Некоммутативная геометрия и топология — введение

В. М. Мануйлов

Основные этапы и вехи:

1. **1930-е**: Дж. фон Нейманн: Математические основания квантовой механики (серия статей "Rings of Operators" с Ф. Мюрреем)
2. **1943**: И. Гельфанд и М. Наймарк: определение C*-алгебры
3. **1970-е**: Результаты по гипотезе Новикова (А. С. Мищенко, Г. Г. Каспаров) и по расширениям C*-алгебр (Л. Браун, Р. Дуглас, П. Филлмор)
4. **1990**: книга А. Конна "Некоммутативная геометрия"

Основная идея:

Двойственность между пространствами и алгебрами функций. Пространство X позволяет рассматривать алгебры функций на X. Каждой точке $x \in X$ соответствует идеалу I_x всех функций, обращающихся в ноль в точке x. Это позволяет рассматривать некоторые идеалы как точки, а алгебру функций как функции на пространстве, состоящем из этих точек.

Эта двойственность хорошо работает для ряда категорий пространств/алгебр:

- алгебраические многообразия и рациональные полиномы
- гладкие многообразия и алгебры гладких функций
- локально компактные хаусдорфовы пространства и алгебры непрерывных функций

В основном мы будем заниматься последним случаем, соответствующая двойственность — двойственность Гельфанда.

Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, тогда алгебра $C_0(X)$ непрерывных функций, обращающихся в ноль в бесконечности является коммутативной C*-алгеброй. Если A — коммутативная C*-алгебра, то множество M_A всех максимальных идеалов, снабженное естественной топологией, является локально компактным хаусдорфовым пространством. Преобразование Гельфанда $\Gamma : A \to C_0(M_A)$ является изометрическим $*$-изоморфизмом.

Топологические свойства X отражаются в свойствах алгебры $C_0(X)$:

пространство X	алгебра $C_0(X)$
компактно	обладает единицей
метризуемо	сепарабельна
связно	не т нетривиальных идемпотентов
замкнутое подпространство	фактор-алгебра
компактификация Стоуна–Чеха	алгебра мультипликаторов
размерность	ранг

Квантовая механика:
Замена объектов классической геометрии на другие, некоммутативные (квантование):
функции на фазовом пространстве заменяются на операторы, действующие в гильбертовом пространстве состояний.
Пример: фазовое пространство $\mathbb{R}^2$ частицы, движущейся вдоль прямой. После квантования координата q и импульс p точки в $\mathbb{R}^2$ заменяются операторами Q и P, удовлетворяющими соотношению Гейзенберга $PQ - QP = i\hbar I$: $H = L^2(\mathbb{R})$, $Q\psi(x) = x\psi(x)$, $P\psi(x) = -i\hbar\psi'(x)$, $\psi \in H$.
Результат квантования можно рассматривать как некоммутативную деформацию классического фазового пространства. Принцип неопределенности Гейзенберга показывает, что в этом деформированном фазовом пространстве не существует естественного понятия точек.
Различные категории алгебр дают различные версии некоммутативной геометрии и топологии. Одной из наиболее интересных и проработанных является категория C*-алгебр.

C*-алгебры

Банахова алгебра A над $\mathbb{C}$ с инволюцией $*$ называется C*-алгеброй, если $\|a^*a\| = \|a\|^2$ для любого $a \in A$.

Пример: Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, тогда множество $C_0(X)$ всех непрерывных функций, стремящихся к нулю в бесконечности, является C*-алгеброй.
Пример: Пусть H — гильбертово пространство, $\mathbb{B}(H)$ — множество ограниченных линейных операторов в H — является C*-алгеброй.

Теорема (Гельфанд–Наймарк)

Любая коммутативная C*-алгебра изометрически $*$-изоморфна алгебре $C_0(X)$ для некоторого локально компактного хаусдорфова пространства X.

Любая C*-алгебра изометрически $*$-изоморфна замкнутой по норме инволютивной подалгебре C*-алгебры $\mathbb{B}(H)$.

Любой $*$-гомоморфизм C*-алгебр автоматически непрерывен. Более того, любой инъективный $*$-гомоморфизм C*-алгебр изометричен. В частности, на любой C*-алгебре имеется ровно одна норма, относительно которой алгебра является C*-алгеброй.

Элемент $a \in A$ C*–алгебры A положителен, если $a = b^* b$ для некоторого $b \in A$. Положительные элементы образуют конус в A; их спектр состоит из неотрицательных чисел.

Линейный функционал φ на A положителен, если $\varphi(a) \geq 0$ для любого положительного $a \in A$. Положительные функционалы нормы 1 называют состояниями.
Пример: $A = C(X)$, $x \in X$, тогда $\varphi : A \to \mathbb{C}$, $\varphi(a) = a(x)$, $a \in C(X)$, является состоянием.

Фактор-пространства

Часто топологические пространства являются фактор-пространствами по отношению к некоторому отношению эквивалентности. Пример: пространство орбит действия группы на пространстве X. Частный случай: слоения (пространство слоев). Даже если X хаусдорфово, фактор-пространство орбит может быть нехаусдорфовым. Какая C*-алгебра должна отвечать нехаусдорфовому пространству?

Два подхода:

- $C(X)$; эта алгебра для нехаусдорфова пространства может оказаться очень маленькой
- Существует некоммутативная C*-алгебра, более подходящая для описания X.

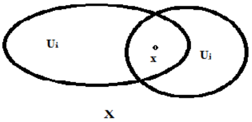
Примеры, показывающие разницу этих двух подходов:

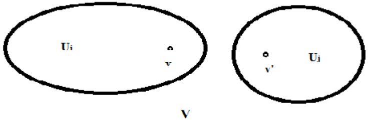
Пусть $Y = \{a, b\}$ — двухточечное пространство, $C(Y) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Пусть $\mathbb{Z}/2$ действует на Y перестановкой (тем самым, мы объявляем, что a и b принадлежат одному классу эквивалентности), и пусть X — фактор-пространство, состоящее из одной точки.

- Можно взять подалгебру $A \subset C(Y)$ функций f, для которых $f(a) = f(b)$. Тогда $A = C(X) \cong \mathbb{C}$.
- Можно взять бо́льшую алгебру $B \supset C(Y)$ всех 2×2-матриц, $f = \begin{pmatrix} f_{aa} & f_{ab} \\ f_{ba} & f_{bb} \end{pmatrix}$. $C(Y)$ — подмножество B, состоящее из диагональных матриц, и действие $\mathbb{Z}/2$ осуществляется матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

B больше, чем A, но у них много общего, например, совпадают их центры и их пространства неприводимых представлений.

Пусть X — компактное многообразие, полученное склейкой открытых множеств $U_i \in X$, гомеоморфных диску, по их пересечениям $U_i \cap U_j$. Можно считать покрытие $\{U_i\}$ конечным. Пусть $V = \sqcup_i U_i$. На V возникает отношение эквивалентности R: $v \sim v'$, $v, v' \in V$, если $p(v) = p(v')$, где $p : V \to X$ — очевидная сюръекция.





Отношение эквивалентности R можно рассматривать как подмножество в $V \times V$, $R = \{(v, v') \in V \times V, v \sim v'\}$ с индуцированной топологией. Наделим $C_0(R)$ алгебраическими операциями

$$(f * g)(v, v'') = \sum_{v \sim v' \sim v''} f(v, v')g(v', v'');$$

$$(f^*)(v, v') = \overline{f(v', v)}.$$

превращающими ее в C*-алгебру $C^*(R)$. Как и прежде, пространства всех неприводимых представлений у $C^*(R)$ и у $C(X)$ совпадают.

Поскольку $R = \sqcup_{i,j} U_i \cap U_j$, функция $f \in C_0(R)$ — матрица, матричные элементы которой — функции $f_{ij} \in C_0(U_i \cap U_j)$, а умножение — поточечное матричное умножение. Над точкой $x \in X$ получается матричная алгебра, действующая на эрмитовом пространстве функций на конечном множестве $p^{-1}(x)$. Размерность этого 'расслоения' над x равна числу открытых множеств U_i, содержащих x. Матричные алгебры различной размерности организованы в 'непрерывное поле' C*-алгебр над X.

Замечание: Хотя топология на X хорошая, мы не использовали ее для построения $C^*(R)$. Это можно использовать для построения C*-алгебр, связанных с фактор-пространствами и без хорошей топологии.

Пусть $Y = I_1 \sqcup I_2$ — несвязное объединение двух копий I_1, I_2 отрезка $[0,1]$, а R — отношение эквивалентности на Y, отождествляющее $(s,1) \in I_1$ с $(s,2) \in I_2$, где $s \in (0,1)$ (но $(s,1)$ не отождествляется с $(s,2)$ при $s = 0$ и $s = 1$). Тогда фактор-пространство X получается склейкой двух внутренностей отрезков I_1 и I_2, но не их концов. Поэтому, X не хаусдорфово.
Первый подход дает подалгебру в $C(I_1 \sqcup I_2)$, состоящую из функций $f_1 \in C(I_1)$, $f_2 \in C(I_2)$, которые совпадают на $(0,1)$. Поскольку они непрерывны, они совпадают на всем отрезке $[0,1]$, поэтому эта подалгебра есть $C([0,1])$, и информация о концах отрезков теряется.
Второй подход дает подалгебру в алгебре $M_2(C([0,1]))$ матричнозначных функций на $[0,1]$:

$$A = \{(f(x))_{x\in[0,1]} \in M_2(C([0,1])) : f(0), f(1) \text{ — диагональные матрицы}\}.$$

Пространство неприводимых представлений A совпадает с фактор-пространством X.

Некоммутативный тор

Соотношение Гейзенберга относится к неограниченным операторам $Q = x$, $P = -i\hbar\frac{d}{dx}$. Ограниченная версия Вейля коммутационных соотношений использует унитарные операторы $U_t = e^{itP}$, $V_s = e^{isQ}$. Тогда $V_s U_t = e^{2\pi i\hbar st} U_t V_s$. Пусть $\theta \in \mathbb{R}$, $\lambda = e^{2\pi i\theta}$. Некоммутативный тор A_θ — универсальная C*-алгебра, порожденная унитарными образующими U, V, удовлетворяющими соотношению $VU = \lambda UV$. Конкретная модель для A_θ дается унитарными операторами

$$(Uf)(x) = e^{2\pi ix} f(x), \quad (Vf)(x) = f(x+\theta)$$

в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{S}^1)$ (мы отождествляем $\mathbb{S}^1$ с $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$).

- $A_{\theta+n} \cong A_\theta$ для $n \in \mathbb{Z}$;
- $A_0 \cong C(\mathbb{T}^2)$ (преобразование Фурье по двум коммутирующим переменным;
- Если $\theta = \frac{p}{q}$, то существует плоское векторное расслоение E ранга q над $\mathbb{T}^2$, для которого $A_{\frac{p}{q}} \cong C(\mathbb{T}^2; \mathrm{End}(E))$.
- Если θ иррационально, то алгебра A_θ проста.

Имеется плотная $*$-подалгебра $\mathcal{A}_\theta \subset A_\theta$, заслуживающая быть названной алгеброй 'гладких функций' на некоммутативном торе. Поскольку полиномы Лорана по U и V плотны в A_θ, рассмотрим элементы вида $a = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{mn} U^m V^n$, где $a_{mn} \in \mathbb{C}$. Тогда $a \in \mathcal{A}_\theta$, если его коэффициенты быстро убывают, т.е.

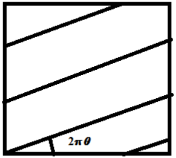
$$\sup_{m,n\in\mathbb{Z}} (1+m^2+n^2)^k |a_{mn}| < \infty \text{ для всех } k \in \mathbb{N}.$$

Если $\theta = 0$, это условие на коэффициенты Фурье функции $f \in C(\mathbb{T}^2)$ эквивалентно тому, что $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$.

Производной на алгебре A называется линейное отображение $\delta : A \to A$, удовлетворяющее правилу Лейбница: $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ для любых $a, b \in A$. На $\mathcal{A}_\theta$ имеются две производные, заданные равенствами

$$\delta_1(U) = 2\pi i U, \qquad \delta_1(V) = 0;$$

$$\delta_2(V) = 2\pi i V, \qquad \delta_2(U) = 0.$$



Угол наклона $2\pi\theta$ задает слоение на торе. Две точки тора эквивалентны, если лежат на одном листе слоения (на одной прямой). Если θ иррационально, то множество слоев с естественной (факторной) топологией не хаусдорфово. Любая непрерывная функция на этом пространстве постоянна. Используя эквивалентность и забывая фактор-топологию, получаем, как раньше, некоммутативную C*-алгебру, заданную слоением. Эта C*-алгебра — 'почти' A_θ.

Топологичесикие аналогии

Непрерывное отображение $f : X \to Y$ соответствует $*$-гомоморфизму $f^* : C(Y) \to C(X)$.

$C(X \times Y) \cong C(X) \otimes C(Y)$, поэтому декартово произведение пространств соответствует тензорному произведению C*-алгебр.

$C([0,1] \times X) \cong C([0,1]; C(X))$

Два $*$-гомоморфизма $\phi_0, \phi_1 : A \to B$ гомотопны, если существует такой $*$-гомоморфизм $\Phi : A \to C([0,1]; B)$, что его значения в 0 и в 1 дают ϕ_0 и ϕ_1.

Конусом CA над A называется $C_0((0,1]; A)$.

Надстройкой SA над A называется $C_0((0,1); A)$.

Упражнение: тождественное отображение и нулевое отображение $CA \to CA$ гомотопны.

Хотя для некоммутативных C*-алгебр не существует понятия точек, имеется несколько вариантов их заменить.

1. Мультипликативные линейные функционалы — их очень мало (непример, если A проста);
2. Чистые состояния — их больше, но тоже недостаточно;
3. Все состояния — их слишком много;
4. Неприводимые представления — лучше, но тоже не всегда адекватно.

Геометрия как дополнительная структура. Спектральные тройки.

На ориентированном многообразии M рассмотрим оператор Дирака, являющийся неограниченным дифференциальным оператором первого порядка на гильбертовом пространстве $L^2(M)$ (нужны спинорные расслоения).

Спектральные тройки

Пусть A — инволютивная алгебра. Спректральная тройка (π, H, D) состоит из

1. гильбертова пространства H;
2. мономорфного $*$-представления A в H;
3. неограниченного самосопряженного оператора D в H с компактной резольвентой (т. е. оператор $\lambda 1 - D)^{-1}$ компактен для всех $\lambda \notin \mathrm{Sp}(D)$), для которого $[D, \pi(a)]$ ограничен для любого $a \in A$.

Пример: Пусть $A = C^1(\mathbb{S}^1)$, $H = L^2(\mathbb{S}^1)$, представление π задано умножением на функции из A, $D = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}$. Тогда $\|Df - fD\| = \|f'\|$, $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$.

Пример: Пусть Γ — конечнопорожденная группа, L — функция длины на Γ (если зафиксировать конечное множество образующих Γ, то $L(g)$ — минимальная длина слов, составленных из образующих, которые задают элемент $g \in \Gamma$). Пусть $A = \mathbb{C}[\Gamma]$ (все конечные суммы вида $\sum_{g \in \Gamma} \alpha_g \cdot g$); $H = l^2(\Gamma)$, π — очевидное представление, индуцированное левым регулярным представлением группы Γ, D — умножение на L.

В метрическом пространстве X расстояние можно определить с помощью Липшицевых функций:

$$d(x, y) = \sup\{|f(x) - f(y)| : f \in C_{Lip}(X), \|f\|_{Lip} \leq 1\}.$$

Некоммутативная версия измеряет расстояния между состояниями ϕ, ψ на C*-алгебре A:

$$d(\phi, \psi) = \sup\{\phi(a) - \psi(a)| : a \in A, \|[D, \pi(a)]\| \leq 1\}.$$

Если $A = C^1(\mathbb{S}^1)$, ϕ, ψ — функционалы вычисления в точках $x, y \in \mathbb{S}^1$, эта формула дает обычное расстояние на $\mathbb{S}^1$.

Дифференциальное исчисление

$da = [D, \pi(a)]$ (da принимает значения в модуле над A).

Размерность

Рост собственных значений: Пусть $N(\alpha)$ — число собственных значений оператора D, не превосходящих α. Тогда асимптотически $N(\alpha) \sim \alpha^d$.

Интегрирование

След Диксмье $\mathrm{Tr}(a) = \mathrm{Res}_{z=d}\, \mathrm{tr}(a|D|^{-z})$.

Дифференциальные формы

Гомологии Хохшильда, циклические когомологии.

Некоммутативная версия векторных расслоений

Векторное расслоение E над компактным многообразием X получается склеиванием 'тривиальных расслоений' $U_i \times \mathbb{C}^n$ над открытыми множествами $U_i \subset X$, образующими покрытие X. Классы эквивалентности векторных расслоений, правильно определенные, образуют инвариант, называемый K-группой X. Так получается функтор обобщенной теории когомологий, которая называется K-теорией. Известно, что для любого векторного расслоения E существует такое векторное расслоение F, что $E \oplus F \cong X \times \mathbb{C}^n$ (т.е. тривиально).
Множество $\Gamma(X, E)$ непрерывных сечений (т. е. таких отображений $s : X \to E$, что $p(s(x)) = x$ для всех $x \in X$, где $p : E \to X$ — очевидная проекция) имеет естественную структуру модуля над $C(X)$.
Модуль M над алгеброй A называется конечнопорожденным проективным, если существует такой модуль N над A, что $M \oplus N \cong A^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Теорема Свана

{векторные расслоения над X} $\cong$
{конечнопорожденные проективные $C(X)$-модули}

Т. о. конечнопорожденные проективные модули над C*-алгеброй A можно рассматривать как векторные расслоения (точнее, как модули их сечений) над некоммутативными пространствами.

Множество $M_n(A)$ $n \times n$-матриц с элементами из C*-алгебры A также является C*-алгеброй. Каждый конечнопорожденный проективный модуль соответствует некоторому проектору $p \in M_n(A)$. (p — проектор, если $p = p^* = p^2$.)

Пример: Пусть $A = C(\mathbb{S}^2)$, заданная уравнением $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.
Тогда $p(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+x_3 & x_1+ix_2 \\ x_1-ix_2 & 1-x_3 \end{pmatrix}$ — проектор ранга 1 в каждой точке $x \in \mathbb{S}^2$, и это семейство проекторов определяет одномерное нетривиальное векторное расслоение над $\mathbb{S}^2$, называемое линейным расслоением Хопфа.
Квантовой сферой Подлеса $\mathbb{S}^2_q$, $q \in \mathbb{C}$, $|q| = 1$, называется C*-алгебра, порожденная образующими a, a^* и b, удовлетворяющими соотношениям

$$aa^* + q^{-4}b^2 = 1, \quad a^*a + b^2 = 1, \quad ab = q^{-2}ba, \quad a^*b = q^2ba^*.$$

Если $q = 1$, то взяв $a = x_1 + ix_2$, $b = x_3$, получаем $C(\mathbb{S}^2)$. Квантовый аналог расслоения Хопфа задается матрицей $p_q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+q^{-2}b & qa \\ q^{-1}a^* & 1-b \end{pmatrix}$, удовлетворяющей равенствам $p_q^2 = p_q = p_q^*$.

Пример: Проекторы Риффела для некоммутативного тора.

При $\theta = 0$, $A_0 = C(\mathbb{T}^2)$ не содержит нетривиальных проекторов. При $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$ возьмем

$$p = f_{-1}(U)V^{-1} + f_0 + f_1(U)V, \quad f_{-1}, f_0, f_1 \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

Условия $p^2 = p = p^*$ дают уравнения

$$f_1(t)f_1(t-\theta) = 0; \quad f_1(t)f_0(t-\theta) = (1 - f_0(t))f_1(t);$$

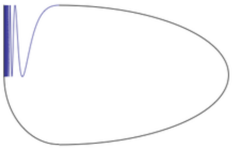
$$|f_1(t)|^2 + |f_1(t+\theta)|^2 = f_0(t)(1 - f_0(t)); \quad f_{-1}(t) = f_1(t+\theta),$$

имеющие много решений.

На A_θ имеется след τ, заданный формулой $\tau(\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{mn}U^mV^n) = a_{00}$. Для $\theta = 0$ это интеграл по $\mathbb{T}^2$. Упражнение: $\tau(p) = \theta$. Это — аналог некоммутативного векторного расслоения нецелой размерности.

Теория шейпов

Алгебраическая топология плохо приспособлена к изучению сингулярных пространств. Теория шейпов аппроксимирует такие пространства хорошими пространствами (полиэдрами, ANR и т.п.). Например, Варшавская окружность X



имеет ту же форму, что и обычная окружность, но она не гомотопически эквивалентна окружности: $\pi_1(X) = 0$. Однако любая ε-окрестность X_ε пространства X гомотопически эквивалентна окружности.

Алгебраически, все $*$-гомоморфизмы $C(X) \to C(\mathbb{S}^1)$ гомотопически тривиальны, но гомотопические классы $*$-гомоморфизмов $C(X_\varepsilon) \to C(\mathbb{S}^1)$ находятся в биективном соответствии с $\mathbb{Z}$.

Т.к. $X \subset X_\varepsilon$, имеется эпиморфный $*$-гомоморфизм $q : C(X_\varepsilon) \to C(X)$. Может не существовать поднятия (правого обратного) для q как $*$-гомоморфизма, но для $f \in C(X)$ можно определить $f_\varepsilon \in C(X_\varepsilon)$ так: возьмем ε-сеть $x_1, \ldots, x_n$ в X_ε, положим $f_\varepsilon(x_i) = f(x)$, где $x \in X$ — точка, близкая к x_i, а в других точках X_ε используем линейную интерполяцию. Такое определение далеко не единственно, и $\alpha_\varepsilon : f \mapsto f_\varepsilon$ — не $*$-гомоморфизм (оно даже не линейно). Но $\lim_{\varepsilon \to 0} \|(fg)_\varepsilon - f_\varepsilon g_\varepsilon\| = 0$ для любых $f, g \in C(X)$, т.е. асимптотически α_ε ведет себя как $*$-гомоморфизм при $\varepsilon \to 0$.

$$\begin{tikzcd}
C(X_\varepsilon) \arrow[rr, "\varphi_\varepsilon"] \arrow[d, shift left, "q"] & & C(\mathbb{S}^1) \\
C(X) \arrow[u, dashed, shift left, "\alpha_\varepsilon"] \arrow[urr, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

Если $*$-гомоморфизмы φ_ε организованы 'непрерывным' образом, композиция $\varphi_\varepsilon \circ \alpha_\varepsilon : C(X) \to C(\mathbb{S}^1)$ является асимптотическим $*$-гомоморфизмом.

Асимптотические $*$-гомоморфизмы

Используя $t = \varepsilon^{-1}$ и забывая о коммутативности, получаем определение асимптотического $*$-гомоморфизма (принадлежащее А. Конну и Н. Хигсону):

Определение

Пусть $\varphi_t : A \to B$, $t \in [0, \infty)$, — семейство отображений. Оно называется асимптотическим $*$-гомоморфизмом если

- для любого $a \in A$ отображение $t \mapsto \varphi_t(a)$ непрерывно;
- асимптотически, φ_t ведет себя как $*$-гомоморфизм, т.е.
  - $\lim_{t\to\infty} \varphi_t(\lambda a_1 + a_2^*) - \lambda\varphi_t(a_1) - \varphi_t(a_2)^* = 0$;
  - $\lim_{t\to\infty} \varphi_t(a_1 a_2) - \varphi_t(a_1)\varphi_t(a_2) = 0$

  для любых $a_1, a_2 \in A$ и любого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Пусть $r : [0, \infty) \to [0, \infty)$ — монотонная функция, и $\lim_{t\to\infty} r(t) = \infty$. Тогда $(\varphi_{r(t)})$ называется репараметризацией (φ_t).

Гомотопия между двумя асимптотическими $*$-гомоморфизмами определяется стандартно с помощью асимптотического $*$-гомоморфизма $A \to C([0,1]; B)$. Две репараметризации одного асимптотического $*$-гомоморфизма гомотопны.

Легко определить композицию асимптотического $*$-гомоморфизма и настоящего $*$-гомоморфизма, но композиция двух асимптотических $*$-гомоморфизмов может не быть асимптотическим $*$-гомоморфизмом. Эту проблему можно обойти репараметризацией. Пусть A, B, C — сепарабельные C*-алгебры, $(\varphi_t) : A \to B$ и $(\psi_t) : B \to C$ — асимптотические $*$-гомоморфизмы. Тогда $(\psi_{r(t)} \circ \varphi_t) : A \to C$ — асимптотический $*$-гомоморфизм при достаточно быстрорастущей репараметризации r.

Асимптотический $*$-гомоморфизм $(\psi_t \circ \varphi_t) : A \to C$ корректно определен с точностью до гомотопии.

Для сепарабельных C*-алгебр A и B пусть $[[A, B]]$ обозначает множество гомотопических классов асимптотических $*$-гомоморфизмов из A в B. A и B шейпово эквивалентны, если существуют асимптотические $*$-гомоморфизмы $(\alpha_t) : A \to B$ и $\beta_t : B \to A$, композиции $(\beta_t) \circ (\alpha_t)$ и $(\alpha_t) \circ (\beta_t)$ которых гомотопны id_A и id_B соответственно.
В коммутативном случае это дает обычную шейповую эквивалентность (Э. Эффрос, М. Дадарлат).

На $[[A, B]]$ нет естественной групповой структуры. используя надстройку и некоммутативную C*-алгебру $\mathbb{K}$ компактных операторов, можно снабдить множество $E(A, B) = [[SA \otimes \mathbb{K}, SB \otimes \mathbb{K}]]$ структурой абелевой группы ($\mathbb{K}$ нужна для прямых сумм, а надстройка для существования обратного).

$E(A, B)$ — гомотопически инвариантный бифунктор.
$E(\mathbb{C}, C(X)) \cong K^*(X)$, $E(C(X), \mathbb{C}) \cong K_*(X)$ (K-теория и K-гомологии соответственно).

Даже для коммутативных C*-алгебр полезно выйти за пределы коммутативного мира, например, тензорным умножением на $\mathbb{K}$. Другой пример этого дают расширения.

Определение

Пусть A, B, E — C*-алгебры. Если B — идеал в E с фактором $A = E/B$, то говорят, что E — расширение A с помощью B.

Расширения обычно записывают в виде коротких точных последовательностей

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} A \longrightarrow 0\,,$$

где ядро каждого отображения совпадает с образом предыдущего.

Если X — локально компактное хаусдорфово пространство, $Y \subset X$ — его замкнутое подпространство, то

$$0 \longrightarrow C_0(X, Y) \xrightarrow{i} C(X) \xrightarrow{p} C(Y) \longrightarrow 0$$

— C*-расширение.

Коммутативные C*-расширения — нчто иное как пары (X, Y), $Y \subset X$. Теория становится интереснее в некоммутативном случае.

Пример: Пусть S — односторонний сдвиг в l_2, T — алгебра Тёплица, т.е. C*-алгебра с единицей, порожденная S. Поскольку $I - SS^*$ имеет ранг 1, T содержит все компактные операторы, т.е. $\mathbb{K} \subset T$. Существенный спектр S — единичная окружность. Получаем расширение $0 \to \mathbb{K} \to T \to C(\mathbb{S}^1) \to 0$.
Обобщая, пусть F — существенно нормальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве (т.е. $F^*F - FF^* \in \mathbb{K}$) с существенным спектром X. Пусть T_F — C*-алгебра с единицей, порожденная F и $\mathbb{K}$. Тогда $0 \to \mathbb{K} \to T_F \to C(X) \to 0$ — расширение. Если F нормален, то это расширение тривиально: $T_F = C(X) \oplus \mathbb{K}$ (как банаховы пространства, но не алгебры).

Задача: По данным A и B классифицировать все такие E, что $0 \to B \to E \to A \to 0$ — расширение C*-алгебр. Сложно!
1-е упрощение: классифицировать расширения лишь с точностью до некоторой эквивалентности.
2-е упрощение: классификация упрощается прии наличии дополнительной алгебраической структуры. Таковая возникает, если взять $B = \mathbb{K}$, тогда можно определить прямую сумму, используя $*$-изоморфизм $\mathbb{K} \cong M_2(\mathbb{K})$:

Для двух расширений $0 \to \mathbb{K} \to E_i \to A \to 0$, $i = 1, 2$, определим

$$E_1 \oplus E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} e_1 & k_{12} \\ k_{21} & e_2 \end{pmatrix} : k_{12}, k_{21} \in \mathbb{K}, e_i \in E_i, q_1(e_1) = q_2(e_2) \right\},$$

где $q_i : E_i \to A$, $i = 1, 2$, — $*$-гомоморфизмы факторизации.

Два расширения, E_1 и E_2, C*–алгебры A с помощью $\mathbb{K}$ унитарно эквивалентны, если существует $*$-изоморфизм $\alpha : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ и $*$-гомоморфизм $\varphi : E_1 \to E_2$, делающие диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{K} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & E_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{K} \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

коммутативной.

Расширение $0 \to \mathbb{K} \to E \xrightarrow{q} A \to 0$ тривиально, если оно расщепляется, т.е. если существует такой $*$-гомоморфизм $s : A \to E$, что $q \circ s = \mathrm{id}_A$.

Наконец, два расширения, E_1 и E_2, C*-алгебры A с помощью $\mathbb{K}$ эквивалентны, если существует расщепимое расширение F C*-алгебры A с помощью $\mathbb{K}$, для которого $E_1 \oplus F$ и $E_2 \oplus F$ унитарно эквивалентны.

Пусть $\operatorname{Ext}(A)$ — множество классов эквивалентности расширений A с помощью $\mathbb{K}$. Операция прямой суммы превращает его в абелеву полугруппу с нулем. В коммутативном случае функтор $\operatorname{Ext}(C(X))$ был изучен Л. Брауном, Р. Дугласом и П. Филлмором (BDF-теория).

Теорема (BDF)

$\operatorname{Ext}(C(X)) \cong K_*(X)$ (K-гомологии). В частности, это гомотопически инвариантный функтор созначениями в абелевых группах.

Для некоммутативных C*-алгебр известно, что $\operatorname{Ext}(A)$ может не быть группой. Дж. Андерсон посторил первый пример C*-алгебры A и ее расширения с помощью $\mathbb{K}$, не имеющее обратногорасширения.
Можно ослабить определение эквивалентности для расширений, чтобы больше расширений стало обратимыми. Однако

Theorem (В. М. – К. Томсен)

Для любого гомотопически инвариантного отношения эквивалентности соответствующий функтор не может быть группой для некоторых C*-алгебр.

Пример (Д. Войкулеску): Рассмотрим матрицы размерности n

$$U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad V_n = \begin{pmatrix} \omega & & & & \\ & \omega^2 & & & \\ & & \omega^3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega^n \end{pmatrix},$$

где $\omega = \omega_n = e^{2\pi i/n}$. Тогда $U_n V_n U_n^{-1} V_n^{-1} = \omega_n \cdot E$, где E — единичная матрица. При $n \to \infty$, $\omega_n \to 1$, и матрицы U_n и V_n асимптотически коммутируют. Полезная точка зрения состоит в том, чтобы рассматривать такую последовательность пар (U_n, V_n) как асимптотическое представление свободной абелевой группы $\mathbb{Z}^2$ с двумя образующими, a, b (считаем, что “представление” π_n переводит a в U_n, b в V_n).

В общем случае, если матрицы U, V таковы, что $UVU^{-1}V^{-1}$ близко к E, $\det(tUVU^{-1}V^{-1} + (1-t)E) \neq 0$ для всех $t \in [0,1]$, таким образом получаем непрерывное отображение $f : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ в комплексную плоскость без 0.

Ясно, что $f(0) = \det E = 1$, $f(1) = \det(UVU^{-1}V^{-1}) = 1$. Функцию на отрезке, имеющую равные значения на концах, можно считать заданной на окружности, поэтому f задает отображение окружности S^1 в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Каждому такому отображению можно сопоставить число вращения.

Как обычно в топологии, если "пошевелить" U и V, заменив их на близкие к ним матрицы, число вращения не изменится.

Если $UV = VU$, то f не зависит от t и тождественно равна 1; ее число вращения равно 0.

Упражнение: Проверить, что для матриц U_n, V_n (при $n \geq 3$) число вращения равно 1.

Вывод: "рядом" с асимптотическим представлением $\pi = (\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ группы $\mathbb{Z}^2$ не существует "настоящих" представлений.

Пары матриц $\left(\begin{smallmatrix} U_n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} V_n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ и U_{n+1}, V_{n+1} можно соединить путем U_t, V_t, $t \in [n, n+1]$ в матрицах порядка $n+1$ так, что $\|U_t V_t U_t^{-1} V_t^{-1} - E\| < \frac{2}{n}$ для всех $t \in [n, n+1]$. Получаем асимптотическое представление группы $\mathbb{Z}^2$ в объединении конечномерных унитарных групп.

Такой подход позволяет определить асимптотические представления групп, заданных образующими и соотношениями (надо требовать, чтобы образы соотношений были близки к 1).

Конструкция, принадлежащая А. С. Мищенко, позволяет канонически строить векторные расслоения на многообразии с фундаментальной группой Γ по асимптотическому представлению группы Γ. Такие расслоения называются почти плоскими. Для хороших групп Γ так можно получить все элементы $K^0(B\Gamma)$, где $B\Gamma$ — классифицирующее пространство группы Γ. Задача описания асимптотических представлений групп имеет прямое отношение к известным гипотезам Новикова и Баума–Конна.