2. ПЛАН ИССЛЕДОВАНИЯ

1. Введение в предмет исследования

Основной темой предлагаемого проекта является топологическая теория торических действий и её применения в алгебраической топологии, комбинаторной геометрии, коммутативной и гомологической алгебре. В рамках этих исследований возникла новая активно развивающаяся область, ставшая известной под названием *Торическая Топология*.

Общая теория действий тора имеет длинную историю развития и образует важную область эквивариантной топологии. Торическая топология изучает алгебраические, комбинаторные, дифференциальные и гомотопические аспекты класса действий тора, для которых пространство орбит несёт богатую комбинаторную структуру. Особенностью этой области является возможность вычисления инвариантов в терминах комбинаторики пространства орбит, а одной из основных целей является классификация торических пространств при помощи этих инвариантов.

Первоначальный импульс этому развитию придала теория *торических многообразий* в алгебраической геометрии. Пространством орбит неособого проективного торического многообразия по действию компактного тора T^n представляет собой выпуклый простой многогранник P. Двойственный многогранник является симплициальным, а его граница является симплициальным комплексом K. Таким образом, пространство орбит действия тора несёт комбинаторную структуру, отражающую распределение стационарных подгрупп и позволяющую полностью восстановить многообразие и действие. Замечательно, что этот подход работает и в обратном направлении: в терминах топологических инвариантов пространства с действием тора удаётся интерпретировать и доказывать весьма тонкие комбинаторные результаты топологически. Эта особенность алгебраических торических многообразий имеет чисто топологическую природу, что вызвало активное проникновение идей и методов торической геометрии в алгебраическую топологию с начала 1990-х годов.

Дальнейшие исследования выявили два важных класса T^n-многообразий, происхождение которых восходит к торическим многообразиям, предоставляющих возможности для приложения методов торической топологии в комбинаторике и коммутативной алгебре. Первый из них — это *квазиторические многообразия* Дэвиса–Янушкиевича [11]. Этот класс многообразий определяется двумя условиями: действие тора локально выглядит как стандартное представление T^n в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, а пространство орбит Q является комбинаторным простым многогранником. (Оба условия выполнены для действия тора на неособом проективном торическом многообразии.) Второй, намного более общий класс — это *тор-многообразия* Хаттори–Масуды [12]. Тор-многообразие M представляет собой $2n$-мерное гладкое компактное многообразие с эффективным действием тора T^n, множество неподвижных точек которого непусто (заметим, что оно всегда конечно).

Стенли был одним из первых, кто осознал полный потенциал этого направления для комбинаторных приложений, использовав его для доказательства *гипотезы Макмюллена* о числах граней симплициальных многогранников и *гипотезы о верхней границе* для триангуляций сфер. Его результаты и методы легли в основу известной монографии [20] и предопределили дальнейшие приложения коммутативной алгебры и гомологических методов в комбинаторной геометрии.

Многие идеи Стенли находят и топологическое применение; в частности, *кольцо граней* (или *кольцо Стенли–Райснера*) $\mathbb{Z}[K]$ симплициального комплекса K является важной составляющей в вычислении кольца когомологий квазиторического многообразия M. В ходе

Заявка Т. Е. Панова на конкурсы П. Делиня и фонда “Династия”.

своего вычисления этого кольца Дэвис и Янушкиевич сопоставили некоторое вспомогательное T^m-пространство $\mathcal{Z}_K$ каждому комплексу K с m вершинами, и рассмотрели его гомотопическое факторпространство (или *конструкцию Бореля*) $DJ(K)$. Определение пространства $\mathcal{Z}_K$ навеяно конструкцией Винберга универсального пространства для групп отражений и аналогично определению *комплекса Кокстера*. Кольцо когомологий пространства $DJ(K)$ (или *эквивариантные когомологии* многообразия M)) изоморфно кольцу граней $\mathbb{Z}[K]$ для любого K. Кольцо обычных когомологий $H^*(M)$ получается из $\mathbb{Z}[K]$ факторизацией некоторых линейных форм, в точности как и для торических многообразий.

С появлением понятия кольца граней стало ясно, что многие тонкие комбинаторные свойства комплексов K можно интерпретировать алгебраически. Изучение колец граней получило самостоятельное развитие и привело к новому классу *колец Коэна–Маколея*, имеющих геометрическую природу. В частности, возникло новое топологическое понятие *комплекса Коэна–Маколея*, для которого $\mathbb{Z}[K]$ является кольцом Коэна–Маколея. Подробное изложение этих понятий можно найти в монографии [6], где также подчёркивается важность гомологического подхода. Например, в [20] и [6] рассматриваются размерности биградуированных компонент векторных пространств $\mathrm{Tor}_{k[v_1,\dots,v_m]}(k[K],k)$, называемые *алгебраическими числам Бетти* кольца $k[K]$, для любого поля k. Эти числа являются весьма тонкими инвариантами: они зависят от комбинаторики K, а не только от топологии его реализации $|K|$, и полностью определяют "обычные" топологические числа Бетти для $|K|$. Теорема Хохстера выражает алгебраические числа Бетти через гомологии полных подкомплексов в K.

2. Проведённые исследования

Результаты, полученные Т. Пановым и соавторами в рамках исследований по торической топологии составляют необходимую основу для успешного выполнения проекта. Изложению результатов о квазиторических многообразиях и момент-угол комплексах, их роли в торической топологии и приложениям в комбинаторной геометрии и гомологической алгебре посвящена монография Бухштабера и Панова [9], вышедшея в серии "University Lecture Series" Американского Математического общества. В 2004 году появилось её существенно расширенное русском издание [4]. Многие результаты получили дальнейшее развитие в работах Панова с другими соавторами.

Роды Хирцебруха торических и квазиторических многообразий. Работы Бухштабера–Рэя показали [7], что квазиторические многообразия играют важную роль в теории комплексных кобордизмов — классической области алгебраической топологии. В отличие от торических многообразий, квазиторические многообразия могут не быть комплексными, однако они всегда допускают стабильно комплексную структуру, и их классы кобордизмов порождают всё кольцо комплексных кобордизмов. Стабильно комплексная структура на квазиторическом многообразии определяется в комбинаторных терминах — при помощи *характеристической функции*, сопоставляющей каждой гиперграни многогранника P^n некоторый примитивный вектор в $\mathbb{Z}^n$ (характеристическая функция играет роль *веера*, сопоставляемого торическому многообразию в алгебраической геометрии). В работе Панова [5] получены эффективные комбинаторные формулы, вычисляющие ряд важных родов Хирцебруха квазиторических многообразий в терминах характеристической функции. Эти формулы переносят на случай квазиторических многообразий известные результаты торической геометрии, опирающиеся на теорему Римана–Роха–Хирцебруха. В случае старшего числа Чженя c_n и рода Тодда формулы Панова приводят к препятствиям к существованию эквивариантной почти комплексной структуры на квазиторическом многообразии, что является важным продвижением в проблеме, поставленной Дэвисом и Янушкиевичем [11].

Момент-угол комплексы. Теория *момент-угол комплексов*, одним из создателей которой является Т. Е. Панов, представляет собой один из основных инструментов современных приложений торической топологии. Момент-угол комплексы тесно связаны с торическими и квазиторическими многообразиями и своим происхождением обязаны работе [11], где каждому симплициальному комплексу K с m вершинами было сопоставлено вспомогательное T^m-пространство $\mathcal{Z}_K$. Вскоре стало ясно, что пространства $\mathcal{Z}_K$ представляют отдельный большой интерес в торической топологии, и они получили известность под названием момент-угол комплексов [9]. Они возникают в теории гомотопий как *гомотопические копределы* диаграмм торов [18], в симплектической топологии как поверхности уровня для *отображений моментов* гамильтоновых действий тора [17] и в теории конфигураций подпространств как *дополнения конфигураций координатных подпространств* [9, Ch. 8]. Конструкция момент-угол комплексов даёт функтор из категории симплициальных комплексов и симплициальных отображений в категорию пространств с действием тора и эквивариантных отображений. Если K является триангуляцией $(n-1)$-мерной сферы, то $\mathcal{Z}_K$ является $(m+n)$-мерным многообразием. Более того, если $K = \partial P$ — триангуляция сферы, двойственная к границе простого многогранника, то имеется главное T^{m-n}-расслоение $\mathcal{Z}_K \to M$ для любого (квази)торического многообразия M с пространством орбит P.

Когомологии момент-угол комплексов и кольца граней. В работе [1] вычислены когомологии момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K$. Доказан изоморфизм алгебры когомологий $H^*(\mathcal{Z}_K)$ и Tor-*алгебры* $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbb{Z}[K],\mathbb{Z})$, где $\mathbb{Z}[K]$ — кольцо граней комплекса K. При этом показано, что каноническая биградуировка в Tor имеет явную геометрическую реализацию, обусловленную введённой в $\mathcal{Z}_K$ биградуированной клеточной структурой. Дальнейший анализ привёл к эффективному описанию Tor-алгебры в терминах комплекса Кошуля, которое открыло пути применения известных пакетов компьютерных программ (Macaulay2, Bistellar и др.) для вычислений в комбинаторной геометрии.

Дополнения конфигураций подпространств. Область приложения результата о когомологиях $\mathcal{Z}_K$ оказалась широкой благодаря тому, что момент-угол комплексы $\mathcal{Z}_K$ имеют различные, на первый взгляд не связанные между собой, реализации. В каждом случае получается решение известной задачи об описании соответствующего кольца когомологий. В частности, теорема Бухштабера–Панова о момент-угол комплексах даёт исчерпывающее глобальное описание кольца когомологий дополнения конфигурации координатных подпространств. Отметим, что известные результаты о когомологиях дополнений конфигураций координатных подпространств либо не описывают мультипликативной структуры (как общая теорема Горески–Макферсона), либо дают лишь описание произведения двух данных коциклов в комбинаторных терминах (как недавние результаты де Лонгвилле).

Векторы граней (f-векторы). Вычисление когомологий момент-угол комплексов имеет непосредственное отношение к классу комбинаторных проблем, связанных с *векторами граней* многогранников и триангуляций. *Вектором граней*, или *f-вектором*, $(n-1)$-мерного симплициального комплекса K называется вектор, компонентами f_i которого являются числа граней размерности $i = 0,\ldots,n-1$. Многие важные свойства f-векторов могут быть описаны путём выражения их в терминах чисел Бетти момент-угол комплексов. Открытая в теории момент-угол комплексов биградуированная двойственность Пуанкаре в случае триангуляции сферы приводит к известным *соотношениям Дена–Соммервилля* на числа граней f_i размерности $0 \le i \le n-1$ в триангуляции. Эти соотношения имеют вид $h_i = h_{n-i}$, где $h(K) = (h_0, h_1, \ldots, h_n)$ — так называемый *h-вектор*, компоненты которого являются линейными комбинациями чисел f_i. Более тонкий анализ двойственности Пуанкаре позволил получить *обобщённые соотношения Дена–Соммервилля* вида $h_{n-i} - h_i = (-1)^i(\chi(K) - \chi(S^{n-1}))C_n^i$ для триангулированных многообразий.

Торическая топология и геометрическая теория инвариантов. Недавно методы торической топологии и, в частности, теория момент-угол комплексов нашли применения в теории действий алгебраических групп. В работе Панова [17] построены *множества типа Кемпфа–Несс* для действий алгебраического тора на некоторых квазиаффинных многообразиях и описана топология этих множеств. В классической ситуации действий алгебраических групп на аффинных многообразиях понятие множества Кемпфа–Несс позволяет заменить категорный фактор на факторпространство по действию максимальной компактной подгруппы. Мы показываем, что момент-угол комплекс играет роль множества Кемпфа–Несс для класса действий алгебраического тора на квазиафинных многообразиях (дополнениях конфигураций координатных подпространств), возникающих в подходе Батырева–Кокса к торическим многообразиям на основе геометрической теории инвариантов. Затем мы применяем наши результаты о когомологиях момент-угол комплексов в вычислению когомологий этих “торических” множеств Кемпфа–Несс. В случае неособых проективных торических многообразий соответствующие множества Кемпфа–Несс могут быть описаны как полные пересечения вещественных квадрик в комплексном пространстве.

Аналогичные многогранники и кобордизмы квазиторических многообразий. В работе Бухштабера–Панова–Рэя [10] методы выпуклой геометрии и, в частности, теория *аналогичных многогранников* применяются для изучения квазиторических многообразий в контексте стабильно комплексных многообразий с действием тора. Понятие аналогичных многогранников впервые появилось в работах Александрова в 1930-х годах, а затем теория аналогичных многогранников получила существенное развитие в недавних работах Пухликова и Хованского. Наши приложения этой теории включают явную конструкцию квазиторического представителя в каждом классе комплексных кобордизмов. Квазиторический представитель строится как факторпространство вещественного полного пересечения квадратичных гиперповерхностей по действию тора. Это полное пересечение есть ни что иное, как ещё одна интерпретация момент-угол комплекса. Мы предлагаем систематическое описание квазиторических многообразий в терминах комбинаторных данных, и описываем взаимосвязь с неособыми проективными торическим многообразиями. Интерпретируя в этих терминах подход Бухштабера–Рэя [7] к построению торических представителей в классах кобордизмов мы явно описываем оснащение вложения многогранника в положительный октант и даём конструкцию связной суммы многогранников и квазиторических многообразий, учитывающую ориентации. Применение теории аналогичных многогранников предоставляет замечательный инструмент для работы с пространствами орбит.

Гомотопические аспекты торической топологии. Различные конструкции *гомотопических прямых пределов* в последнее время часто возникают в приложениях гомотопической топологии. В работе Панова, Рэя и Фогта [18] было доказано, что функторы классифицирующего пространства и пространства петель коммутируют с функтором гомотопического прямого предела (с классическим функтором прямого предела они не коммутируют). В качестве следствия получены модели пространств петель на момент-угол комплексах и их конструкциях Бореля — *пространствах Дэвиса–Янушкиевича* $DJ(K)$ — в виде гомотопических прямых пределов диаграмм торов в категории топологических групп.

Полусвободные действия окружности и башни Ботта. *Башней Ботта* называется итерированное расслоение над $\mathbb{C}P^1$ со слоем $\mathbb{C}P^1$. Тотальное пространство такого расслоение является проективным торическим многообразием, причём образ его отображения моментов является многогранником, комбинаторно эквивалентным кубу. Действие окружности называется *полусвободным*, если оно свободно на дополнении к множеству неподвижных точек. В работе [13] Маэды–Масуды–Панова мы показываем, что квазиторическое многообразие над кубом с полусвободным действием окружности и изолированными неподвижными точками является башней Ботта. Затем мы показываем, что такая башня Ботта топологически тривиальна, т.е. диффеоморфна произведению 2-мерных сфер. Это обобщает недавний результат Ильинского, согласно которому неособое компактное торическое многообразие с полусвободным действием окружности и изолированными неподвижными точками диффеоморфно произведению 2-мерных сфер, и является дальнейшим продвижением в проблеме Хаттори о полусвободных действиях окружности. Кроме того, мы показываем, что если кольцо когомологий квазиторического многообразия (или башни Ботта) изоморфно кольцу когомологий произведения 2-мерных сфер, то само многообразие диффеоморфно произведению.

3. Проект будущих исследований

В рамках проекта планируется продолжить исследования по всем направлениям из предыдущего раздела. Особое внимание планируется уделить следующим трём аспектам торической топологии.

1. Продолжить изучение квазиторических многообразий в контексте комплексных кобордизмов, начатое в работах Бухштабера–Рэя и Бухштабера–Панова–Рэя. Главной целью является построение чисто комбинаторной модели теории комплексных кобордизмов. Используя наличие квазиторического представителя в каждом классе комплексных кобордизмов, мы можем описывать классы кобордизмов при помощи пар (P, Λ), где P — простой многогранник, а Λ — матрица характеристической функции. Операция суммы в кобордизмах соответствует связной сумме многогранников, а произведения — произведению многогранников. Для вычисления кольца комплексных кобордизмов на основе этой комбинаторной модели необходимо иметь эффективное описание характеристических чисел Чжена стабильно комплексных квазиторических многообразий в терминах комбинаторных данных. Первые результаты в этом направлении — вычисления мультипликативных характеристических чисел, или родов Хирцебруха, уже получены в предыдущих работах Панова.

2. Изучить гомотопический тип момент-угол комплексов $\mathcal{Z}_K$ и их пространств петель путём построения соответствующих алгебраических моделей. Так как рациональный гомотопический тип пространства $\mathcal{Z}_K$ содержит в себе значительно больше информации, чем кольцо когомологий, он также содержит больше информации о комбинаторной структуре самого комплекса K. В частности, на этом пути может быть возможно получение неравенств на числа граней, а не лишь соотношений Дена–Соммервилля. Это может пролить свет на некоторые известные комбинаторные проблемы, такие как g-гипотеза Макмюллена и Стенли для триангуляций сфер. Гомотопическая точка зрения приводит к анализу пространства петель $\Omega DJ(K)$. В работе [18] это пространство было представлено в виде *гомотопического копредела* диаграммы торов в категории (неабелевых) топологических групп. Особый интерес представляют гомологии и когомологии пространства $\Omega DJ(K)$, так как они дают топологическую интерпретацию гомологическим инвариантам кольца граней $k[K]$. Вычисления на основе кобар-конструкции Адамса позволяют отождествить кольцо Понтрягина $H_*(\Omega DJ(K); k)$ алгеброй Йонеды $\mathrm{Ext}_{k[K]}(k, k)$ над полем k. В то же время, спектральная последовательность Эйленберга–Мура приводит к изоморфизму кольца когомологий $H^*(\Omega DJ(K); k)$ и алгебры $\mathrm{Tor}_{k[K]}(k, k)$. Обе эти алгебры имеют весьма сложную структуру, и их вычисление представляет самостоятельный алгебраический интерес. Так как пространство $\Omega DJ(K)$ раскладывается в произведение $\Omega\mathcal{Z}_K \times T^m$ для любого комплекса K, мы получаем также описание (ко)гомологий пространства $\Omega\mathcal{Z}_K$.

Вычисления для несложных комплексов K показывают, что наиболее простая картина получается в случае, когда K — *флаговый комплекс* (т.е. K определяется своим 1-остовом). В этом случае $k[K]$ является *квадратичной алгеброй.* Известно, что квадратичная алгебра Стенли–Райснера является *кошулевой.* Тем самым, её *квадратично двойственная алгебра* изоморфна $H_*(\Omega DJ(K); k)$. Эта алгебра представляется как копредел внешних алгебр в категории (некоммутативных) градуированных алгебр. Сопоставляя это с геометрической моделью для $\Omega DJ(K)$, мы приходим к предположению, что для произвольного комплекса K алгебра $H_*(\Omega DJ(K); k)$ (или $\mathrm{Ext}_{k[K]}(k, k)$) представляется в виде гомотопического копредела диаграммы внешних алгебра в категории дифференциальных градуированных алгебра. Доказательство этой гипотезы потребует тонкого анализа конструкции гомотопического копредела в алгебраических категориях.

3. Башни Ботта, или итерированные $\mathbb{C}P^1$-расслоения над $\mathbb{C}P^1$ образуют важное семейство торических многообразий. Обобщив результаты Масуды–Панова мы планируем завершить топологическую классификацию башень Ботта в терминах их колец когомологий.

4. Преподавательский опыт и педагогические планы

С 1998 г. работаю преподавателем кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ (с 2001 г. — доцент). Веду курсы аналитической геометрии (для студентов 1 курса), линейной алгебры и геометрии (1 курс), классической дифференциальной геометрии (2 курс), дифференциальной геометрии и топологии (3 курс). Кроме того, ежегодно читаю специальные курсы по различным аспектам алгебраической топологии (характеристические классы, кобордизмы, K-теория и т.д.). В 2007 г. буду читать специальный курс “Дополнительные главы алгебраической топологии” в Научно-образовательном центре Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

Список литературы

[1] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Действия тора и комбинаторика многогранников.* Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова, т. **225** (1999), стр. 96–131; arXiv:math.AT/9909166.

[2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Действия тора, комбинаторная топология и гомологическая алгебра.* Успехи мат. наук **55** (2000), вып. 5, стр. 3–106; arXiv:math.AT/0010073.

[3] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Комбинаторика симплициально клеточных комплексов и торические действия.* Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова, т. **247** (2004), стр. 41–58.

[4] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Торические действия в топологии и комбинаторике.* Издательство МЦНМО, Москва, 2004 (272 стр.).

[5] Т. Е. Панов. *Роды Хирцебруха многообразий с действием тора*, Известия РАН, сер. матем. **65** (2001), вып. 3, стр. 123–138.

[6] Winfried Bruns and Jürgen Herzog. *Cohen–Macaulay Rings*, revised edition. Cambridge Studies in Adv. Math., vol. 39, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[7] Victor M. Buchstaber and Nigel Ray. *Tangential structures on toric manifolds, and connected sums of polytopes.* Internat. Math. Res. Notices **4** (2001), 193–219.

[8] V. M. Buchstaber and T. E. Panov. *Torus actions determined by simple polytopes*, in: “Geometry and Topology: Aarhus"(K. Grove, I. H. Madsen, and E. K. Pedersen, eds.). Contemporary Math., vol. **258**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 33–46.

[9] Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. *Torus actions and their applications in topology and combinatorics,* University Lecture, vol. **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002 (152 pages).

[10] Victor M. Buchstaber, Taras E. Panov and Nigel Ray. *Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds.* Submitted preprint; arXiv:math.AT/0609346.

[11] Michael W. Davis and Tadeusz Januszkiewicz. *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions.* Duke Math. J. **62** (1991), no. 2, 417–451.

[12] Akio Hattori and Mikiya Masuda. *Theory of multi-fans.* Osaka J. Math. **40** (2003), 1–68; math.SG/0106229.

[13] Hiroshi Maeda, Mikiya Masuda and Taras Panov. *Torus graphs and simplicial posets.* Advances in Math. (2007), to appear; arXiv:math.AT/0511582.

[14] Mikiya Masuda. *h-vectors of Gorenstein* simplicial posets.* Advances in Math. **194** (2005), no. 2, 332–344; arXiv:math.CO/0305203.

[15] Mikiya Masuda and Taras Panov. *On the cohomology of torus manifolds.* Osaka J. Math. **43** (2006), 711–746; arXiv:math.AT/0306100.

[16] Mikiya Masuda and Taras Panov. *Semifree circle actions, Bott towers, and quasitoric manifolds.* Preprint; arXiv:math.AT/0607094.

[17] Taras E. Panov. *Topology of Kempf–Ness sets for algebraic torus actions*, in “Proceedings of the International Conference ‘Contemporary Geometry and Related Topics’ (Belgrade, 2005)”, to appear; arXiv:math.AG/0603556.

[18] Taras Panov, Nigel Ray and Rainer Vogt. *Colimits, Stanley–Reiner algebras, and loop spaces,* in: “Categorical Decomposition Techniques in Algebraic Topology (Isle of Skye, 2001)”, Progress in Math., vol. **215**, Birkhäuser, Basel, 2004, pp. 261–291; arXiv:math.AT/0202081.

[19] Richard P. Stanley. *f-vectors and h-vectors of simplicial posets.* J. Pure Appl. Algebra. **71** (1991), 319–331.

[20] Richard P. Stanley. *Combinatorics and Commutative Algebra*, second edition. Progress in Math. **41**, Birkhäuser, Boston, 1996.