_I комплекса K (т.е ограничения K на множество $I\subset[m]$). Последний изоморфизм есть сумма изоморфизмов

$$H^p(\mathcal{Z}_K)\cong\sum_{I\subset[m]}\widetilde{H}^{p-|I|-1}(K_I),$$

и кольцевая структура задается отображениями

$$H^{p-|I|-1}(K_I)\otimes H^{q-|J|-1}(K_J)\to H^{p+q-|I|-|J|-1}(K_{I\cup J}), \qquad (*)$$

индуцированными каноническими симплициальными отображениями $K_{I\cup J}\hookrightarrow K_I*K_J$ (джойн симплициальных комплексов), если $I\cap J=\varnothing$, и **нуль** *иначе.*

Дж.Ву, Е.Грбич, Т.Е.Панов и С.Терио [50] доказали следующую теорему.

Теорема 4.1.4. *Если K –* **флаговый** *комплекс, то следующие условия равносильны:*

- *$sk^1(K)$ является хордовым графом;*
- *$\mathcal{Z}_K$ имеет гомотопический тип букета сфер;*
- *K голодовский комплекс.*

Если нерв-комплекс K_P флаговый, то они доказали, что его минимальная неголодовость равносильна тому, что P многоугольник. В этой же работе была поставлена проблема: верно ли, что если $\mathcal{Z}_P$ гомеоморфно связной сумме произведений сфер, по дву сферы в каждом произведении, то комплекс K_P минимально неголодовский? Этот вопрос мы обсуждаем в следующей главе.

4.2 Обобщенные многогранники усечения

Начнем с важной технической леммы.

Предложение 4.2.1. *Пусть $K = K_1 \cup_\sigma K_2$ есть симплициальный комплекс, полученный из двух голодовских комплексов K_1 и K_2 приклеиванием по двум их изоморфным симплексам. Тогда K также является голодовским.*

Доказательство. Используя описание умножения в кольце $H^*(\mathcal{Z}_K)$ из теоремы 4.1.3 (*), а также формулу [32, Предложение 3.2.10, (3.11)], обозначим через α_L базисную коцепь в $C^p(K_I)$, соответствующую ориентированному p-мерному симплексу $L \subset I$, $I \subset V(K)$. Тогда произведение двух базисных коцепей α_L и α_M, $M \subset J$, $J \subset V(K)$, $I \cap J = \varnothing$ нетривиально тогда и только тогда, когда $L \sqcup M$ является симплексом в $K_{I \sqcup J}$. Введем также обозначения $I_k = I \cap V(K_k)$ и $J_k = J \cap V(K_k)$, при $k = 1, 2$.

Предположим, что для фиксированной пары непересекающихся подмножеств $I, J \subset V(K)$ мы имеем нетривиальное произведение по формуле (*) теоремы 4.1.3. Из предыдущего, для некоторых симплексов $L \subset I$ и $M \subset J$ мы получим, что $L \sqcup M$ также является симплексом в $K_{I \sqcup J}$. Но по определению операции склейки двух комплексов будем иметь: либо $L \subset I_1$, $M \subset J_1$, $L \cup M \subset K_1$, либо $L \subset I_2$, $M \subset J_2$, $L \cup M \subset K_2$.

Пусть пара подмножеств I, J дает нетривиальное умножение в когомологиях $\mathcal{Z}_K$. Для любых двух коциклов $\alpha \in C^p(K_I)$ и $\beta \in C^q(K_J)$, $p, q > 0$, произведение которых не является кограницей в $C^{p+q+1}(K_{I \sqcup J})$, мы можем считать, что $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ и $\beta = \beta_1 + \beta_2$, где $\alpha_k \in C^*(I_k)$ и $\beta_k \in C^*(J_k)$ суть коциклы, $k = 1, 2$ (достаточно перейти к барицентрическому подразбиению в $K_{I \cap V(\sigma)}$ и $K_{J \cap V(\sigma)}$ соответственно). В силу описания умножения в $H^*(\mathcal{Z}_K)$, используя предыдущие аргументы, а также голодовость комплексов K_k при $k = 1, 2$, получим:

$$\alpha \cup \beta = \alpha_1 \cup \beta_1 + \alpha_2 \cup \beta_2 = \delta_1(\gamma_1) + \delta_2(\gamma_2) = \delta(\gamma_1 + \gamma_2),$$

где δ_k суть кодифференциалы в коцепных комплексах для $K_{I_k \sqcup J_k}$.

Мы пришли к противоречию, значит, комплекс K является голодовским.

□

Теперь докажем главный результат этого раздела:

Теорема 4.2.2. *Для многогранника $P = \mathrm{vc}^k(\Delta^{n_1} \times \ldots \times \Delta^{n_r})$ с $n_1 \geq \ldots \geq n_r \geq 1, r \geq 1, k \geq 0$, его граничный комплекс K_P является минимально неголодовским тогда и только тогда, когда $r = 1, 2$ и P не является симплексом.*

Доказательство. Индукция по числу новых вершин k.

Пусть $r = 2$. Мы используем обозначения из доказательства теоремы 3.2.4.

Если $k = 0$, то $P = \Delta^{n_1} \times \Delta^{n_2}$ и $K_P = (\partial\Delta^{n_1}) * (\partial\Delta^{n_2})$. Предположим, что мы удалили из комплекса $K = K_P$ вершину v, которая принадлежала множеству вершин Δ^{n_2}. Тогда имеем: $K' = K - v = (\partial\Delta^{n_1}) * \Delta^{n_2-1}$ и $\mathcal{Z}_{K'} = \mathcal{Z}_{\partial\Delta^{n_1}} \times \mathcal{Z}_{\Delta^{n_2-1}} = S^{2n_1+1} \times D^{2n_2}$, что гомотопически эквивалентно сфере, и, таким образом, K' является голодовским по теореме 4.1.3.

При $k \geq 1$, введем обозначения $Q = \mathrm{vc}(P)$, $K = K_Q$, $KK = K_P$, $V_1 = V(\Delta^{n_1})$, $V_2 = V(\Delta^{n_2})$ и используем описание умножения из теоремы 4.1.3 (см. формулу (*)) и лемму 3.2.3 для обобщенных многогранников усечения.

A. Предположим, что мы удаляем вершину $v \in NV$, являющуюся вершиной ровно одной пирамиды (над гипергранью F многогранника P^*).

В силу описания умножения (*) из теоремы 4.1.3, нетривиальное произведение в кольце когомологий $\mathcal{Z}_{K'}$ $(K' = K - v)$ происходит из пары подмножеств $I, J \subset V(K')$, $I \cap J = \varnothing$ и $I \sqcup J = V(K_P)$, и мы можем предположить, что (Лемма 3.2.3) $V_1 \subset I$, $V_2 \subset J$. Рассмотрим следующие 2 случая:

Случай 1: $I, J \cap V(F) \neq \varnothing$.

Мы знаем, в силу предположения индукции, что KK является минимально не-голодовским, кроме того, всякое нетривиальное умножение в $H^*(\mathcal{Z}_{K'})$ происходит из $H^*(\mathcal{Z}_{K_P})$ (используем теорему 4.1.3, формула (*)). Однако колные подкомплексы $K'_I = KK_I$ и $K'_J = KK_J$ не могут давать нетривиальное произведение в когомологиях, иначе по формуле (*) мы имели бы

$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = (d-1)$-мерный класс в когомологиях некоторого полного подкомплекса из K', который, очевидно, должен быть тривиальным.

Случай 2: $V(F)$ целиком содержится в одном из множеств вершин I, J, скажем, $V(F) \subset I$.

Тогда $H^{d-2}(K_I) \cong \Bbbk$ и потому мы имеем $p - |I| - 1 = d - 2$ в формуле (*) теоремы 4.1.3, поэтому $p + q - |I| - |J| - 1 \geq d - 1$ в (*), что дает только тривиальные классы когомологий.

B. Предположим, что v либо лежит в $V_1 \cup V_2$, либо v новая вершина, не являющаяся вершиной ровно одной добавленной пирамиды над гипергранью P^*.

Тогда мы можем использовать минимальную не-голодовость для многогранников усечения (см. [23]) и индукцию по k для случая $r = 2$: заметим, что K' представляется в виде: $(K_1 - v_1) \cup_{\sigma_1} \ldots \cup_{\sigma_l} (K_l - v_l)$, склейка вдоль изоморфных симплексов σ_i, где K_i есть либо граничный комплекс $\mathrm{vc}^p(\Delta^{n_1} \times \Delta^{n_2})$ с $p < k$, либо граничный комплекс $\mathrm{vc}^p(\Delta^n)$. Поэтому, используя предложение 4.2.1, мы получаем, что K' голодовский.

Поскольку K_P сам не является голодовским, и мы доказали, что $K' = K_P - v$ является голодовским для любой вершины v, отсюда следует, что K_P является минимально не-голодовским при $r = 2$.

Случай $r = 1$ может быть доказан, используя то же рассуждение, что и при $r = 2$. Единственная разница в том, что больше не возникает обобщенный многогранник усечения $\mathrm{vc}^p(\Delta^{n_1} \times \Delta^{n_2})$ в случае **B**.

Остается рассмотреть случай $r \geq 3$.

При $k = 0$ ясно, что $\mathcal{Z}_{K_P - v}$ будет гомотопически эквивалентен произведению ≥ 2 сфер для любой удаляемой вершины v, поэтому $K = K_P$ больше не является минимально не-голодовским комплексом.

При $k \geq 1$ рассмотрим $v \in V(\Delta^{n_1})$. Тогда произведение коциклов $(\partial\Delta^{n_2})$ и $(\partial\Delta^{n_3})$ (по теореме 4.1.3) остается нетривиальным в когомологиях $K' = K - v$, таким образом, K' не является голодовским. $\square$

Замечание 4.2.3. Минимальная неголодовость в случае многогранников усечения, отличных от симплекса, ($r = 1$ в теореме 4.2.2) была впервые доказана в работе А.Берглунда и М.Йолленбека [23, Теорема 6.19]; важной частью доказательства этой теоремы в работе [23] был комбинаторный вывод свойства «strong gcd» для комплексов $K_P - v$, где P есть многогранник усечения. В этом доказательстве существенно использовался тот факт, что многогранник, двойственный к многограннику усечения, (многогранник пирамидальной надстройки) получается объединением цепочки «пирамид» (максимальных симплексов). Для обобщенных многогранников усечения это уже не имеет места.

Пример 4.2.4. Для срезки одной вершины 3-мерного куба $P = \mathrm{vc}^1(\Delta^1 \times \Delta^1 \times \Delta^1)$, пусть v_7 — новая вершина граничного комплекса K_P. Тогда комплекс $K' = K_P - v_7$ **не** является голодовским, так как индуцированный цикл длины 4 содержится в его одномерном остове (графе) $sk^1(K')$. Последний не является хордовым графом, – необходимое условие для того, чтобы K' был голодовским комплексом ([23, Предложение 6.4]). Согласно [48, Теорема 2.2], момент-угол многообразие $\mathcal{Z}_P$, соответствующее обобщенному многограннику усечения P с $r = 2, n_1 \geq n_2 > 1, k \geq 0$, диффеоморфно связной сумме произведений сфер, по 2 сферы в каждом произведении, если $m = n_1+n_2+2+k < 3(n_1+n_2) = 3d$, т.е для всех $0 \leq k < 2(n_1+n_2-1)$. Легко видеть, что числа Бетти $\mathcal{Z}_P$, полученные из описания диффеоморфного типа в работе [48], совпадают с вычисленными по теореме 3.2.1 и формуле (1.3).

Пример 4.2.5. **1.** Рассмотрим $P = \mathrm{vc}^1(\Delta^4 \times \Delta^3)$ с $d = 7$, $m = 10$. Тогда мы имеем:

$$\mathcal{Z}_P \cong 2S^3 \times S^{14} \# S^4 \times S^{13} \# S^7 \times S^{10} \# S^8 \times S^9.$$

В этом примере $b^5(\mathcal{Z}_P) = b^6(\mathcal{Z}_P) = 0$ и $\mathcal{Z}_P$ **не** гомотопически эквивалентно никакому $\mathcal{Z}_P$ для многогранников усечения, см. ниже теорему 4.2.6.

2. Рассмотрим $P = \mathrm{vc}^1(\Delta^1 \times \Delta^1 \times \Delta^1)$. Используя теорему 4.1.3, в [25, Пример 11.5] доказано, что соответствующее момент-угол многообразие $\mathcal{Z}_P$ **не** гомотопически эквивалентно связной сумме произведений сфер ни для какого числа сфер в произведениях. См. также пример на сс. 26–27 из работы [48].

Топологические типы момент-угол многообразий для многогранников усечения полностью описаны следующим результатом, впервые полученным Д.МакГаврaном в работе [63]:

Теорема 4.2.6 (см. [25, Теорема 6.3])**.** *Пусть $P = \mathrm{vc}^k(\Delta^n)$, $n \geq 2$ есть многогранник усечения. Тогда соответствующее момент-угол многообразие $\mathcal{Z}_P$ диффеоморфно связной сумме произведений сфер:*

$$\mathop{\#}_{j=1}^{k}\left(S^{j+2} \times S^{2n+k-j-1}\right)^{\# j\binom{k+1}{j+1}},$$

где $X^{\# k}$ обозначает связную сумму k копий X.

4.3 Циклические многогранники

Определение 4.3.1. *Симплициальный многогранник P называется q-смежностным, если любые q его вершин образуют некоторую грань. Аналогично, простой многогранник называется двойственно q-смежностным, если любые q его гиперграней имеют непустой пересечение (которое в этом случае является гранью коразмерности k).*

Можно показать, что если многогранник P^n является q-смежностным, $q > [\frac{n}{2}]$, то $P = \Delta^n$. В то же время существуют многогранники, которые являются $[\frac{n}{2}]$-смежностными. Такие многогранники называются просто *смежностными.* Аналогично определяется *двойственно-смежностный* простой многогранник.

Предложение 4.3.2 (см., например, [13])**.** *Если P – двойственно q-смежностный многогранник, то $h_k(P) = \binom{m-n+k-1}{k}$, $k \leqslant q$.*

Следствие 4.3.3. *Условие (двойственной) смежностности однозначно определяет f-вектор.*

Определение 4.3.4 (Циклический многогранник)**.** *Рассмотрим кривую моментов $t \to x(t) = (t, t^2, \dots, t^n) \in \mathbb{R}^n$. Выберем на ней $m \geqslant n+1$ точек, отвечающих значениям параметра $t_1 < \dots < t_m$. Выпуклая оболочка $C^n(t_1, \dots, t_m) = conv\{x(t_1), \dots, x(t_m)\}$ называется циклическим многогранником.*

Можно показать (см., например [13]), что он является симплициальным и его комбинаторный тип не зависит от выбора значений $t_1, \dots, t_m$: точки $x(t_i)$ являются вершинами, а n-элементное подмножество $\omega = (i_1, \dots, i_n) \subset [m]$ соответствует множеству вершин некоторой гиперграни тогда и только тогда, когда выполнено «условие четности Гейла»:

Если элементы $i < j$ не содержаться в ω, то число элементов $k \in \omega$ между i и j четно.

Из этого условия можно легко получить, что любые $[\frac{n}{2}]$ вершин образуют грань, то есть циклический многогранник является *смежностным*. Обозначим его комбинаторный тип через $C^n(m)$. В дальнейшем нам потребуется двойственный простой многогранник $C^n(m)^*$, который является *двойственно-смежностным*, то есть любые $[\frac{n}{2}]$ его гиперграней имеют непустое пересечение. Обозначим гиперграни многогранника $C^n(m)^*$, двойственные к вершинам $x(t_i)$ через F_i.

Пользуясь условием четности Гейла легко получить следующий факт.

Лемма 4.3.5. *Для $n = 2l$ циклический многогранник имеет циклическую симметрию: если сопоставить вершинам $x(t_1), \dots, x(t_m)$ подряд идущие вершины $w_1, \dots, w_m$ правильного m-угольника, то подмножество $\omega = (i_1, \dots, i_n) \subset [m]$ соответствует множеству вершин некоторой гиперграни тогда и только тогда, когда для любых двух вершин w_i, w_j, $i, j \notin \omega$, число вершин w_k, $k \in \omega$, между ними четно.*

Следствие 4.3.6. *Каждая гипергрань многогранника $C^{2n}(m)^*$ комбинаторно эквивалентна $C^{2n-1}(m-1)^*$.*

В [48, Теорема 1.3] доказано, что момент-угол многообразие соответствующее **четномерному** простому многограннику, двойственному к смежностному и отличному от симплекса, диффеоморфно связной сумме произведений сфер. Ниже мы докажем минимальную неголодовость нерв-комплексов для этих многогранников.

Теорема 4.3.7. *Если P является n-мерным простым многогранником, двойственным к смежностному многограннику, а n четно, то K_P является минимально неголодовским комплексом тогда и только тогда, когда P отличен от симплекса.*

Доказательство. Если P симплекс, K_P, очевидно, является голодовским комплексом. Предположим, что P не является симплексом и двойственный к нему симплициальный многогранник смежностный, четной размерности. Тогда существует множество вершин $I \subset V(K_P)$, $|I| = [\frac{n}{2}] + 1$, такое, что K_I есть граница $[\frac{n}{2}]$-мерного симплекса. В силу двойственности Александера, пара подмножеств вершин I и $V(K_P) - I$ дает нетривиальное произведение в когомологиях $\mathcal{Z}_P$, таким образом, K_P сам не является голодовским.

Для любой вершины $v \in V(K_P)$, по определению, всякий набор $[\frac{n}{2}]$ вершин $K_P - v$ образует в этом комплексе симплекс. Поэтому, по теореме 4.1.3, всякая нетривальная группа когомологий полного подкомплекса, имеющая положительную размерность, имеет размерность $\geq [\frac{n}{2}] - 1$. Если $K_P - v$ не является голодовским, произведение коциклов в формуле $(^*)$ дает нетривальный когомологический класс в размерности $\geq 2([\frac{n}{2}] - 1) + 1 = (n-1)$ для четных n. Мы приходим к противоречию, поскольку $(n-1)$-мерная группа когомологий всякого полного подкомплекса из K', очевидно, тривиальна. Поэтому, K_P является минимально не-голодовским комплексом. □

Пример 4.3.8. По теореме 3.2.4 (b) мы получаем, что для обобщенных многогранников усечения P с $k \geq 1$: $b^3(\mathcal{Z}_P) = \beta^{-1,4}(P) \neq 0$. С другой стороны, если простой многогранник P двойственен к смежностному n-мерному многограннику, $n \geq 4$, то по [13, Предложение 7.34.2] и теореме Гуревича мы имеем $b^3(\mathcal{Z}_P) = \ldots = b^{2[\frac{n}{2}]}(\mathcal{Z}_P) = 0$. Поэтому, $\mathcal{Z}_P$ для обобщенных многогранников усечения P с $k \geq 1$ **не** гомотопически эквивалентны никаким $\mathcal{Z}_P$ для двойственных к смежностным многогранников P.

Следующее утверждение легко следует из результатов теоремы 4.1.3, теоремы 3.2.1, теоремы 4.2.6 и замечания 2 выше:

Следствие 4.3.9. *В классе всех многогранников P, являющихся либо обобщенными многогранниками усечения с $r = 1$ или $r = 2, 0 \leq k < 2(n_1+n_2-1)$, либо четномерными простыми многогранниками, двойственные к которым являются смежностными, множество всех биградуированных чисел Бетти для P определяет кольцо когомологий $\mathcal{Z}_P$ с точностью до кольцевого изоморфизма и тип гладкого многообразия $\mathcal{Z}_P$ с точностью до диффеоморфизма.*

Пример 4.3.10. Эта ситуация в некотором смысле противоположна интересному примеру, построенному С.Чоем в работе [36]. В ней с помощью программы Macaulay2 [62] были построены два 3-мерных простых многогранника P и Q, такие что их биградуированные числа Бетти попарно совпадают, но кольца целочисленных когомологий неизоморфны (а значит, их момент-угол многообразия не гомотопически эквиваленты). Эти многогранники получаются из 6-угольной призмы каждый последовательной срезкой трех попарно несмежных ребер.

4.4 Простые многогранники с $m \leq n + 3$

Заметим, что простой n-мерный многогранник с $n+1$ гипергранью аффинно эквивалентен симплексу, а с $m = n+2$ гипергранями проективно эквивалентен произведению 2 симплексов. В первом случае в качестве нерв-комплекса получаем голодовский комплекс и сферу нечетной размерности в качестве $\mathcal{Z}_P$, во втором – минимально неголодовский комплекс и произведение двух нечетномерных сфер соответственно.

Рассмотрим случай $m = n + 3$. Имеет место следующее предложение, см. [52].

Предложение 4.4.1. *Любой простой многогранник P^n, $m = n + 3$, комбинаторно описывается при помощи правильного $(2k-1)$-угольника M_{2k-1} и сюрьективного отображения $\alpha\colon F \to vert(M_{2k-1})$, причем гиперграни $F_1, \ldots, \widehat{F_r}, \ldots, \widehat{F_s}, \ldots, \widehat{F_r}, \ldots, F_{n+3}$ пересекаются в вершине тогда и только тогда, когда $0 \in \{\zeta(F_r), \zeta(F_s), \zeta(F_t)\}$. Простой многогранник с $m = n + 2$*

комбинаторно эквивалентен $\Delta^i \times \Delta^j$ *и соответствует треугольнику с числами* $(1, i+1, j+1)$ *в вершинах. Простой многогранник с* $m = n+1$ *является симплексом и соответствует треугольнику с числами* $(1, 1, n+1)$ *в вершинах.*

Таким образом, простые многогранники с $m \leqslant n+3$ описываются при помощи правильных $(2k-1)$ – угольников с числами в вершинах, отвечающими количеству гиперграней заданного типа. В треугольнике вершине с числом 1 не соответствует никакая гипергрань, но гиперплоскость, не пересекающая многогранник. Мы будем писать $P \sim (a_1, \ldots, a_{2k-1})$ или $P \sim (M_{2k-1}, a_1, \ldots, a_{2k-1})$. Из диаграмм Гейла также следует, что любой многогранник $(M_{2k-1}, a_1, \ldots, a_{2k-1})$ реализуется.

Н.Ю.Ероховец доказал следующую комбинаторную классификацию простых многогранников с $m = n+3$.

Предложение 4.4.2. *Имеем:* $C^{2k-4}(2k-1)^*_{a_1,\ldots,a_{2k-1}} \sim (M_{2k-1}, a_1, \ldots, a_{2k-1})$, $k \geqslant 3$, *и* $\Delta^a \times \Delta^b \times \Delta^c \sim (\Delta^2, a+1, b+1, c+1)$.

Это означает, что любой многогранник с $m = n+3$ получается с помощью операции подстановки P_ω, где $\omega = a_1, \ldots, a_{2k-1}$ из четномерного циклического многогранника, либо же он является комбинаторно произведением трех симплексов. В дополнении мы докажем, что операция подстановки сохраняет свойство минимальной неголодовости. Отсюда имеем:

Теорема 4.4.3. *При* $m = n+3$ *либо* P *комбинаторно эквивалентен произведению трех симплексов (обобщенный многогранник усечения), либо его нерв-комплекс минимально неголодовский.*

Другое доказательство получается из вычисления Н.Ю.Ероховцом биградированного кольца когомологий Z_P в данном случае:

Теорема 4.4.4. *Пусть* $P \sim (a_1, \ldots, a_{2k-1})$. *Тогда*

$$H^{*,*}(\mathcal{Z}_P) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{2k-1} \oplus \mathbb{Z}^{2k-1} \oplus \mathbb{Z}$$

с образующими: $\{1, X_i, Y_j, Z \colon i, j = 1, \ldots, 2k-1\}$,

$$\operatorname{bideg} X_i = (-1, 2\varphi_i), \ \operatorname{bideg} Y_j = (-2, 2\psi_j), \ \operatorname{bideg} Z = (-3, 2(n+3)).$$

Для $k = 2$ *имеем:* $X_i^2 = 0, \quad X_i X_{i+1} = Y_i, \quad X_1 X_2 X_3 = Z$.
Для $k \geqslant 3$ *имеем:* $X_i X_j = 0, \quad X_i Y_j = \delta_{i+k-1,j} Z, \quad Y_i Y_j = 0$.

Образующая Z отвечает фундаментальному классу многогранной сферы. Значит, при удалении любой вершины оставшиеся образующие будут иметь тривиальное произведение.

В начале следующей главы мы приведем утверждение о топологическом строении $\mathcal{Z}_P$ в данном случае и укажем значения чисел φ_i и ψ_j.

Недавно Ф.Босио [26] построил контрпример к гипотезе о топологической инвариантности биградуированных чисел Бетти момент-угол многообразий.

Пример 4.4.5. В [26] искомые два простых многогранника с различными биградуированными числами Бетти, но топологически эквивалентными момент-угол многообразиями, строятся следующим образом. Рассматривается простой многогранник P, двойственный к циклическому многограннику $C^{16}(20)$. Затем с помощью операции «расширения» (extension), явное построение которой дается в основной части работы, строятся два смежностных многогранника P_1 и P_2. К ним применяется одна и та же подстановка, в результате имеем два простых 47-мерных многогранника с 51 гипергранями, дающие в качестве $\mathcal{Z}_P$ связные суммы произведений сфер, по 2 сферы в каждом произведении (в силу теоремы С.Гитлера и С.Лопез де Медрано [48] о подстановках в случае четномерного смежностного многогранника). Количества сфер в произведениях и их размерности находятся из биградуированных чисел Бетти. Топологические числа Бетти получающихся момент-угол многообразий совпадают, значит, в данном случае имеет место диффеоморфизм. С другой стороны, биградуированные числа Бетти различны.

Глава 5

Связные суммы произведений сфер как момент-угол многообразия

5.1 Случай $m = n + 3$ и маломерные комплексы

Напомним, что многогранники с $m = n + 3$ получаются подстановкой из правильного $2k - 1$-угольника $M_{2k-1}(a_1, \ldots, a_{2k-1})$ для каждого $k \geq 2$. Результат работы [33] о момент-угол комплексах позволяет связать теорему 4.4.4 с результатом Лопез де Медрано [59] о полном пересечении квадрик.

Теорема 5.1.1. *Пусть $k = 2$. Тогда $\mathcal{Z}_P = S^{2a+1} \times S^{2b+1} \times S^{2c+1}$, где $P \sim (a+1, b+1, c+1)$. Пусть $k \geqslant 3$. Тогда $\mathcal{Z}_P = \mathop{\#}\limits_{i=1}^{2k-1} S^{2\varphi_i - 1} \times S^{2\psi_{i+k-1} - 2}$, где $P \sim (a_1, \ldots, a_{2k-1})$.*

Здесь $\varphi_r = a_r + \ldots + a_{r+k-2}$ и $\psi_r = a_r + \ldots + a_{r+k-1}$, где все индексы рассматриваются по модулю $2k - 1$.

Следствие 5.1.2. *Для многогранников P и Q с $m = n+3$ имеем: $H^{*,*}(\mathcal{Z}_P) \simeq H^{*,*}(\mathcal{Z}_Q)$ тогда и только тогда, когда $\beta^{-q,2p}(P) = \beta^{-q,2p}(Q)$ для всех p, q.*

Пусть $P \sim (a_1, \ldots, a_{2k-1})$. Тогда

$$2k - 1 = \operatorname{rk} H^{-1,*}(\mathcal{Z}_P) = \sum_i \beta^{-1,2i}(P) = \operatorname{rk} H^{-2,*}(\mathcal{Z}_P) = \sum_j \beta^{-2,2j}(P).$$

В силу формулы Хохстера, число минимальных наборов гиперграней, имеющих пустое пересечение, равно $l(P) = \sum_p \beta^{-1,2p}(P)$.

Пусть теперь симплициальный комплекс K одномерный, то есть это граф. Если это флаговый комплекс, то это означает, что K не содержит циклов длины 3. В этом случае результат [50] показывает, что K комплекс Голода тогда и только тогда, когда K не имеет циклов длины большей 3, а значит, является деревом (графом без циклов).

В противном случае, если K – флаговый, то, очевидно, что кольцо когомологий соответствующего многоугольного цикла входит как прямое слагаемое в когомологии всего момент-угол комплекса и умножение, описанное Баскаковым, очевидно нетривиально. Например, любой простой флаговый многогранник свободен от 2-мерных треугольных граней [32], значит, его граф – не хордовый, но флаговый.
В этом случае результат [50] означает, что граф без циклов длины 3 минимально неголодовский тогда и только тогда когда он является границей многогоугольника.

К нефлаговому случаю относятся, например, остовы границ симплексов в размерностях, начиная с 2. В работе [51] доказано, что их момент-угол комплексы являются гомотопическими букетами сфер, а значит, умножение в кольце когомологий момент-угол комплексов тривиально и комплекс голодовский. В действительности, указанное свойство доказано в этой работе для всех так называемых «сдвинутых» (shifted) комплексов, к которым, в частности, относятся остовы симплексов.

5.2 Симплициальные операции и минимальная неголодовость

Лемма о склейке двух голодовских комплексов по общему симплексу является ключевой в доказательстве предложений этого параграфа. Начнем со срезки вершин произвольного минимально неголодовского многогранника (считаем, что основное поле фиксировано).

Теорема 5.2.1. *Если нерв-комплекс K_P минимально неголодовский, тогда то же верно и для K_Q, $Q = \mathrm{vc}(P)$.*

Доказательство. Обозначим через $Q = \mathrm{vc}(P)$, $KK = K_P$, $K = K_Q$, $K' = K - v'$, v есть новая вершина над гипергранью F двойственного многогранника P^* и d размерность P. Рассмотрим следующие 3 случая:

Случая 1: $v' = v$

Из теоремы 4.1.3 и минимальной не-голодовости KK мы получаем, что K' является голодовским комплексом, поскольку $(d-1)$-мерная группа когомологий любого полного подкомплекса из K', очевидно, тривиальна (достаточно проверить пару I, J такую, что $I \cup J = V(KK)$ и $I \cap J = \varnothing$; так что, либо $V(F)$ содержится в одном из подмножеств вершин I или J, скажем, $V(F) \subset I$, либо $I, J \cap V(F) \neq \varnothing$. Здесь мы используем описание кольцевой структуры из теоремы 4.1.3).

Случай 2: $v' \in V(F)$

В этом случае легко видеть, что $K' = \Delta^{d-1} \cup_{\Delta^{d-2}} (KK - v')$, т.е склейка по изоморфным симплексам двух голодовских комплексов. Поэтому, в силу предложения 4.2.1, получаем, что K' является голодовским.

Случай 3: $v' \notin v \cup V(F)$

Предположим, что пара I, J дает нетривиальное произведение в кольце когомологий $\mathcal{Z}_{K'}$. Пусть $v \notin I$ и $v \notin J$. Тогда $I, J \subset V(KK)$ и либо $V(F) \subset I$, либо $V(F) \cap I, J \neq \varnothing$. В последнем случае $K'_I = KK_I$ и $K'_J = KK'_J$, так что произведение в когомологиях тривиально, поскольку $(d-1)$-мерная группа когомологий всякого полного подкомплекса из K' тривиальна. В первом случае тот же аргумент приводит к противоречию.
Поэтому, $v \in I$ или $v \in J$. Без ограничения общности, положим $v \in I$. Если $V(F) \subset I$, то K'_I и KK_I топологичексi эквивалентны, а $K'_J = KK_J$, так что произведение в когомологиях тривиально. Если $V(F) \cap I, J \neq \varnothing$, то, очевидно, K'_I гомотопически эквивалентно KK_I, а $K'_J = KK_J$, так что мы снова приходим к противоречию. Последний возможный случай, когда

$V(F) \subset J$. Мы имеем $K'_I = KK_I \sqcup pt$ и $K'_J = KK_J - F$ и умножение коциклов положительных размерностей в когомологиях $\mathcal{Z}_{K'}$ (см. теорему 4.1.3) тривиально и в этом случае. Нетривиальное произведение может получиться только для нульмерного коцикла новой вершины и некоторого коцикла α, лежащего в границе гиперграни F, но в этом случае мы приходим к противоречию с тем, что граничный комплекс $\mathrm{vc}(\Delta^n)$ без одной вершины является голодовским. □

Замечание 5.2.2. Теорема 5.2.1, предложение 4.3.7, а также другие результаты этого раздела могут быть связаны следующей интересной гипотезой, впервые появившейся в качестве открытого вопроса в [50, Вопрос 3.5]:

Если $\mathcal{Z}_K$ топологически эквивалентно связной сумме произведений сфер, с двумя сферами в каждом произведении, то K минимально неголодовский комплекс и все его полные подкомплексы свободны от кручений в целочисленных гомологиях.

Пример 5.2.3. Рассмотрим срезку ребра 3-призмы P: $Q = vc(P)$. Тогда мы получаем, что Q есть 3-куб – связная сумма (тривиальная), но произведений 3 сфер ($\mathcal{Z}_Q \cong S^3 \times S^3 \times S^3$). Сделав еще одну срезку ребра, мы получаем комбинаторно пятиугольную призму, ее момент-угол многообразие гомеоморфно произведению S^3 на $(S^3 \times S^4)^{\# 5}$. Для обобщенных многогранников усечения в смысле главы 3 момент-угол многообразие будет произведением связных сумм произведений сфер, либо не представляться и в таком виде, как например уже $P = vc(I^3)$ согласно описанию кольца когомологий по теореме Бухштабера–Панова.

Рассмотрим операцию, обощающую срезку вершины – связную сумму многогранников одной размерности в двух их выбранных точках. Результат зависит от выбора точек и порядка отождествления соответствующих гиперграней, но все равно будет простым многогранником. Срезка вершины эквивалентна, очевидно, связной сумме с симплексом.

Теорема 5.2.4. *Пусть P и Q – минимально неголодовские многогранники. Тогда их связная сумма $P\#Q$ также минимально неголодовская.*

Доказательство. Рассмотрим двойственную операцию на нерв-комплексах $K_1 = K_P$ и $K_2 = K_Q$. $K = K_1\#K_2 = K_1 \cup K_2 \setminus \sigma$, где σ – максимальный симплекс, по которому склеиваются наши многогранные сферы. Заметим,что если мы выкидываем из K вершину, лежавшую на границе σ, то $K - v$ есть склейка по общему симплексу голодовских комплексов $K_1 - v$ и $K_2 - v$, а занчит, и сам голодовский комплекс.

Если же $v \in V(K_1) \setminus V(\sigma)$, то, разбивая два коцикла с нетривиальным умножением в суммы с носителями на K_i, получаем, что это нетривиальное умножение должно индуцировать нетривиальное умножение на подкомплексах границы симплекса σ (пользуемся тем, что $dim(\sigma) = n-1$). Но последний комплекс голодовский и нетривиального умножения там быть не может. $\square$

5.3 Минимальная триангуляция $\mathbb{C}P^2$

Здесь мы докажем голодовость одного симплициального комплекса, хорошо известного специалистам по минимальным триангуляциям гладких многообразий.

В работе [56] В.Кюнел и Т.Банхоф изучили геометрические и алгебраические свойства минимальной триангуляции K комплексной проективной плоскости на 9 вершинах. Она обладает многими интересными алгебро-геометрическими свойствами, например, у нее минимальное число вершин среди всех триангуляций 4-мерных комбинаторных многообразий, отличных от сферы. Нам понадобится тот факт, что K является 3-смежностным комплексом, а также явное описание его максимальных 4-мерных симплексов (их 36) и группы симметрий триангуляции, данные в работе В.Кюнела и Г.Лассмана [57].

Сформулируем основной результат этого раздела.

Теорема 5.3.1. *Минимальная триангуляция $\mathbb{C}P^2$ на 9 вершинах является голодовским комплексом, с полными подкомплексами, свободными от кру-*

чений в целочисленных гомологиях, момент-угол комплекс которого не гомотопически эквивалентен букету сфер.

Доказательство. Утверждение о кручениях очевидно из размерностных соображений (см. также главу 2).

Докажем голодовость.

(a) Легко видеть, что дополнение любого минимального не-симплекса триангуляции K на вершинах $0, \ldots, 8$, содержащего 4 вершины, является одним из 36 максимальных симплексов K (это так для одного из минимальных не-симплексов, например, для $\{0, 1, 2, 5\}$, ему соответствует дополнительный максимальный симплекс $\{3, 4, 6, 7, 8\}$, а все остальные пары «минимальный не-симплекс – максимальный симплекс» получаются из этой действием образующих R, S, T, указанных в работе [57]);

(b) Нетривиальное cup-умножение в кольце когомологий $H^*(\mathcal{Z}_K; \Bbbk)$ может возникнуть только в следующих 2 случаях, на полных подкомплексах на множествах вершин I и J:

1. I и J суть 4-вершинные минимальные не-симплексы, они имеют нетривиальные 2-мерные фундаментальные классы как 2-мерные сферы;
2. $|I| = 4$ и дает нетривиальный 2-мерный класс когомологий, $|J| = 5$ и дает нетривиальный 1-мерный класс когомологий ($I \sqcup J = [9]$);

Первое невозможно по соображениям размерности (ибо коцикл в произведении должен быть 5-мерным, а K 4-мерно), второе невозможно в силу (a) (ибо в этом случае, K_J есть симплекс триангуляции K и все его когомологии тривиальны).

Таким образом, голодовость K (над любым полем) доказана.

Для вычисления гомотопического типа $\mathcal{Z}_K$ воспользуемся теоремой А.Бари, М.Бендерского, Ф.Коэна и С.Гитлера[21], которая утверждает, что для любого момент-угол комплекса надстройка над ним $\Sigma\mathcal{Z}_K$ гомотопически эквивалентна букету надстроек над всеми не-симплексами K: $\bigvee_{J \notin K} \Sigma^{2+|J|}|K_J|$.

Этот результат дает в качестве гомотопического типа $\Sigma\mathcal{Z}_K$ букет сфер и 11-кратной надстройки над $\mathbb{C}P^2$. Но стабильность приклеивающих отображений CW-комплекса $\mathcal{Z}_K$ в остовах размерностей $9, \ldots, 14$ показывает, что все они гомотопически тривиальны, и значит, гомотопическая эквивалентность имеет место без перехода к надстройке.

Таким образом, мы получаем 10-кратную надстройку над $\mathbb{C}P^2$ в качестве одного из слагаемых в букете, но она не гомотопически эквивалентна никакому букету сфер, поскольку операция Стинрода Sq^2 остается ненулевой в когомологиях любой надстройки над $\mathbb{C}P^2$. □

Замечание 5.3.2. Пользуясь 3-смежностностью K легко видеть, что звездное подразбиение K' одного из максимальных симплексов минимальной триангуляции $\mathbb{C}P^2$ дает пример минимально неголодовского комплекса без кручений. Из рассмотрения кольца когомологий соответствующего момент-угол комплекса, в силу теоремы Бухштабера–Панова, замечаем, что $\mathcal{Z}_{K'}$ не гомотопически эквивалентен связной сумме произведений сфер.

Замечание 5.3.3. Рассмотрения минимальной неголодовости комплексов в главах 4 и 5 используют результат А.Берглунда и М.Йолленбека [23] о том, что над любым полем из тривиальности cup-умножения в кольце когомологий $\mathcal{Z}_K$ следует отсутствие нетривиальных высших операций Масси. Однако, в общем случае, это может не иметь места над кольцом целых чисел.

Предложение 5.3.4. *Пусть K – минимальная триангуляция $\mathbb{C}P^2$. Тогда в кольце целочисленных когомологий $\mathcal{Z}_K$ нет нетривиальных высших произведений Масси.*

Доказательство. Выше мы доказали, что K есть комплекс Голода над любым полем и имеет место стабильное разложение для момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K$ без перехода к надстройке. Таким образом, $\mathcal{Z}_K$ гомотопически является надстройкой (над соответствующим букетом сфер и кратной надстройки над $\mathbb{C}P^2$). Но, как доказал Дж.Портер[68], все высшие произведения Масси надстроек тривиальны. □

Дополнение A

Операции на симплициальных комплексах

Приведем, следуя А.А.Айзенбергу [1], определение полиэдральных операций, простейшие свойства которых нужны в основном тексте диссертации. Пусть K — симплициальный комплекс на множестве $[m]$, а $K_1, \ldots, K_m$ — симплициальные комплексы на множествах вершин $V_1, \ldots, V_m$ соответственно, причем у комплексов допускаются призрачные вершины.

Конструкция A.1. Определим симплициальный комплекс $K(\underline{\{K_j\}}_{j\in[m]}) = K(K_1, \ldots, K_m)$ на множестве $V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_m$. Пусть $I_j \subseteq V_j$ при $j = 1, \ldots, m$. Скажем, что $I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_m$ является симплексом комплекса $K(K_1, \ldots, K_m)$, если $\{j \in [m] \mid I_j \notin K_j\} \in K$. Комплекс $K(\underline{\{K_j\}}_{j\in[m]})$ можно определить эквивалентным образом. Рассмотрим симплексы Δ_j на множествах V_j при $j = 1, \ldots, m$. Для любого $I \in K$ определим подкомплекс $(K_1, \ldots, K_m)^I = L_1 * \ldots * L_m \subseteq K_1 * \ldots * K_m$, где $L_j = \Delta_j$, при $j \in I$, и $L_j = K_j$ при $j \notin I$. Тогда объединение $\bigcup_{I\in K}(K_1, \ldots, K_m)^I \subseteq K_1 * \ldots * K_m$ совпадает с $K(\underline{\{K_j\}}_{j\in[m]})$.

Пример A.2. Пусть o_m — симплициальный комплекс на m призрачных вершинах. Имеем по определению $o_2(K_1, K_2) = K_1 * K_2$. Более общо, $o_m(K_1, \ldots, K_m) = K_1 * \ldots * K_2$.

Пример A.3. $K(o_1, \ldots, o_1) = K$.

Пример A.4. Пусть $K_i = \partial\Delta^{l_i-1}$ при $i = 1, \ldots, m$. Тогда комплекс

$K(\partial\Delta^{m_1-1},\dots,\partial\Delta^{l_m-1})$ совпадает с комплексом $K(l_1,\dots,l_m)$, подробно изученным в работе [22]. Известно, что если K — граница симплициального многогранника, то комплекс $K(l_1,\dots,l_m)$ также является границей симплициального многогранника. В работах Ю. М. Устиновского [18], [19] содержится приложение этой конструкции к доказательству гипотезы о торическом ранге для момент-угол многообразий.

В общем случае, когда $K_i \neq \partial\Delta^{m_i-1}$, комплекс $K(K_1,\dots,K_m)$ может не быть границей симплициального многогранника, даже если все комплексы $K, K_1,\dots,K_m$ таковы.

Заметим, что полиэдральные операции ассоциативны в следующем смысле:

Предложение А.5. *Пусть K — симплициальный комплекс на m вершинах, $K_1,\dots,K_m$ — симплициальные комплексы на $l_1,\dots,l_m$ вершинах соответственно, и*

$$K_{11},\dots,K_{1l_1},K_{21},\dots,K_{2l_2},\dots,K_{m1},\dots,K_{ml_m}$$

— симплициальные комплексы на множествах вершин V_{sj_s}. Тогда

$$\begin{multline}K(K_1(K_{11},\dots,K_{1l_1}),\dots,K_m(K_{m1},\dots,K_{ml_m}))=\\ K(K_1,\dots,K_m)(K_{11},\dots,K_{1l_1},\dots,K_{m1},\dots,K_{ml_m}) \quad (\text{A.1})\end{multline}$$

как комплексы на множестве вершин $\bigsqcup_{s,j_s}V_{sj_s}$.

Доказательство легко вытекает из определения.

Конструкция А.1 позволяет описывать итерации полиэдральных степеней.

Предложение А.6. *Пусть K — симплициальный комплекс на m вершинах, а L — симплициальный комплекс на l вершинах. Тогда*

$$\mathcal{Z}_{K(L,\dots,L)}(X,Y)=\mathcal{Z}_K\left(X^l,\mathcal{Z}_L(X,Y)\right).$$

как подмножества пространства X^{ml}.

Пример А.7. Если $L=\partial\Delta^1$, $X=D^1$, $Y=S^0$, получаем $\mathcal{Z}_{K(2,\dots,2)}(D^1,S^0)=\mathcal{Z}_K\left((D^1)^2,\mathcal{Z}_{\partial\Delta^1}(D^1,S^0)\right)=\mathcal{Z}_K\left(D^2,S^1\right)$. Поэтому (комплексные) момент-угол комплексы являются частным случаем вещественных момент-угол комплексов (см. также [18] и [22]).

Конструкция подстановки комплексов находит в настоящее время многочисленные применения в торической топологии.

(a) С.Гитлер и С.Лопез де Медрано[48] доказали, что если P есть четномерный смежностный многогранник размерности $2k$, где $k \geq 2$, то он и всевозможные подстановки границ симплексов в его нерв-комплекс дают связные суммы произведений сфер, с двумя сферами в каждом произведении в качестве вещественного момент-угол комплекса $\mathcal{R}_K = (D^1, S^0)^K$. Поэтому, известная в комбинаторной геометрии операция «удвоения» простого многогранника $P(2, \ldots, 2)$ сохраняет указанное выше топологическое свойство для (комплексных) момент-угол комплексов $\mathcal{Z}_K$;

(b) С.Чой и Х.Парк [38] доказали, что малое накрытие для некоторого нестоэдра (но не граф-ассоциаэдра) может иметь произвольное кручение нечетного порядка в когомологиях;

(c) Ф.Босио [29] недавно доказал, что биградуированные числа Бетти момент-угол многообразий (или простых многогранников) $\beta^{-i,2j}(P)$ не являются топологическими инвариантами (момент-угол многообразий $\mathcal{Z}_P$).

В главе 4 §3 нам потребовалось следующее утверждение:

Предложение А.8. *Пусть многогранник P минимально неголодовский. Тогда любая подстановка границ симплексов P_ω остается минимально неголодовским многогранником.*

Доказательство. Это утверждение может быть получено двумя способами.

В работе [21] описана (неградуированная) кольцевая структура в когомологиях $\mathcal{Z}_{K(\omega)}$, в силу Следствия 7.6 она совпадает с изначальной структурой $H^*(\mathcal{Z}_K)$. С другой стороны, соответствующий момент-угол комплекс гомеоморфен $K-$степени, нетривиальное умножение в которой сосредоточено на дополнительных полных подкомплексах в силу определения подстановки комплексов и голодовости границ симплексов.

Альтернативное доказательство может быть получено, если заметить, что всякая операция подстановки $P(l_1, \ldots, l_m)$ может быть представлена последовательностью удвоений вершин двойственного симплициального многогранника, т.е операцией симплициального букета $Q(1, \ldots, 2, \ldots, 1)$. Но последние, в силу своего геометрического определения, сохраняют характеристическое свойство минимально неголодовских симплициальных комплексов K иметь нетривиальное умножение в $\mathrm{Tor}_{\Bbbk[m]}(\Bbbk[K], \Bbbk)$ только на дополнительных полных подкомплексах. $\square$

Литература

[1] А. А. Айзенберг, *Связь инвариантов Бухштабера и обобщенных хроматических чисел*, Дальневост. матем. журн., 11:2 (2011), 113–139.

[2] А. А. Айзенберг, В. М. Бухштабер, *Момент-угол пространства и нерв-комплексы выпуклых многогранников*, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, Т.275, 2011, 22–54.

[3] И. В. Баскаков, *Когомологии K-степеней пространств и комбинаторика симплициальных разбиений*, УМН, 57:5(347) (2002), стр.147–148.

[4] И. В. Баскаков, *Тройные произведения Масси в когомологиях момент-угол комплексов*, УМН, 58:5(353) (2003), стр.199–200

[5] И. В. Баскаков, В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Алгебры клеточных коцепей и действия торов*, УМН, 59:3(357) (2004), стр.159–160.

[6] В. М. Бухштабер, *Кольцо простых многогранников и дифференциальные уравнения*, Геометрия, топология и математическая физика. I, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова, Труды МИАН им. В.А.Стеклова, 263, МАИК, М., 2008, стр.18–43.

[7] В. М. Бухштабер, В. Д. Володин. *Точные верхние и нижние границы для нестоэдров*, Изв. РАН, **75** (2011).

[8] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, *Алгебра операторов на кольце многогранников и квазисимметрические функции*, УМН, 65:2(392) (2010), стр.197–198.

[9] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, *Многогранники, числа Фибоначчи, алгебры Хопфа и квазисимметрические функции*, УМН, 66:2(398), 2011.

[10] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Действия тора и комбинаторика многогранников*, Труды МИАН им. В.А.Стеклова, 225, 1999, стр.96–131.

[11] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Действия торов, комбинаторная топология и гомологическая алгебра*, УМН, 55:5(335), стр.3–106, 2000.

[12] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Действия тора, эквивариантные момент-угол-комплексы и конфигурации координатных подпространств*, Записки научных семинаров ПОМИ, Т.266, 2000.

[13] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Торические действия в топологии и комбинаторике.* Москва, 2004.

[14] В. М. Бухштабер, Н. Рэй, *Торические многообразия и комплексные кобордизмы*, УМН, 53 (1998), вып. 2, стр.139–140.

[15] Голод Е.С. *О гомологиях некоторых локальных колец*, ДАН СССР **144**:3 (1962), 479–482.

[16] Н. Ю. Ероховец, *Момент-угол многообразия простых n-мерных многогранников с n+3 гипергранями*, УМН, 66:5(401) (2011), 187–188

[17] Н. Ю. Ероховец, *Максимальные действия торов на момент-угол многообразиях.* Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. МГУ им. М.В.Ломоносова, мех.-мат. факультет, 2011.

[18] Ю. М. Устиновский, *Операция удвоения многогранников и действия тора*, УМН, 64:5(389) (2009), стр.181–182.

[19] Ю. М. Устиновский, *Гипотеза о торическом ранге для момент-угол комплексов*, Матем. заметки, 90:2 (2011), стр.300–305.

[20] Michèle Audin. *The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds.* Progress in Mathematics, 93. Birkhäuser, Basel, 1991.

[21] A. Bahri, M. Bendersky, F. R. Cohen, S. Gitler, *The polyhedral product functor: A method of decomposition for moment-angle complexes, arrangements and related spaces*, Advances in Mathematics, 225:3 (2010), pp.1634–1668.

[22] A. Bahri, M. Bendersky, F. R. Cohen, S. Gitler, *A new topological construction of infinite families of toric manifolds implying fan reduction*, arXiv:1011.0094v3

[23] Alexander Berglund and Michael Jollenbeck. *On the Golod property of Stanley–Reisner rings*, J. Algebra **315**:1 (2007), 249–273.

[24] L. Billera, C. Lee, *A proof of sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial polytopes*, Bull.Amer.Math.Soc. (N.S.), 1980, V.2, №1, pp. 181–185.

[25] Frédéric Bosio and Laurent Meersseman. *Real quadrics in $\mathbb{C}^n$, complex manifolds and convex polytopes.* Acta Math. **197** (2006), no. 1, 53–127.

[26] Frédéric Bosio. *Diffeomorphic moment-angle manifolds with different Betti numbers*, Preprint (2014); arXiv:1410.3304.

[27] Raul Bott and Clifford Taubes. *On the self-linking of knots. Topology and physics.* J.Math.Phys. **35** (1994), no. 10, 5247–5287.

[28] W. Bruns, J. Gubeladze, *Combinatorial invariance of Stanley-Reisner rings*, Georgian Mathematical Journal, V.3, №4, (1996), pp. 315–318.

[29] Victor M. Buchstaber. *Lectures on toric topology.* In *Proceedings of Toric Topology Workshop KAIST 2008*. Trends in Math. **10**, no. 1. Information Center for Mathematical Sciences, KAIST, 2008, pp. 1–64.

[30] Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. *Algebraic topology of manifolds defined by simple polyhedra.* Uspehi Mat. Nauk **53** (1998), no.3, 195–196 (Russian); Russian Math. Surveys **53** (1998), no. 3, 623–625 (English translation).

[31] Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. *Torus actions and the combinatorics of polytopes.* Trudy Mat. Inst. Steklova **225** (1999), 96–131 (Russian); Proc. Steklov Inst. Math. **225** (1999), 87–120 (English translation).

[32] Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. *Toric Topology*, A book project (2013); arXiv:1210.2368.

[33] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, N. Ray, *Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds*, Moscow Math. J., V.7, №2, 2007, pp. 219–242.

[34] César Camacho, Nicolaas Kuiper and Jacob Palis. *The topology of holomorphic flows with singularity.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **48** (1978), 5–38.

[35] Michael P.Carr and Satyan L.Devadoss. *Coxeter complexes and graph-associahedra*, Topology Appl. **153** (2006), no. 12, 2155–2168.

[36] Suyoung Choi. *Different moment-angle manifolds arising from two polytopes having the same bigraded Betti numbers*, Preprint (2012); arXiv:1209.0515.

[37] Suyoung Choi and Jang Soo Kim. *A combinatorial proof of a formula for Betti numbers of a stacked polytope.* Electron. J. Combin. **17** (2010), no. 1, Research Paper 9, 8 pp.; arXiv:math.CO/0902.2444.

[38] S.Choi, H.Park, *A new graph invariant arises in toric topology*, J.Math.Soc.Japan (2014)

[39] D. Cox, *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*, J. Algebraic Geom. 4 (1995), pp. 17–50; arXiv:alg-geom/9210008v2.

[40] D. A. Cox, *Recent developments in toric geometry*, Algebraic geometry Santa Cruz 1995, Providence, R.I.: AMS, 1997, pp. 389–436 (Proc. Symp. Pure Math.; V. 62); arXiv:alg-geom/9606016v1.

[41] Michael W. Davis. *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space.* Ann. of Math. (2) **117** (1983), no. 2, 293–324.

[42] M. Davis, T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. 1991. V. 62, №2, pp. 417–451.

[43] E.-M. Feichtner, B. Sturmfels, *Matroid polytopes, nested sets and Bergman fans*, Portugaliae Mathematica 62 (2005), 437Ц468.

[44] A. Fenn, *Generating Functions of Nestohedra and Applications*, arXiv:0908.0605v1 [math.CO]

[45] M. Franz, *The Integral Cohomology of Toric Manifolds*, Геометрическая топология, дискретная геометрия и теория множеств, Сборник статей, Тр. МИАН, 252, Наука, М., 2006, стр.61–70.

[46] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1993 (Ann. of Math. Studies; V.131).

[47] The GAP Group *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12*, 2008, http://www.gap-system.org.

[48] Samuel Gitler and Santiago Lopez de Medrano. *Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums*, Preprint (2009); arXiv:0901.2580.

[49] Mark Goresky and Robert MacPherson. *Stratified Morse Theory.* Springer, Berlin–New York, 1988.

[50] Jelena Grbic, Taras Panov, Stephen Theriault and Jie Wu. *Homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes*, Preprint (2012); arXiv:1211.0873.

[51] Jelena Grbic, Stephen Theriault. *The homotopy type of the complement of a coordinate subspace arrangement.* Topology **46** (2007), no. 4, 357-396.

[52] Branko Grünbaum, *Convex polytopes*, Springer, 1968.

[53] B. Grunbaum, *Convex Polytopes*, Vol. 221 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, Second ed., 2003.

[54] M. Hochster, *Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes*, in Ring theory, II (Proc. Second Conf.,Univ. Oklahoma, Norman, Okla., 1975), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., V. 26, pp.171–223, Dekker, New York, 1977.

[55] Frances Kirwan. *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry.* Mathematical Notes, 31. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1984.

[56] W. Kuhnel, T. F. Banchoff. *The 9-Vertex Complex Projective Plane.* Math. Int., **5** (1983), no. 3, pp. 11–22.

[57] W. Kuhnel, G. Lassmann. *The Unique 3-Neighbourly 4-Manifold with Few Vertices.* J. of Comb. Theory, Series A **35** (1983), pp. 173–184.

[58] Mark de Longueville. *The ring structure on the cohomology of coordinate subspace arrangements.* Math. Zeitschrift **233** (2000), no. 3, 553–577.

[59] S. Lopez de Medrano, *The topology of the intersection of quadrics in* $\mathbb{R}^n$, Lecture Notes in Mathematics 1370 (1989), 280Ц292.

[60] Santiago López de Medrano and Alberto Verjovsky. *A new family of complex, compact, non-symplectic manifolds.* Bol. Soc. Mat. Brasil. **28** (1997), 253–269.

[61] S. Maclane. *Homology.* Springer-Verlag, Berlin, 1963. [Русский перевод: С. Маклейн. *Гомология.* Москва: Мир, 1966.]

[62] *Macaulay 2.* A software system devoted to supporting research in algebraic geometry and commutative algebra. Available at `http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/`

[63] D.McGavran. *Adjacent connected sums and torus actions*, Trans. AMS 251 (1979), pp. 235–254.

[64] Taras Panov. *Cohomology of face rings, and torus actions*, in "Surveys in Contemporary Mathematics". London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. **347**, Cambridge, U.K., 2008, pp. 165–201; arXiv:math.AT/0506526.

[65] Taras Panov. *Moment–angle manifolds and complexes.* In *Proceedings of Toric Topology Workshop KAIST 2010.* Trends in Math. **12**, no. 1. Information Center for Mathematical Sciences, KAIST, 2010, pp. 43–69.

[66] Taras Panov, Nigel Ray, *Categorical aspects of toric topology*, in "Toric Topology" (M.Harada et al, eds.), Contemporary Mathematics, V.460, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000, pp. 293–322.

[67] Taras Panov, Nigel Ray, Reiner Vogt, *Colimits, Stanley–Reisner algebras and loop spaces*, In: "Categorical Decomposition Techniques in Algebraic Topology"(G.Arone et al eds.). Progress in Mathematics, V.215, Birkhauser, Basel, 2004, pp. 261–291.

[68] Gerald J. Porter, *Higher products*, Trans. of the American Math. Soc. V. 148, 1970, pp. 315–345.

[69] A. Postnikov, *Permutohedra, associahedra, and beyond*, arXiv: math.CO/0507163.

[70] A. Postnikov, V. Reiner, L. Williams, *Faces of generalized permutohedra*, arXiv: math/0609184 v2 [math.CO] 18 May 2007.

[71] G. Reisner, *Cohen–Macaulay quotients of polynomial rings*, Advances in Math., V.21, №1, 1976, pp. 30–49.

[72] C. P. Rourke, B. J. Sanderson. *Introduction to piecewise-linear topology.* Berlin: Springer-Verlag, 1972. (Springer Study Edition). [Русский перевод: К. Рурк, Б. Сандерсон. *Введение в кусочно-линейную топологию.* Москва: Мир, 1974.]

[73] R. Stanley. *Combinatorics and Commutative Algebra.* Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc., 1996. (Progress in Mathematics V. 41).

[74] James D. Stasheff. *Homotopy associativity of H-spaces. I.* Transactions Amer. Math. Soc. **108** (1963), 275–292.

[75] Naoki Terai and Takayuki Hibi. *Computation of Betti numbers of monomial ideals associated with stacked polytopes.* Manuscripta Math., 92(4): 447–453, 1997.

[76] Ernest B. Vinberg. *Discrete linear groups generated by reflections.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **35** (1971), 1072–1112 (Russian); Math. USSR Izvestija **5** (1971), no. 5, 1083–1119 (English translation).

[77] A. Zelevinsky, *Nested complexes and their polyhedral realizations*, Pure and Applied Mathematics Quarterly 2 (2006), 655Ц671.

[78] Günter M. Ziegler. *Lectures on Polytopes.* Springer-Verlag, New York, 2007.

Публикации автора по теме диссертации

Из официального Перечня ВАК:

[79] И. Ю. Лимонченко, *Биградуированные числа Бетти некоторых простых многогранников*, Мат. Заметки **94**:3 (2013), 373–388.

[80] И. Ю. Лимонченко, *Кольца Стенли–Райснера обобщенных многогранников усечения и их момент-угол многообразия*, Труды МИРАН им. В.А.Стеклова, **286** (2014), 207–218.

[81] И. Ю. Лимонченко, “Биградуированные числа Бетти некоторых простых многогранников”, XVIII международная конференция студентов, аспирантов и молодых учҷных “Ломоносов”, Москва, 11–15 апреля 2011 г., `http://higeom.math.msu.su/dubrovinlab/Limonchenko4.pdf`.

[82] И. Ю. Лимонченко, “Нетривиальное кручение в кольце когомологий момент-угол комплексов и их топологические инварианты”, XX международная конференция студентов, аспирантов и молодых учҷных “Ломоносов”, Москва, 8–12 апреля 2013 г., `http://www.mathnet.ru:8080/PresentFiles/6578/32080_8dfa.pdf`

[83] I .Yu. Limonchenko, “Combinatorial commutative algebra of some moment-angle manifolds and their topological types”, International Conference Algebraic Topology and Abelian Functions, in honour of Victor Buchstaber in the occasion of his 70th birthday, Moscow, Russia, June 18–22, 2013, pp. 85–86.

[84] I. Yu. Limonchenko, “Cohomology rings of some moment-angle manifolds and their topological invariants”, International Open Chinese–Russian Conference Torus Actions: Topology, Geometry and Number Theory, Khabarovsk, Russia, September 2–7, 2013, pp. 46–47.

[85] I. Yu. Limonchenko, “Minimally non-Golod simplicial complexes and moment-angle manifolds”, International Japanese–Russian Conference Toric Topology 2014 in Osaka, Osaka, Japan, January 21–24, 2014, http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/~masuda/toric2014_osaka/Limonchenko.pdf

[86] I. Yu. Limonchenko, “Minimally non-Golod simplicial complexes in toric topology”, 13th Serbian Mathematical Congress, Vrnjacka Banja, Serbia, May 22–25, 2014, p. 89.