В рамках агитационных встреч с второкурсниками **кафедра высшей геометрии и топологии** начинает цикл мини-лекций для студентов младших курсов. Мы хотим дать представление о современных проблемах геометрии, топологии и их приложений и рассказать доступным для младшекурсников языком о научных интересах ведущих специалистов в области геометрии и топологии, работающих на кафедре. Приглашаем всех желающих (не только второкурсников)!

20 марта 2018 (вторник), 16:45, ауд. 13-06

доц. Д. В. Миллионщиков

Матрицы Картана, медленно растущие алгебры Ли и уравнения в частных производных

Матрица Картана – это целочисленная квадратная матрица, удовлетворяющая ряду просто формулируемых требований. В частности, у нее стоят двойки по диагонали, а внедиагональные элементы неположительны (есть и другие условия!!!). Например, матрица $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ является матрицей Картана. Матрицы Картана играют фундаментальную роль в современной математике. Достаточно упомянуть классификацию простых алгебр Ли. Напомним, что алгеброй Ли называется векторное пространство V вместе с билинейной операцией "скобка Ли"$[,] : V \times V \to V$, которая должна быть кососимметричной и удовлетворять тождеству Якоби:

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0, \forall x, y, z \in V.$$

Важным примером алгебры Ли является пространство квадратных матриц со скобкой $[A, B] = AB - BA$.

Другим примером является свободная алгебра Ли $\mathcal{L}(a, b)$, порожденная двумя элементами a и b, как векторное пространство она совпадает с линейной оболочкой

$$\langle a, b, [b, a], [[b, a], a], [[b, a], b], [[[b, a], a], a], [[[b, a], a], b], [[[b, a], b], b], \dots \rangle$$

Почему мы не включили в этот список тройной коммутатор $[[[b, a], b], a]$? А дело в том, что он выражается при помощи тождества Якоби через уже выписанные элементы! (найдите как). Рост конечнопорожденной алгебры Ли $\mathcal{L}$ определяет функция $F_{\mathcal{L}}(n) = \dim V_n$, равная размерности пространства V_n коммутаторов от образующих длины не выше $n - 1$. В нашем примере свободной алгебры Ли $\mathcal{L}(a, b)$: $F_{\mathcal{L}(a,b)}(1) = 2, F_{\mathcal{L}(a,b)}(2) = 3, F_{\mathcal{L}(a,b)}(3) = 5, F_{\mathcal{L}(a,b)}(4) = 8, \dots$ (интрига!!!: появятся ли здесь числа Фибоначчи???).

Свободная алгебра Ли, как и свободная группа, имеет самый быстрый рост. У нее нет других соотношений, кроме тождества Якоби. Но есть алгебры Ли, у которых есть соотношения (напоминает теорию групп!!!) и такие алгебры Ли уже могут расти медленно - в смысле асимптотики функции $F_{\mathcal{L}}(n) = \dim V_n$.

В своей лекции я попробую рассказать, как с помощью матриц Картана строить медленно растущие алгебры Ли и какое отношение они имеют к уравнениям в частных производных вида

$$u_{xy} = e^u,\ u_{xy} = e^u - e^{-u},\ u_{xy} = e^u - e^{-2u},$$

где $u = u(x, y)$ – неизвестная функция двух переменных x, y.

проф. П. Г. Гриневич

Конечнозонное интегрирование и аномальные волны на воде и в оптике

В настоящее время физиками ведется изучение так называемых аномальных волн. Поскольку волны такого типа в океане характеризуются гигантской амплитудой и появляются неожиданно в спокойную погоду, то они представляют опасность для кораблей и получили название волн-убийц (rogue waves). Подобные волны наблюдаются и в других нелинейных системах, в частности, в оптике.

В оптических системах такие волны можно моделировать специальными решениями фокусирующего нелинейного уравнения Шредингера и они строятся в терминах римановых поверхностей, близких к рациональным, что позволяет вывести простые приближенные формулы, допускающие сопоставление с экспериментом.